ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۳، شماره ۳ (۱۳۹۷)، صص. ۷۸-۶۷

نشریه علمی-ترویجی دانشگاه اصفهان
http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

جبرهای فیستر با برگردان

امیرحسین نخودکار

چکیده. در این مقاله به مرور فرم‌های دوخطی فیستر روی میدان‌ها و برگردان‌های فیستر روی جبرهای سادهٔ مرکزی می‌پردازیم. همچنین به بیان حدس‌های مهم در این راستا، تلاش‌های انجام شده برای اثبات آن‌ها و نیز مسائل باز باقیمانده در مشخصهٔ مخالف دو خواهیم پرداخت. درنهایت، تلاش‌های انجام شده برای تعمیم این حدس‌ها به مشخصهٔ دو و تفاوت‌های نتایج به دست آمده در این مشخصه با سایر مشخصه‌ها نیز مرور می‌شوند.

۱. مقدمه

فرم‌های دوخطی در بسیاری از شاخه‌های ریاضی به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند. در جبرخطی، ضرب نقطه‌ای یا داخلی که به هر دو بردار u و v با درایه‌های متعلق به میدان F، اسکالر $u.v$ در F را نسبت می‌دهد یک فرم دوخطی است. در آنالیز، نگاشتی که به توابع پیوستهٔ f و g، $\int_0^1 f(t)g(t)dt$ را متناظر می‌کند یک فرم دوخطی است. در آمار و احتمال، نگاشتی که به دو متغیر تصادفی کواریانس آنها را نسبت می‌دهد نیز یک فرم دوخطی است.

نظریهٔ جبری و حسابی فرم‌های دوخطی متقارن دارای تاریخی طولانی و باشکوه است. با در نظر گرفتن ارتباط این فرم‌ها و فرم‌های مربعی، این نظریه ریشه در امپراطوری بابل در سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۶۰۰ قبل از میلاد دارد [۱۸]. این نظریه توسط براهماگوپتا[1] در قرن هفتم احیا شد و پس از هزار سال، توسط ریاضیدانان نابغه‌ای چون فرما[2]، اویلر[3]، لاگرانژ[4] و گاوس[5] به خوبی ادامه یافت. نظریهٔ مدرن فرم‌های دوخطی متقارن مرهون تحقیقات ریاضیدانان بزرگی چون مینکوفسکی[6] و هسه[7] است.

نظریهٔ جبری فرم‌های دوخطی متقارن، خواص این فرم‌ها را روی یک میدان دلخواه بررسی می‌کند. در طول تاریخ، این نظریه تا حد زیادی به موازات نظریهٔ فرم‌های مربعی پیشرفت کرده است، چرا که در مشخصهٔ مخالف دو، فرم‌های دوخطی متقارن و مربعی در تناظر یک به یک قرار دارند. نظریهٔ جبری فرم‌های دوخطی متقارن توسط ویت[8] پایه‌ریزی شد، اما مهم‌ترین انقلاب در این عرصه با معرفی فرم‌های فیستر[9] به وجود آمد. این فرم‌ها، فرم‌های دوخطی متقارنی هستند که به حاصل‌ضرب فرم‌های دوتایی که ۱ را نمایش می‌دهند تجزیه می‌شوند. فرم‌های فیستر به‌طور طبیعی در مطالعهٔ جبرهای با بعد کوچک روی میدان F پدیدار می‌شوند: فرم‌های فیستر ۱ـتایی و ۲ـتایی را می‌توان به ترتیب به عنوان فرم نرم جبرهای اِتَل[10] مربعی و جبرهای کواترنیون روی F در نظر گرفت (صفحهٔ ۵۲ از [۱۶] را ببینید). همچنین فرم‌های

عبارات و کلمات کلیدی. فرم دوخطی، فرم فیستر، جبر با برگردان، جبر فیستر، جبر تماماً تجزیه‌پذیر.
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۲۶
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106405.1253

[1]Brahmagupta [2]P. Fermat [3]L. Euler [4]J. L. Lagrange [5]C. F. Gauss [6]H. Minkowski [7]H. Hasse [8]E. Witt [9]A. Pfister
[10]étale

فیستر ۳ـ تایی به عنوان فرم نرم جبر غیرشرکت‌پذیر کیلی[۱۱] ـ دیکسون[۱۲] در مشخصهٔ مخالف دو ظاهر می‌شوند ([۲۶] صفحهٔ ۳۲۵ را ببینید).

نظریهٔ فرم‌های دوخطی ارتباطی نزدیک با نظریهٔ جبرهای با برگردان دارد. با نسبت دادن برگردان الحاقی یک فرم دوخطی به آن، تناظری یک به یک بین ردهٔ تشابه‌های فرم‌های دوخطی روی یک میدان و ردهٔ یکریختی‌های جبرهای شکافته با برگردان روی آن میدان ایجاد می‌شود. با توجه به اینکه فرم‌های فیستر نقشی کلیدی در نظریهٔ فرم‌های دوخطی ایفا می‌کنند، طبیعی است به دنبال جبرهای با برگردانی باشیم که خواصی مشابه با فرم‌های فیستر دارند. در [۴] سه رده از این جبرهای با برگردان در مشخصهٔ مخالف دو معرفی و این سؤال مطرح شده است که آیا این سه رده با هم برابرند؟ این سؤال درواقع تعمیمی از حدس تجزیهٔ فیستر برای جبرهای شکافتهٔ با برگردان است که در [۳۹] بیان شد. هدف از این مقاله بیان این حدس‌ها و مرور نتایج به‌دست آمده و مسائل باز باقیمانده است.

این مقاله را به ۴ بخش تقسیم کرده‌ایم. در بخش دوم، مقدماتی از نظریهٔ فرم‌های دوخطی را بیان می‌کنیم. فرم‌های دوخطی متقارن ارتباط بسیار نزدیکی با فرم‌های مربعی دارند، اما به دلیل رعایت اختصار در مورد فرم‌های مربعی صحبت نمی‌کنیم. در بخش سوم کلیاتی از نظریهٔ برگردان‌ها روی جبرهای سادهٔ مرکزی را بیان خواهیم کرد. در بخش آخر برگردان‌های فیستر را معرفی نموده، به مطالعهٔ حدس‌های مطرح شده در این زمینه و اینکه کدام قسمت از این حدس‌ها حل شده است می‌پردازیم. با توجه به تفاوت‌های نظریهٔ برگردان‌ها و فرم‌های دوخطی در مشخصهٔ دو و مخالف دو این بخش به دو قسمت تقسیم شده است. ابتدا برگردان‌های فیستر در مشخصهٔ مخالف دو را مطالعه می‌کنیم. پس از آن نتایج مشابه را در مشخصهٔ دو بیان خواهیم کرد. همان‌طور که خواهیم دید، تعمیم این حدس‌ها به مشخصهٔ دو با مشکلاتی روبرو است. همچنین در برخی موارد نتایج به دست آمده در این حالت، با نتایج مشخصهٔ مخالف دو اختلافات قابل توجهی دارند.

