

ریشه‌های پیدایش مفهوم فشردگی و تاریخچه نظریه فشرده‌سازی

احسان انجیدنی

چکیده. با توجه به تاثیر به‌سزای مفهوم فشردگی در ریاضیات پیشرفته و اهمیت درک درست و مناسب این مفهوم برای ورود به ریاضیات مدرن، به نظر می‌رسد مطالعه ریشه‌ها، آغاز شکل‌گیری و مسیر توسعه آن، لازم و مفید باشد. در این مقاله، ابتدا ریشه‌های پیدایش مفهوم فشردگی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس، تاثیر مهم و راهگشای امکان رسیدن از یک پوشش باز دلخواه به یک زیرپوشش متناهی، در اثبات امروزی حکمی مهم از آنالیز مطالعه می‌شود تا فلسفه پشت تعریف فشردگی، آشکارتر گردد. در پایان، تاریخچه‌ای از نظریه فشرده‌سازی با تمرکز بر فشرده‌سازی‌های تک نقطه‌ای و استون-چنخ بررسی می‌شود.

۱. مقدمه

دِدکیند^۱، ریاضیدان آلمانی قرن نوزدهم می‌گوید تاثیر فراوان یا اندک یک مفهوم علمی، میزان ارزش آن را تعیین می‌کند. فرگه^۲ فیلسوف و ریاضیدان آلمانی، در همان قرن، مساله مفاهیم و تعاریف ارزشمند را مورد توجه قرار داده است. اگرچه وی به طور دستگامند، این ایده را توسعه نداد، اما نکات وسوسه انگیز بسیاری در این رویکرد وجود داشتند که تلاش‌ها را به منظور یافتن اصول، قواعد و فلسفه پشت تعاریف، برانگیخته می‌نمود (مرجع [۱۷] را ببینید). کوهن، فیلسوف علم و فیزیکدان آمریکایی در ۱۹۷۷، موضوع نتیجه بخشی^۳ در انتخاب نظریه را در میان ارزش‌های نظری علم فهرست کرد و خاطر نشان ساخت که با وجود اهمیت آن، این بحث کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است (مرجع [۱۰] را ببینید).

در این خصوص، می‌توان به مفهوم فشردگی به عنوان یکی از مفاهیم سودمند و موثر در ریاضیات پیشرفته، اشاره نمود که قصد داریم در این مقاله، به ریشه‌ها و دلایل پیدایش آن بپردازیم. در واقع، فشردگی یکی از مفیدترین مفاهیم در ریاضیات پیشرفته می‌باشد؛ به طوری که می‌توان آن را یکی از موضوعاتی تلقی نمود که برای ورود به ریاضیات نوین، باید آنها را درک کرد. معمولاً در هنگام تدریس مفهوم فشردگی و سایر مفاهیم که از اهمیت مشابهی برخوردارند؛ انگیزه کمی برای روایت تاریخی پیدایش آن مفهوم وجود دارد. همچنین در کتاب‌های اصلی و استاندارد مربوطه نیز، به این موضوع کمتر پرداخته می‌شود. این در حالی است که به نظر می‌رسد بررسی و مطالعه

عبارت و کلمات کلیدی: فشردگی؛ فشردگی دنباله‌ای؛ قضیه هاینه-بورل؛ فشرده‌سازی تک نقطه‌ای؛ فشرده‌سازی استون-چنخ.

دبیر تخصصی رابط: محمدصالح مصلحیان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۲۱

DOI: <http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.111298.1280>

¹ Dedekind ² Frege ³ Fruitfulness

این امر که یک مفهوم مهم ریاضی، از چه نقطه و مبدایی آغاز گردیده و چه مسیری را به لحاظ تاریخی سپری نموده تا به شکل نهایی امروزی رسیده است؛ در فهم موضوع برای دانشجویان، بسیار سودمند خواهد بود.

در نگاه تاریخی، ممکن است که یک مفهوم البته احتمالاً با شکلی متفاوت و درکی ناکامل، در اندیشه‌های ریاضیدانانی در قرون گذشته ردیابی گردد. به عنوان مثال، اویلر^۴، گاوس^۵ و دیگران، قبل از اینکه مفهوم اعداد اول، به طور کامل تعریف شود؛ اندیشه‌های درستی درباره این اعداد داشته‌اند [۱۱، ص ۲۷۱]. برای مثالی دیگر در این زمینه، می‌توان به مقاله پیکاک^۶ فیلسوف بریتانیایی، اشاره نمود که در آن، ارتباط بین تعاریف ϵ - δ یی در قرن نوزدهم با نمایش‌های نیوتون^۷ و لایبنز^۸ در حسابان، کاوش شده است (مراجع [۱۳] و [۱۴] را ببینید). چنین موضوعی در خصوص مفهوم فشردگی نیز صدق می‌کند؛ با این تفاوت که ریشه‌های آن قبل از تعریف دقیق و امروزی، نه به چند قرن که به چند دهه قبل از تعریفش، باز می‌گردد. در مقاله [۱۵]، با هدف روشن ساختن ایده‌های اصلی مرتبط با فشردگی، متون تاریخی در این زمینه، مطالعه و تحلیل گشته است. در آن مقاله، در خصوص ریشه‌ها و مسیر توسعه دو مفهوم گوناگون از فشردگی، یعنی فشردگی پوشش-باز^۹ و فشردگی دنباله‌ای^{۱۰} (که البته روی فضاهاهای متری با هم معادلند)، بحث شده و علت مطلوبیت فشردگی پوشش-باز، مطالعه گردیده است. در بخش دوم این مقاله، ریشه‌های مفهوم فشردگی را عمدتاً از مقاله [۱۵] مرور می‌کنیم.