۲. فرم‌های دوخطی

۱.۲. مفاهیم اولیه. به عنوان یادآوری ابتدا مفهوم یک فرم دوخطی را مرور می‌کنیم. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد. منظور از یک *فرم دوخطی* روی V نگاشتی مانند $\mathfrak{b}: V \times V \to F$ است که به‌ازای هر $u, u', v, v' \in V$ و هر $\lambda \in F$ در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\mathfrak{b}(u+u', v) = \mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(u', v),$$
$$\mathfrak{b}(u, v+v') = \mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(u, v'),$$
$$\mathfrak{b}(\lambda u, v) = \mathfrak{b}(u, \lambda v) = \lambda \mathfrak{b}(u, v).$$

دو ردهٔ مهم از فرم‌های دوخطی، فرم‌های متقارن و پادمتقارن هستند. فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ *متقارن* نامیده می‌شود اگر برای هر $u, v \in V$، $\mathfrak{b}(u, v) = \mathfrak{b}(v, u)$. همچنین $\mathfrak{b}$ *پادمتقارن* نامیده می‌شود اگر برای هر $u, v \in V$، $\mathfrak{b}(u, v) = -\mathfrak{b}(v, u)$. واضح است که اگر مشخصهٔ F برابر دو باشد این دو مفهوم یکی هستند. به‌علاوه اگر F از مشخصهٔ مخالف دو و $\mathfrak{b}$ پادمتقارن باشد، آنگاه تساوی $\mathfrak{b}(v, v) = -\mathfrak{b}(v, v)$ نتیجه می‌دهد به‌ازای هر $v \in V$، $\mathfrak{b}(v, v) = 0$. با استفاده از این خاصیت می‌توان رده‌ای دیگر از فرم‌های دوخطی (در مشخصهٔ دلخواه) را تعریف کرد: فرم $\mathfrak{b}$ را *متناوب* می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $v \in V$، $\mathfrak{b}(v, v) = 0$. در غیر این صورت $\mathfrak{b}$ را *نامتناوب* می‌نامیم. واضح است که فرم‌های دوخطی متناوب و پادمتقارن در مشخصهٔ مخالف دو یکی هستند. اما در مشخصهٔ دو، مفهوم تناوب خاصتر است.

[11] A. Cayley [12] L. E. Dickson

فرم‌های دوخطی روی میدان F در تناظر یک به یک با ماتریس‌های $n\times n$ روی F قرار دارند. در واقع اگر عناصر F^n را به عنوان بردار ستونی درنظر بگیریم، برای هر ماتریس $A\in M_n(F)$، نگاشت $\mathfrak{b}:F^n\times F^n\to F$ با ضابطهٔ $\mathfrak{b}(u,v)=u^tAv$ یک فرم دوخطی است (منظور از u^t، ترانهادهٔ u است). برعکس، فرض کنید $\mathfrak{b}$ یک فرم دوخطی روی V باشد. پایه‌ای مانند $B=\{w_1,\dots,w_n\}$ برای V درنظر گرفته و ماتریس مربعی $(\mathfrak{b}(w_i,w_j))$ از مرتبهٔ n را A بنامید. دراین‌صورت برای هر $u,v\in V$ می‌توان نوشت $u=a_1w_1+\cdots+a_nw_n$ و $v=b_1w_1+\cdots+b_nw_n$ که برای هر i، $a_i,b_i\in F$. حال اگر قرار دهیم

$$[u]=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\quad [v]=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix},$$

آنگاه $\mathfrak{b}(u,v)=[u]^tA[v]$. ماتریس A را *ماتریس گرام*[۱۳] $\mathfrak{b}$ نسبت به پایهٔ B می‌نامیم. این ماتریس با تغییر پایهٔ B تغییر می‌کند: اگر B' پایهٔ دیگری برای V روی F و A' ماتریس متناظر با B' باشد، آنگاه ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $A'=P^tAP$.

با توجه به این تناظر، فرم‌های دوخطی متقارن (پادمتقارن، متناوب) فرمهایی هستند که ماتریس گرام آنها نسبت به هر پایهٔ V، متقارن (پادمتقارن، متناوب) است. به‌علاوه با توجه به اهمیت ماتریس‌های وارون‌پذیر می‌توان متناظر با این ماتریس‌ها، یک رده از فرم‌های دوخطی را تعریف کرد: فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ روی V *ناتبهگون* نامیده می‌شود هرگاه ماتریس گرام آن وارون‌پذیر باشد. اگر $\mathfrak{b}$ ناتبهگون باشد، $(V,\mathfrak{b})$ را یک *فضای دوخطی* می‌نامیم.

با استفاده از مجموع متعامد و حاصل‌ضرب تانسوری فرم‌های دوخطی می‌توان فرمهایی با بعد بیشتر ساخت: منظور از *مجموع متعامد* دو فضای دوخطی $(V_1,\mathfrak{b}_1)$ و $(V_2,\mathfrak{b}_2)$ که با نماد $(V_1\perp V_2,\mathfrak{b}_1\perp\mathfrak{b}_2)$ نمایش داده می‌شود یک فضای دوخطی است که در آن $V_1\perp V_2=V_1\oplus V_2$ و به‌ازای هر $u_1,v_1\in V_1$ و $u_2,v_2\in V_2$،

$$(\mathfrak{b}_1\perp\mathfrak{b}_2)((u_1,u_2),(v_1,v_2))=\mathfrak{b}_1(u_1,v_1)+\mathfrak{b}_2(u_2,v_2).$$

مجموع متعامد فرم‌های دوخطی متناظر با مجموع مستقیم ماتریس‌هاست. به بیان دقیقتر، اگر A_1 و A_2 به ترتیب ماتریس متناظر با فرم‌های $\mathfrak{b}_1$ و $\mathfrak{b}_2$ نسبت به پایه‌های $\{u_1,\dots,u_n\}$ و $\{v_1,\dots,v_m\}$ باشند آنگاه ماتریس $\mathfrak{b}_1\perp\mathfrak{b}_2$ نسبت به پایهٔ

$$\{(u_1,0),\dots,(u_n,0),(0,v_1),\dots,(0,v_m)\},$$

برابر با جمع مستقیم A_1 و A_2، یعنی ماتریس بلوکی $\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$ است.

اگر $\mathfrak{b}_1$ و $\mathfrak{b}_2$ دو فرم دوخطی روی فضاهای برداری V_1 و V_2 باشند، *حاصل‌ضرب تانسوری* آنها که با $\mathfrak{b}_1\otimes\mathfrak{b}_2$ نمایش داده می‌شود یک فرم دوخطی روی $V_1\otimes V_2$ است که توسط رابطهٔ

$$(\mathfrak{b}_1\otimes\mathfrak{b}_2)(u_1\otimes u_2,v_1\otimes v_2):=\mathfrak{b}_1(u_1,v_1)\mathfrak{b}_2(u_2,v_2),\quad u_1,v_1\in V_1,\ u_2,v_2\in V_2,$$

القاء می‌شود. حاصل‌ضرب تانسوری فرم‌های دوخطی، متناظر با حاصل‌ضرب تانسوری یا کرونکر[۱۴] ماتریس‌هاست، بدین معنی که ماتریس گرام $\mathfrak{b}_1\otimes\mathfrak{b}_2$ نسبت به یک پایهٔ مناسب، برابر با حاصل‌ضرب تانسوری ماتریس‌های گرام $\mathfrak{b}_1$ و $\mathfrak{b}_2$ است.

[13] J. P. Gram [14] L. Kronecker

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106405.1253

۲.۲. رده‌بندی فرم‌های دوخطی متقارن. نظریهٔ جبری فرم‌های دوخطی متقارن توسط ویت پایه‌ریزی شد. در [۴۲] وی توانست این فرم‌ها را در مشخصهٔ مخالف دو به طور کامل رده‌بندی کند. رده‌بندی فرم‌های دوخطی به معنی تعیین شرایطی است که تحت آنها دو فضای دوخطی $(V_1, \mathfrak{b}_1)$ و $(V_2, \mathfrak{b}_2)$ با هم *ایزومتر*[۱۵] هستند، یعنی یک یکریختی فضاهای برداری مانند $\tau : V_1 \to V_2$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $u, v \in V_1$، $\mathfrak{b}_2(\tau(u), \tau(v)) = \mathfrak{b}_1(u, v)$. پیش از ویت، نتایجی در مورد رده‌بندی فرم‌های دوخطی روی میدان اعداد گویا و میدان‌های متناهی توسط مینکوفسکی و دیکسون به دست آمده بود (مراجع [۲۹]، [۳۰] و [۱۰] را ببینید). رده‌بندی ویت از فرم‌های دوخطی، بر اساس تجزیه‌ای از این فرم‌ها به فرم‌های آنیزوتروپ[۱۶] و هذلولوی[۱۷] بیان شد. فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ روی فضای برداری V *ایزوتروپ*[۱۸] نامیده می‌شود هرگاه بردار ناصفر $v \in V$ موجود باشد که $\mathfrak{b}(v, v) = 0$. در غیر این‌صورت $\mathfrak{b}$ را *آنیزوتروپ* می‌نامیم. هر فرم دوخطی دوبعدی که ماتریس گرام آن نسبت به پایه‌ای مناسب به شکل $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ باشد را یک *صفحهٔ هذلولوی* می‌نامیم. فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ *هذلولوی* نامیده می‌شود اگر مجموع متعامدی از صفحات هذلولوی باشد. طبق قضیهٔ تجزیهٔ ویت هر فرم دوخطی متقارن در مشخصهٔ مخالف دو را می‌توان به صورت مجموع متعامدی از یک فرم صفر (یعنی فرمی که مقدار آن به‌ازای هر دو بردار برابر صفر است)، یک فرم آنیزوتروپ و یک فرم هذلولوی تجزیه کرد.

مطالعهٔ فرم‌های دوخطی متقارن روی میدان‌های از مشخصهٔ دو سال‌ها بعد توسط کنبوش[۱۹] آغاز شد. وی مفهوم فرم‌های متابولیک[۲۰] را برای رده‌بندی فرم‌های دوخطی در مشخصهٔ دو معرفی کرد: فرم دوخطی متقارن $\mathfrak{b}$ را *متابولیک* گوییم هرگاه زیرفضای $W \subseteq V$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\dim W = \frac{1}{2}\dim V$ و $\mathfrak{b}|_{W\times W} = 0$. به سادگی می‌توان دید مفاهیم متابولیک و هذلولوی بودن در مشخصهٔ مخالف دو هم‌ارز هستند، اما در مشخصهٔ دو مفهوم متابولیک بودن ضعیفتر است. کنبوش در [۲۳] نشان داد تجزیهٔ ویت برای فرم‌های دوخطی متقارن در مشخصهٔ دو نیز با جایگذاری شرط متابولیک بودن به جای هذلولوی بودن برقرار است.

۳.۲. فرم‌های فیستر. پس از مقالهٔ ویت، تا سال ۱۹۶۰ نظریهٔ جبری فرم‌های دوخطی متقارن پیشرفت چندانی نداشت تا اینکه مطالعات کسلز[۲۱] و در پی آن فیستر آغاز شد. در آن زمان همچنان فرم‌های دوخطی در مشخصهٔ مخالف دو بررسی می‌شدند. فیستر دو نگرش را برای مطالعهٔ فرم‌های دوخطی متقارن به کار برد، نگرش جبری و نگرش هندسهٔ جبری. مهم‌ترین دستاورد فیستر، معرفی رده‌ای از فرم‌ها در [۳۳] بود که اکنون به نام فرم‌های فیستر شناخته می‌شوند. وی نشان داد مجموعهٔ عناصر ناصفری که این فرم‌ها نمایش می‌دهند تشکیل یک زیرگروه ضربی از میدان زمینه را می‌دهد و از این نکته برای مطالعهٔ مجموع مربعات کامل در میدان‌های از مشخصهٔ مخالف دو استفاده کرد. به‌ویژه وی نشان داد کوچکترین عدد مانند s در یک میدان F که بتوان -1 را به‌صورت مجموع s مربع کامل نوشت (درصورت وجود) توانی از ۲ است. این مسأله بیش از ۳۵ سال به عنوان یک مسألهٔ باز مطرح بود [۳۷].

فرم‌های فیستر بر پایهٔ مفهوم حاصل‌ضرب تانسوری فرم‌های قطری‌پذیر تعریف می‌شوند: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F از مشخصهٔ دلخواه باشد. فرم دوخطی متقارن $\mathfrak{b}$ روی V *قطری‌پذیر* نامیده می‌شود هرگاه ماتریس گرام آن نسبت به پایه‌ای مناسب قطری باشد؛ یعنی پایه‌ای مانند $\{v_1, \ldots, v_n\}$ برای V وجود داشته باشد که به‌ازای هر $i \neq j$، $\mathfrak{b}(v_i, v_j) = 0$. در این حالت فرم $\mathfrak{b}$ را با نماد $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$ نمایش می‌دهیم که در آن به‌ازای هر i، $\beta_i = \mathfrak{b}(v_i, v_i) \in F$. اکنون برای عناصر ناصفر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$، فرم دوخطی 2^nـ بعدی

$$\langle 1, \alpha_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, \alpha_n \rangle,$$

روی F را یک *فرم فیستر* nـ *تایی* نامیده و آن را با نماد $\langle\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle\rangle$ نمایش می‌دهیم. یکی از مهم‌ترین خواص فرم‌های فیستر این است که هر فرم فیستر ایزوتروپ در مشخصهٔ مخالف دو هذلولوی است [۳۴]. این مطلب در مشخصهٔ دو

[15] isometric [16] anisotropic [17] hyperbolic [18] isotropic [19] M. Knebusch [20] metabolic [21] J. W. R. Cassels

نیز با جایگزینی شرط متابولیک بودن به جای هذلولوی بودن برقرار است (گزارهٔ ۶.۳ از [۱۶] را ببینید). بنابراین هر فرم دوخطی فیستر ایزوتروپ (در مشخصهٔ دلخواه)، متابولیک است.

۴.۲. کاربردهایی در نظریهٔ اعداد. از جمله مسائل کلاسیک نظریهٔ اعداد که ارتباط نزدیکی با فرم‌های مربعی و دوخطی دارد، نمایش اعداد صحیح به صورت مجموع مربعات کامل است. نخستین مورد قضیه‌ای است منسوب به فرما که بیان می‌کند عدد اول p را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت اگر و تنها اگر به پیمانهٔ ۴ با ۱ همنهشت باشد. نخستین کسی که این مطلب را اثبات نمود گیراد[22] بود. وی در سال ۱۶۲۵ همهٔ اعداد طبیعی که قابل نمایش به صورت مجموع دو مربع کامل هستند را شناسایی کرد (صفحهٔ ۲۲۷ از [۱۱] را ببینید). اثبات‌های زیاد دیگری برای این قضیه وجود دارد که از جملهٔ آنها می‌توان به اثبات لاگرانژ با استفاده از نظریهٔ فرم‌های مربعی صحیح اشاره نمود (صفحهٔ ۱۵ از [۱۱] را ببینید).

قضیه‌ای دیگر به نام قضیهٔ سه مربع لژاندر[23] بیان می‌کند که عدد طبیعی n را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت اگر و تنها اگر n به شکل $۴^a(۸b+۷)$ نباشد که در آن a و b اعداد طبیعی هستند. برای این قضیه نیز اثباتهای بسیاری وجود دارد که از جملهٔ آنها می‌توان به اثباتی کلاسیک منسوب به دیریکله[24] اشاره نمود (بخش اول از مرجع [۲۷] را ببینید). این اثبات بر پایهٔ قانون تقابل مربعی، قضیهٔ دیریکله در باب تصاعدهای حسابی و نیز ردهٔ ایزومتری فرم‌های مربعی سه‌تایی قرار دارد.

در نهایت قضیهٔ چهار مربع منسوب به لاگرانژ بیان می‌کند که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چهار مربع کامل نوشت. این قضیه نخستین بار توسط لاگرانژ در سال ۱۷۷۰ اثبات شد (بخش ۷ از فصل هفدهم از [۲۰] را ببینید). از جمله اثبات‌های دیگر برای این قضیه می‌توان به اثبات با استفاده از چهارگان‌های هرویتز[25] اشاره نمود که توسط یک فرم فیستر دوتایی به نام فرم نُرم انجام می‌شود.

۳. جبرهای سادهٔ مرکزی دارای برگردان

۱.۳. جبرهای سادهٔ مرکزی. یک جبر (شرکت‌پذیر) روی میدان F، حلقه‌ای یکدار مانند A است که یک فضای برداری روی F تشکیل داده و برای هر $a \in F$ و هر $x, y \in A$ رابطهٔ $a(xy) = (ax)y = x(ay)$ برقرار است. به عنوان مثال، مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های متعلق به میدان F یک جبر روی F است. مثال دیگر، جبر *کواترنیون‌ها* یا *چهارگان‌های حقیقی* است که توسط همیلتون[26] ساخته شد. این جبر یک جبر چهار بُعدی روی میدان اعداد حقیقی با پایهٔ $\{۱, i, j, k\}$ است که در روابط $i^۲ = -۱$، $j^۲ = -۱$ و $ij = -ji = k$ صدق می‌کند. جبر کواترنیون‌های حقیقی درواقع یک جبر *تقسیم* است، یعنی هر عنصر ناصفر آن وارون‌پذیر است.

در سال ۱۸۹۳ مولین[27] با الهام گرفتن از گروه‌های ساده، مفهوم *جبرهای ساده* (روی میدان اعداد مختلط) را به عنوان جبرهایی که ایدآل دوطرفهٔ سره ندارند، معرفی کرد. وی ثابت کرد هر جبر ساده با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط با جبر ماتریس‌های $n \times n$ مختلط یکریخت است [۳۱]. کمی بعد کارتان[28] [۹] این نتیجه را با روشی واضحتر و دقیقتر بیان نمود. در سال ۱۹۰۷ ودربرن[29] این مطلب را به جبرهای ساده روی میدان دلخواه تعمیم داد و ثابت کرد که هر جبر ساده با بعد متناهی یک جبر ماتریسی روی یک حلقهٔ تقسیم است.

ردهٔ مهمی از جبرها روی میدان F، *جبرهای سادهٔ مرکزی* هستند، یعنی جبرهای ساده‌ای با بعد متناهی که مرکز آنها برابر با F است. جبر کواترنیون‌های حقیقی درواقع مثالی از یک جبر سادهٔ مرکزی روی $\mathbb{R}$ است. مفهوم جبر کواترنیون را می‌توان برای میدان دلخواه F نیز تعریف کرد: یک جبر *کواترنیون* روی میدان F یک جبر سادهٔ مرکزی چهار بُعدی

[22] A. Girad [23] A.-M. Legendre [24] A.-M. Legendre [25] A. Hurwitz [26] W. R. Hamilton [27] T. Molien [28] E. Cartan [29] J. H. M. Wedderburn

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106405.1253

است. هر جبر کواترنیون روی F پایه‌ای به شکل $\{۱, u, v, w\}$ دارد که در روابط زیر صدق می‌کند:

$$u^۲ = u + a, \quad v^۲ = b, \quad w = uv = v - vu,$$

که در آن $a \in F$ عنصری با شرط $۱ - ۴a \neq$ و $b \in F$ عنصری ناصفر است (قضیهٔ ۲۶ از فصل نهم [۱] را ببینید).

اگر D یک حلقهٔ تقسیم متناهی البعد با مرکز F باشد آنگاه حلقهٔ $M_n(D)$ متشکل از همهٔ ماتریس‌های $n\times n$ روی D یک جبر سادهٔ مرکزی روی F است. چنانچه بیان شد، بنابر قضیهٔ ودربرن، عکس این موضوع نیز صحیح است، یعنی هر جبر سادهٔ مرکزی به شکل $M_n(D)$ است که در آن D یک حلقهٔ تقسیم است. از قضیهٔ ودربرن می‌توان نتیجه گرفت به‌ازای هر جبر سادهٔ مرکزی روی میدان F، گسترشی مانند K از F وجود دارد که $A\otimes K$ *شکافته* شود، یعنی $A\otimes K \simeq M_n(K)$ که در آن n یک عدد طبیعی است (قضیهٔ ۱ از فصل ۹ مرجع [۱۴] را ببینید). در این حالت K را یک *میدان شکافنده* برای F و عدد n را درجهٔ A می‌نامیم.

در پیشبرد نظریهٔ جبرهای شرکت‌پذیر ریاضی‌دانان بزرگ دیگری نیز نقش داشته‌اند که از مهمترین آن‌ها می‌توان دیکسون، هسه، آلبرت[۳۰]، جیکوبسن[۳۱] و نوتر[۳۲] را نام برد. براور[۳۳] در [۸] یک رابطهٔ هم‌ارزی روی جبرهای سادهٔ مرکزی به شکل زیر تعریف کرد و نشان داد رده‌های هم‌ارزی این رابطه تحت عمل ضرب تانسوری یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند که به *گروه براور* معروف است: دو جبر سادهٔ مرکزی A و B روی میدان F *هم‌ارز براور* نامیده می‌شوند هرگاه اعداد صحیح مثبت s و t وجود داشته باشند که $A \otimes M_s(F) \simeq B \otimes M_t(F)$. لازم به ذکر است که گروه براور یک میدان، ناوردایی بسیار مهم از آن است و ارتباطی نزدیک با کوهمولوژی گالوا دارد (صفحهٔ ۵۷ از [۱۴] را ببینید).

۲.۳. برگردان روی جبرهای سادهٔ مرکزی. واژهٔ برگردان در شاخه‌های مختلفی از ریاضیات ظاهر می‌شود. یک *برگردان* روی Fـ جبر سادهٔ مرکزی A نگاشتی است مانند $\sigma : A \to A$ که در شرایط زیر صدق می‌کند.

(الف) به‌ازای هر $x, y \in A$، $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$؛

(ب) به‌ازای هر $x, y \in A$، $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$؛

(پ) به‌ازای هر $x \in A$، $\sigma^۲(x) = x$.

توجه کنید که لزومی ندارد σ یک نگاشت Fـ خطی باشد. اما به سادگی می‌توان دید که F تحت σ پایاست. بنابراین تحدید σ به F یک خودریختی F خواهد بود که برابر با همانی یا از مرتبهٔ دو است. اگر $\sigma|_F = \mathrm{id}$، برگردان σ را از *نوع اول* و در غیر این صورت آن را از *نوع دوم* می‌نامیم.

به‌عنوان ساده‌ترین مثال از برگردان، می‌توان از برگردان ترانهاده روی $M_n(F)$ نام برد، یعنی نگاشتی که به هر ماتریس $A \in M_n(F)$ ترانهادهٔ آن را نسبت می‌دهد. به عنوان یک مثال دیگر می‌توان از برگردان کانونی[۳۴] روی جبر کواترنیون Q نام برد. اگر $\{۱, u, v, w\}$ پایهٔ ذکر شده برای Q در صفحهٔ ۷۲ باشد، نگاشت Fـ خطی $\gamma : Q \to Q$ که از روابط $\gamma(u) = ۱ - u$ و $\gamma(v) = -v$ القاء می‌شود یک برگردان نوع اول است که *برگردان کانونی* Q نامیده می‌شود. در حالت خاص اگر Q شکافته شود، یعنی $Q \simeq M_۲(F)$ آنگاه ضابطهٔ این برگردان به شکل $\gamma\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ است. با استفاده از تانسور جبرهای با برگردان می‌توان جبرهای با برگردان از درجهٔ بزرگتری ساخت: فرض کنید (A, σ) و (B, τ) دو جبر با برگردان روی میدان F باشند. نگاشت $a \otimes b \mapsto \sigma(a) \otimes \tau(b)$ یک برگردان روی $A \otimes B$ القاء می‌کند که آن را با $\sigma \otimes \tau$ نمایش می‌دهیم.

نخستین مطالعهٔ جدی درمورد برگردان‌ها روی جبرهای سادهٔ مرکزی در کتاب کلاسیک آرتین [۲] در رابطه با ماتریس‌های ریمان[۳۵] انجام شد (صفحهٔ ۶۷ از [۲۴] را ببینید). بعدها آلبرت نظریهٔ جبرهای سادهٔ مرکزی با برگردان را پایه‌ریزی کرد. وی یک رده‌بندی کامل از جبرهای سادهٔ مرکزی با برگردان روی $\mathbb{Q}$ و نیز قضایای پایه‌ای وجود برگردان‌ها

[30] A. Albert [31] N. Jacobson [32] E. Noether [33] R. Brauer [34] canonical [35] B. Riemann

را بیان نمود. این قضایا توسط ریم[36] [۳۵] و شارلائو[37] [۳۶] به زبانی ساده‌تر بیان و تعمیم داده شدند و پس از آن نظریهٔ برگردان‌ها به شاخه‌ای وسیع در جبر تبدیل شد. به عنوان یک مرجع کامل برای مطالعهٔ برگردان روی جبرها می‌توان از [۲۴] نام برد.

نظریهٔ جبرهای سادهٔ مرکزی با برگردان نوع اول در واقع تعمیمی از نظریهٔ فرم‌های دوخطی است. هر فضای دوخطی متقارن یا متناوب $(V, \mathfrak{b})$ روی میدان F، برگردان یکتایی مانند $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}$ روی $\mathrm{End}_F(V)$، یعنی حلقهٔ همهٔ تبدیلات خطی از V به V، القاء می‌کند به‌طوری‌که به‌ازای هر $x, y \in V$ و هر $f \in \mathrm{End}_F(V)$، $\mathfrak{b}(x, f(y)) = \mathfrak{b}(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}(f)(x), y)$. برگردان $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}$ را *برگردان الحاقی* $\mathrm{End}_F(V)$ نسبت به $\mathfrak{b}$ می‌نامیم. به سادگی می‌توان نشان داد عکس این موضوع نیز صحیح است؛ یعنی به‌ازای هر برگردان نوع اول مانند σ روی $\mathrm{End}_F(V)$، فرم دوخطی ناتبهگون متقارن یا متناوب $\mathfrak{b}$ روی V وجود دارد به‌طوری‌که

$$(\mathrm{End}_F(V), \sigma) \simeq (\mathrm{End}_F(V), \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}) \tag{۱}$$

(صفحهٔ ۱ از [۲۴] را ببینید). توجه کنید که نماد $\simeq$ در (۱) معرف یکریختی جبرهای با برگردان است که در حالت کلی به این شکل تعریف می‌شود: یک یکریختی بین دو جبر سادهٔ مرکزی با برگردان (A, σ) و (A', σ') روی F که با $(A, \sigma) \simeq (A', \sigma')$ نمایش داده می‌شود یک یکریختی Fـ جبری $f : A \to A'$ است به‌طوری‌که $\sigma' \circ f = f \circ \sigma$.

اگر K گسترشی از میدان F باشد، هر برگردان نوع اول σ روی A را می‌توان به یک برگردان نوع اول $\sigma_K := \sigma \otimes \mathrm{id}$ روی $A_K := A \otimes K$ گسترش داد (برای سادگی به‌جای (A_K, σ_K) می‌نویسیم $(A, \sigma)_K$). فرض کنید K یک میدان شکافندهٔ A باشد. بنابراین فضای برداری V روی K وجود دارد که $A_K \simeq \mathrm{End}_K(V)$، یعنی σ_K را می‌توان به عنوان یک برگردان روی $\mathrm{End}_K(V)$ درنظر گرفت. طبق آنچه بیان شد فرم دوخطی ناتبهگون متقارن یا متناوب $\mathfrak{b}$ روی V وجود دارد که $(\mathrm{End}_K(V), \sigma_K) \simeq (\mathrm{End}_K(V), \sigma_{\mathfrak{b}})$. برگردان σ *همتافته* نامیده می‌شود هرگاه فرم دوخطی $\mathfrak{b}$ متناوب باشد. درغیر این صورت σ را *متعامد* می‌نامیم. توجه کنید که بنابر [۲۴، (۲.۱)]، تعریف ذکر شده مستقل از انتخاب میدان شکافندهٔ K برای A است. همچنین به عنوان مثال‌هایی ساده از برگردان همتافته و متعامد می‌توان به‌ترتیب برگردان کانونی روی جبر کواترنیون‌ها و ترانهاده روی جبر ماتریس‌ها را نام برد.

با توجه به ارتباط بین فرم‌های دوخطی و جبرهای با برگردان، در [۳] مفاهیم ایزوتروپ و هذلولوی بودن برای جبرها به شکل زیر تعریف شدند: فرض کنید (A, σ) یک جبر سادهٔ مرکزی با برگردان روی میدان F باشد. جبر (A, σ) (یا برای سادگی برگردان σ) را *ایزوتروپ* نامیم هرگاه عنصر ناصفر $a \in A$ وجود داشته باشد که $\sigma(a)a = ۰$. در غیر این صورت (A, σ) را *آنیزوتروپ* می‌نامیم. عنصر $e \in A$ را *خودتوان* می‌نامیم هرگاه $e^۲ = e$. عنصر خودتوان $e \in A$ نسبت به σ *هذلولوی* نامیده می‌شود، اگر $\sigma(e) = ۱ - e$. جبر (A, σ) (یا برگردان σ) *هذلولوی* نامیده می‌شود اگر A شامل یک خودتوان هذلولوی نسبت به σ باشد.

قضیهٔ زیر انتظار ما را از این تعاریف برآورده می‌کند.

قضیه ۱.۳. [۲۴، (۶.۷)] *فرض کنید $(V, \mathfrak{b})$ یک فضای دوخطی متقارن روی میدان F باشد. در این صورت $\mathfrak{b}$ ایزوتروپ (هذلولوی) است اگر و تنها اگر $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}$ ایزوتروپ (هذلولوی) باشد.*

۴. برگردان‌های فیستر

۱.۴. مشخصهٔ مخالف دو. در این بخش تمامی میدان‌ها از مشخصهٔ مخالف دو فرض می‌شوند.

چنانچه پیش از این بیان شد، نظریهٔ جبرهای سادهٔ مرکزی با برگردان به صورت طبیعی به عنوان تعمیمی از نظریهٔ فرم‌های دوخطی ظاهر می‌شود. به همین دلیل تلاش برای یافتن نتایج متناظر با رده‌بندی فرم‌های دوخطی طبیعی به‌نظر

[36] C. Riehm [37] W. Scharlau

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106405.1253

می‌رسد. این تلاش‌ها با نگرش‌های متفاوتی انجام شده است. با توجه به اهمیت جبرهای کواترنیون (و در حالت کلی حاصل‌ضرب‌های تانسوری آنها) و تناظر بین جبرهای شکافته با برگردان و فرم‌های دوخطی، شاپیرو[۳۸] در فصل ۹ از [۳۹] حدس زیر را مطرح کرد:

حدس ۱.۴. *در رستهٔ جبرهای با برگردان، گیریم $(A,\sigma)\simeq(Q_1,\sigma_1)\otimes\cdots\otimes(Q_n,\sigma_n)$ که در آن هر (Q_i,σ_i) یک جبر کواترنیون با برگردان است. اگر A شکافته شود، آنگاه تجزیه‌ای به شکل*

$$(A,\sigma)\simeq(Q'_1,\sigma'_1)\otimes\cdots\otimes(Q'_n,\sigma'_n),$$

از (A,σ) وجود دارد که در آن هر (Q'_i,σ'_i) یک جبر کواترنیون شکافته شدهٔ با برگردان است.

اگر σ همتافته باشد، اثباتی ساده برای این حدس با استفاده از [۲۴، (۱۲.۳۵)] وجود دارد. اما برای برگردان‌های متعامد چنین نیست و چنانچه خواهیم دید مدت زیادی طول کشید تا اثباتی برای این حالت پیدا شود.

شاپیرو همچنین حدس دیگری را مطرح کرد و آن را حدس تجزیهٔ فیستر نامید. حدس تجزیهٔ فیستر یک رده‌بندی از فرم‌های فیستر nـ‌تایی برحسب وجود فضاهای برداری با بعد بیشینه در گروه تشابه‌های این فرم‌ها به دست می‌دهد ([۳۹، (۲.۱۷)] را ببینید). در فصل ۹ از [۳۹] نشان داده شد حدس تجزیهٔ فیستر با حدس ۱.۴ معادل است. همچنین حدس تجزیهٔ فیستر برای $n\leqslant 5$ در همین فصل ثابت شد. البته صورت‌هایی از این حدس قبل از این نیز به‌طور ضمنی بیان شده بودند. به عنوان مثال [۴۱] و مسألهٔ هرویتز در باب ترکیب فرم‌های مربعی [۴۳] را ببینید.

افراد زیادی حدس تجزیهٔ فیستر را چه در همین صورت، چه در صورت‌های معادل آن مطالعه کرده‌اند. در مراجع [۴]، [۳۸] و [۴۰] اثباتی دیگر برای $n\leqslant 5$ ارائه شد. در [۴] حدس تجزیهٔ فیستر برای برگردان‌های متعامد به حدسی قویتر تعمیم داده شد که در ادامه به آن می‌پردازیم.

فرض کنید (A,σ) یک جبر سادهٔ مرکزی با برگردان متعامد روی میدان F از مشخصهٔ مخالف دو باشد. زوج (A,σ) را یک جبر *فیستر* می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر میدان شکافندهٔ K/F، $(A,\sigma)_K$ با یک فرم فیستر الحاقی باشد، یعنی فرم فیستر $\mathfrak{b}$ روی Kـ فضای برداری V وجود داشته باشد که $(A,\sigma)_K\simeq(\mathrm{End}_K(V),\mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}})$. دقت کنید که اگر (A,σ) یک جبر فیستر باشد آنگاه درجهٔ A روی F توانی از دو است. به‌علاوه با توجه به اینکه هر فرم فیستر ایزوتروپ در مشخصهٔ مخالف دو هذلولوی است، اگر (A,σ) یک جبر فیستر باشد به‌ازای هر میدان شکافندهٔ K از A برگردان σ_K آنیزوتروپ یا هذلولوی است (قضیهٔ ۱.۳ را ببینید).

از طرفی هر جبر کواترنیون با برگردان متعامد یک جبر فیستر است، زیرا هر فرم دوخطی دو بُعدی با یک فرم فیستر متشابه است. از آنجا که فرم‌های فیستر به حاصل‌ضرب فرم‌های دوخطی دوبعدی تجزیه می‌شوند، رده‌ای دیگر از جبرهای با برگردان را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

تعریف ۲.۴. *جبر با برگردان (A,σ) را یک جبر تماماً تجزیه‌پذیر می‌نامیم، هرگاه به‌صورت حاصل‌ضرب تانسوری جبرهای کواترنیون با برگردان تجزیه شود.*

با توجه به مطالب بالا، در [۴] حدسی به شکل زیر مطرح شد:

حدس ۳.۴. *فرض کنید (A,σ) یک جبر سادهٔ مرکزی از درجهٔ 2^n با برگردان متعامد روی میدان F از مشخصهٔ مخالف دو باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) (A,σ) *یک جبر فیستر است؛*

(۲) (A,σ) *تماماً تجزیه‌پذیر است؛*

[38] D. B. Shapiro

(۳) *به‌ازای هر گسترش میدانی K/F، برگردان σ_K آنیزوتروپ یا هذلولوی است.*

این حدس برای حالت $n \leqslant 3$ در گزارهٔ ۲.۱۵ از [۴] ثابت شد. همچنین واضح است که استلزام (۱) $\Rightarrow$ (۲) حدس ۳.۴ از حدس تجزیهٔ فیستر نتیجه می‌شود. بنابراین این حدس را می‌توان به نوعی تعمیم حدس تجزیهٔ فیستر (در مشخصهٔ مخالف دو) دانست.

تلاش‌ها برای اثبات حدس تجزیهٔ فیستر ادامه داشت و حالات خاصی از این حدس در مراجع [۱۹] و [۲۲] به اثبات رسید. اثباتی برای حالت $n = 6$ نیز در [۱۷] بیان شد. در نهایت این حدس در [۵] توسط بشی‌یر[39] ثابت شد.

با اثبات حدس تجزیهٔ فیستر، استلزام (۱) $\Rightarrow$ (۲) از حدس ۳.۴ ثابت می‌شود. همچنین حدس ۳.۴ برای حالتی که A شکافته می‌شود نیز از حدس تجزیهٔ فیستر نتیجه می‌شود. در [۲۲] قضیه‌ای به شکل زیر ثابت شد که با استفاده از آن و حدس تجزیهٔ فیستر می‌توان استلزام (۳) $\Rightarrow$ (۲) و هم‌ارزی (۳) $\Leftrightarrow$ (۱) از حدس ۳.۴ را ثابت کرد ([۷، (۳.۲)] را نیز ببینید).

قضیه ۴.۴. *فرض کنید A یک جبر سادهٔ مرکزی روی میدان F و σ یک جبر برگردان متعامد روی A باشد. اگر σ هذلولوی نباشد، آنگاه میدان شکافنده‌ای مانند K از F وجود دارد به‌طوری‌که σ_K هذلولوی نیست.*

اما استلزام‌های (۲) $\Rightarrow$ (۱) و (۲) $\Rightarrow$ (۳) در حالت کلی (برای $n \geqslant 4$) مسألهٔ باز هستند.

۲.۴. مشخصهٔ دو. پیش از آنکه شاپیرو حدس تجزیهٔ فیستر را بیان کند، صورت مشابهی از این حدس درمشخصهٔ دو برای $n \leqslant 3$ در [۲۱] ثابت شده بود ([۱۵] را نیز ببینید). حدس ۱.۴ را می‌توان به همین شکل برای مشخصهٔ دو نیز مطرح کرد. در حالتی که σ همتافته باشد، مانند مشخصهٔ مخالف دو، این حدس به سادگی ثابت می‌شود. پس از اثبات حدس تجزیهٔ فیستر در مشخصهٔ مخالف دو، تلاش‌هایی برای اثبات این حدس در مشخصهٔ دو برای برگردان‌های متعامد نیز انجام و این حدس در [۲۸] اثبات شد. اندکی بعد اثبات دیگری نیز توسط دلفین[40] در [۱۲] ارائه شد.

در کنار حدس ۱.۴ می‌توان صورت مشابهی برای حدس ۳.۴ در مشخصهٔ دو نیز بیان کرد. در واقع شرط‌های (۱) و (۲) از این حدس را می‌توان بدون تغییر برای برگردان‌های متعامد در مشخصهٔ دو نیز بیان کرد. اما شرط (۳) برای برگردان‌های متعامد در مشخصهٔ دو بی‌معنی است، زیرا برگردان‌های متعامد در مشخصهٔ دو نمی‌توانند هذلولوی باشند. درواقع اگر σ یک برگردان هذلولوی در مشخصهٔ دو باشد، آنگاه تساوی $\sigma(e) = 1 - e$ به همراه [۲۴، (۲.۶)] نشان می‌دهد برگردان σ لزوماً همتافته است.

با توجه به اینکه فرم‌های فیستر ایزوتروپ در مشخصهٔ مخالف دو هذلولوی و در مشخصهٔ دو متابولیک هستند، طبیعی است به دنبال شرط ضعیفتری از هذلولوی بودن برای برگردان‌های متعامد در مشخصهٔ دو باشیم که به نوعی متناظر با فرم‌های دوخطی متابولیک باشد. در این راستا در [۶] برگردان‌های متابولیک به شکل زیر تعریف شدند:

فرض کنید (A,σ) یک جبر سادهٔ مرکزی با برگردان روی میدان F باشد. خودتوان $e \in A$ نسبت به σ *متابولیک* نامیده می‌شود هرگاه $\sigma(e)e = 0$ و $\dim_F eA = \frac{1}{2}\dim_F A$. جبر (A,σ) (یا برگردان σ) *متابولیک* نامیده می‌شود هرگاه A شامل یک خودتوان متابولیک نسبت به σ باشد.

خواص بیشتر برگردان‌های متابولیک در [۱۳] بررسی شدند. قضیهٔ زیر انتظار اولیهٔ ما را از برگردان‌های متابولیک برآورده می‌کند (با قضیهٔ ۱.۳ مقایسه کنید).

قضیه ۵.۴. [۱۳، (۴.۸)] *فرض کنید $(V,\mathfrak{b})$ یک فضای دوخطی متقارن روی میدان F باشد. در این صورت $\mathfrak{b}$ متابولیک است اگر و تنها اگر $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}$ متابولیک باشد.*

[39] K. J. Becher [40] A. Dolphin

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106405.1253

همچنین قضیهٔ زیر ارتباط بین برگردان‌های هذلولوی و متابولیک را بیان می‌کند.

قضیه ۶.۴. [۴، (A.۳)] و [۱۳، (۴.۱۰)] *فرض کنید (A,σ) یک جبر سادهٔ مرکزی با برگردان روی میدان F باشد.*

(الف) *اگر σ هذلولوی باشد آنگاه متابولیک نیز است؛*

(ب) *اگر σ همتافته یا از نوع دوم باشد آنگاه σ متابولیک است اگر و تنها اگر هذلولوی باشد؛*

(پ) *اگر $\mathrm{char}F \neq ۲$، برگردان σ متابولیک است اگر و تنها اگر هذلولوی باشد.*

با توجه به قضیهٔ بالا، اگر (A,σ) متابولیک و غیرهذلولوی باشد، آنگاه $\mathrm{char}F = ۲$ و σ متعامد است و این دقیقاً همان حالتی است که در حال بررسی آن هستیم.

با این تفاسیر می‌توان در قسمت سوم از صورت حدس ۳.۴ شرط متابولیک بودن را به جای هذلولوی بودن به کار برد. اما مثال ۹.۴ از [۱۳] نشان می‌دهد که جبر با برگردان (A,σ) روی میدان F از مشخصهٔ دو وجود دارد که خود تماماً تجزیه‌پذیر نیست، اما روی هر میدان شکافندهٔ A تماماً تجزیه‌پذیر است. این مثال نشان می‌دهد که شرط (۱) از حدس ۳.۴ در مشخصهٔ دو، لزوماً (۲) و (۳) را نتیجه نمی‌دهد. به‌علاوه استلزام (۱) $\Rightarrow$ (۳) از این حدس نیز نادرست است، زیرا با استفاده از [۱۳، (۶.۲)] می‌توان نشان داد فرمی دوخطی مانند $\mathfrak{b}$ با بعد توانی از ۲ (در مشخصهٔ دو) وجود دارد که متابولیک است، اما با هیچ فرم فیستری متشابه نیست. بنابراین اگر قرار دهیم $(A,\sigma) = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}}$، زوج (A,σ) در شرط (۳) صدق می‌کند، اما یک جبر فیستر نیست. بنابراین نتایج ذکر شده با آنچه در مشخصهٔ مخالف دو رخ می‌دهد تفاوت‌های بسیاری دارد. با این وجود اگر فرم اولیه را آنیزوتروپ درنظر بگیریم، قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه ۷.۴. *فرض کنید $\mathfrak{b}$ یک فرم دوخطی آنیزوتروپ روی میدان F از مشخصهٔ دو باشد. اگر به‌ازای هر گسترش میدانی K/F، فرم $\mathfrak{b}_K$ آنیزوتروپ یا متابولیک باشد، آنگاه $\mathfrak{b}$ با یک فرم فیستر متشابه است.*

برای اثبات به قضیهٔ ۵٫۵ از [۲۵] مراجعه کنید.

با توجه به این قضیه، منطقی به نظر می‌رسد که شرط آنیزوتروپ بودن σ را نیز در حدس ۳.۴ اضافه کنیم. درنتیجه حدس ۳.۴ با حدس زیر در مشخصهٔ دو جایگزین می‌شود:

حدس ۸.۴. *فرض کنید (A,σ) یک جبر سادهٔ مرکزی از درجهٔ ۲^n با برگردان متعامد و آنیزوتروپ روی میدان F از مشخصهٔ دو باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *(A,σ) یک جبر فیستر است؛*

(۲) *(A,σ) تماماً تجزیه‌پذیر است؛*

(۳) *به‌ازای هر گسترش میدانی K/F، اگر σ_K ایزوتروپ باشد آنگاه متابولیک است.*

استلزام‌های (۱) $\Rightarrow$ (۲) و (۳) $\Rightarrow$ (۲) حتی بدون شرط آنیزوتروپ بودن σ نیز برقرارند؛ اولی از حدس تجزیهٔ فیستر در مشخصهٔ دو نتیجه می‌شود و دومی در [۱۳، (۶.۲)] ثابت شد. دلفین در [۱۳، (۸.۳)] نشان داد استلزام (۱) $\Rightarrow$ (۳) از حدس ۸.۴ برقرار است. همچنین استلزام (۲) $\Rightarrow$ (۱) به‌تازگی توسط مؤلف در [۳۲] ثابت شده است.

مراجع

[1] A. A. Albert, *Structure of algebras*, Revised printing, American Mathematical Society Colloquium Publications, **XXIV**, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1961.

[2] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York-London, 1957.

[3] E. Bayer-Fluckiger, D. B. Shapiro and J.-P. Tignol, Hyperbolic involutions, *Math. Z.*, **214** (1993) 461–476.

[4] E. Bayer-Fluckiger, R. Parimala and A. Quéguiner-Mathieu, Pfister involutions, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **113** (2003) 365–377.

[5] K. J. Becher, A proof of the Pfister factor conjecture, *Invent. Math.*, **173** (2008) 1–6.

[6] G. Berhuy, C. Frings and J.-P. Tignol, Galois cohomology of the classical groups over imperfect fields, *J. Pure Appl. Algebra*, **211** (2007) 307–341.

[7] J. Black and A. Quéguiner-Mathieu, Involutions, odd degree extensions and generic splitting, *Enseign. Math.*, **60** (2014) 377–395.

[8] R. Brauer, Untersuchungen uber die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, (German), *Math. Z.*, **28** (1928) 677–696.

[9] E. Cartan, Les groupes bilinéaires et les systémes de nombres complexes, (French), *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, **12** (1898) B65–B99.

[10] L. E. Dickson, Determination of the structure of all linear homogeneous groups in a Galois field which are defined by a quadratic invariant, *Amer. J. Math.*, **21** (1899) 193–256.

[11] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, **II**: Diophantine analysis, Chelsea Publishing Co., New York 1966.

[12] A. Dolphin, Orthogonal Pfister involutions in characteristic two, *J. Pure Appl. Algebra*, **218** (2014) 1900–1915.

[13] A. Dolphin, Metabolic involutions, *J. Algebra*, **336** (2011) 286–300.

[14] P. K. Draxl, *Skew fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **81**, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[15] A. Elduque, Composition of quadratic forms and the Hurwitz-Radon function in characteristic 2, *Linear Algebra Appl.*, **348** (2002) 87–103.

[16] R. Elman, N. Karpenko, A. Merkurjev, *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **56**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[17] S. Garibaldi, R. Parimala and J.-P. Tignol, Discriminant of symplectic involutions, *Pure Appl. Math. Q.*, **5** (2009) 349–374.

[18] L. J. Gerstein, *Basic quadratic forms*, Graduate Studies in Mathematics, **90**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[19] N. Grenier-Boley, E. Lequeu and M. G. Mahmoudi, On Hermitian Pfister forms, *J. Algebra Appl.* **7** (2008) 629–645.

[20] K. Ireland and M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, **84**, Springer-Verlag, New York, 1990.

[21] J. Junker, Das Hurwitz Problem für quadratische Formen über Körper der Charakteristik 2, Diplom thesis, Univ. Saarbrücken, 1980.

[22] N. Karpenko, Hyperbolicity of orthogonal involutions, With an appendix by Jean-Pierre Tignol, *Doc. Math.*, Extra volume: Andrei A. Suslin sixtieth birthday, (2010) 371–392.

[23] M. Knebusch, Grothendieck-und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen, (German), *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Natur.*, (1969/1970) 93–157.

[24] M.-A. Knus, A. S. Merkurjev, M. Rost and J.-P. Tignol, *The book of involutions*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **44**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[25] A. Laghribi, Witt kernels of function field extensions in characteristic ۲, *J. Pure Appl. Algebra*, **199** (2005) 167–182.

[26] T. Y. Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, **67**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[27] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie. Erster Band, zweiter Teil; zweiter Band; dritter Band*, (German), Chelsea Publishing Co., New York, 1969.

[28] M. G. Mahmoudi and A.-H. Nokhodkar, On split products of quaternion algebras with involution in characteristic two, *J. Pure Appl. Algebra*, **218** (2014) 731–734.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106405.1253

[29] H. Minkowski, Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten,*Mémoires présentés par divers savants a l'Academie des Sciences de l'institut national de France*, Tome XXIX 1884.

[30] H. Minkowski, Ueber die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Coefficienten in einander rational transformirt werden können, (German), *J. Reine Angew. Math.*, **106** (1890) 5–26.

[31] T. Molien, Ueber Systeme höherer complexer Zahlen, (German), *Math. Ann.*, **41** (1892) 83–156.

[32] A.-H. Nokhodkar, Pfister involutions in characteristic two, *Bull. London Math. Soc.*, **49** (2017) 505–511.

[33] A. Pfister, Multiplikative quadratische Formen, (German), *Arch. Math.*, **16** (1965) 363–370.

[34] A. Pfister, Quadratische Formen in beliebigen Körpern, (German), *Invent. Math.*, **1** (1966) 116–132.

[35] C. Riehm, The corestriction of algebraic structures, *Invent. Math.*, **11** (1970) 73–98.

[36] W. Scharlau, Zur Existenz von Involutionen auf einfachen Algebren, (German), *Math. Z.*, **145** (1975) 29–32.

[37] W. Scharlau, On the history of the algebraic theory of quadratic forms, *Quadratic forms and their applications*, 229–259, Contemp. Math., **272**, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2000.

[38] A. Serhir and J.-P. Tignol, The discriminant of a decomposable symplectic involution, *J. Algebra*, **273** (2004) 601–607.

[39] D. B. Shapiro, *Compositions of quadratic forms*, de Gruyter Expositions in Mathematics, **33**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.

[40] A. S. Sivatski, Applications of Clifford algebras to involutions and quadratic forms, *Comm. Algebra*, **33** (2005) 937–951.

[41] A. R. Wadsworth, D. B. Shapiro, Spaces of similarities. III. Function fields, *J. Algebra*, **46** (1977) 182–188.

[42] E. Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpen, (German), *J. Reine Angew. Math.*, **176** 31–44.

[43] S. Yuzvinsky, Composition of quadratic forms and tensor product of quaternion algebras, *J. Algebra*, **96** (1985) 347–367.

امیر حسین نخودکار
کاشان، بلوار راوند، دانشگاه کاشان، گروه ریاضی
a.nokhodkar@kashanu.ac.ir

امیر حسین نخودکار متولد تیرماه ماه ۱۳۶۴ در شهر کاشان است. وی در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی شریف شد. در سال ۱۳۸۶ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر دانشگاه صنعتی شریف شد و از پایان‌نامه خود در زمینه فرم‌های فرم‌های مربعی تحت نظر دکتر محمد مهدوی هزاوه‌ای دفاع کرد. وی در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع دکتری در همان دانشگاه شد و در سال ۱۳۹۳ تحت نظر دکتر محمد غلامزاده محمودی در زمینه نظریه برگردان‌ها از پایان‌نامه خود دفاع کرد. او از سال ۱۳۹۴ تاکنون عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه کاشان است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106405.1253