در بخش سوم این مقاله، تاثیر مهم و راه‌گشای امکان رسیدن از یک پوشش باز دلخواه به یک زیرپوشش متناهی، در اثبات امروزی حکمی مهم از آنالیز مطالعه می‌شود تا فلسفه پشت تعریف فشردگی، آشکارتر گردد. در این بخش، هدف، نه نگاهی تاریخی که نگرشی آموزشی نسبت به مفهوم فشردگی است.

در بخش چهارم، ریشه‌ها و تاریخچه پیدایش نظریه فشردسازی^{۱۱} فضاهاهای توپولوژیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این مطالعه، تمرکز اصلی بر فشردسازی تک نقطه‌ای^{۱۲} و فشردسازی استون-چخ^{۱۳} خواهد بود.

۲. ریشه‌های پیدایش مفهوم فشردگی

در این بخش، سرآغاز و ریشه‌های پیدایش مفهوم فشردگی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. دو نتیجه اصلی در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، در نهاد و سرشت تعریف امروزی فشردگی قرار دارند: قضیه بولزانو-وایراشتراس و لم بورل-لبگ [۵، ص ۶۳۳]. الکساندروف^{۱۴} و اوریسون^{۱۵} در [۳] ثابت کردند که سه شرط زیر، برای یک فضای توپولوژیک X با یکدیگر معادلند:

- هر مجموعه نامتناهی در X ، حداقل یک نقطه حدی کامل^{۱۶} دارد (منظور از نقطه حدی کامل برای مجموعه A ، نقطه‌ای است که هر همسایگی از آن، A را قطع می‌کند و اشتراک حاصل، با مجموعه A ، هم‌عدد است)؛
- هر خانواده نامتناهی از مجموعه‌های بسته X با خاصیت اشتراک متناهی، دارای اشتراک ناتهی است؛
- هر خانواده نامتناهی از مجموعه‌های باز که X را پوشش می‌دهد، دارای تعدادی متناهی مجموعه با همان خاصیت است.

خاصیت اول از قضیه بولزانو^{۱۷} - وایراشتراس^{۱۸} الهام گرفته شد و خاصیت سوم، ریشه در لم بورل^{۱۹} - لبگ^{۲۰} داشت. الکساندروف در [۲] اشاره می‌کند که در آن سال‌ها وقتی که به همراه اوریسون، نظریه فضاهاهای فشرد را می‌ساخت، قضیه بولزانو-وایراشتراس بسیار مهم‌تر از لم بورل-لبگ به نظر می‌رسید و به همین دلیل، تعریفی که بر حسب نقطه حدی کامل بود، تعریف اصلی فشردگی در نظر گرفته شد [۵، ص ۶۳۴]. اگرچه پس از گذشت سال‌ها و با درک کامل‌تر ریاضیدانان

⁴ Euler ⁵ Gauss ⁶ Peacocke ⁷ Newton ⁸ Leibniz ⁹ Open-Cover Compactness ¹⁰ Sequential Compactness ¹¹ Compactification

¹² One-Point Compactification ¹³ Stone-Čech Compactification ¹⁴ Alexandroff ¹⁵ Urysohn ¹⁶ Complete Accumulation Point

¹⁷ Bolzano ¹⁸ Weierstrass ¹⁹ Borel ²⁰ Lebesgue

از دستگاه اعداد حقیقی، به اهمیت لم بول-لبگ، بیشتر پی برده شد. قضیه‌ای که تعریف فشردگی پوشش-باز را در پی داشت. در اینجا، با جزئیات بیشتری تاریخچه این دو قضیه را بررسی می‌کنیم.

از اواسط قرن نوزدهم به بعد، ریاضیدانان به بررسی و درک خواص اساسی اعداد حقیقی پرداختند. این کار، به دو مشخص‌سازی گوناگون از مفهومی منجر گردید که اکنون به عنوان فشردگی نامیده می‌شود.

یک مشخص‌سازی، حاصل مطالعه دنباله‌ها در اعداد حقیقی بود که توسط بولزانو و ویراشتراس، انجام شد. منشا فشردگی دنباله‌ای در قضیه‌ای ردیابی می‌شود که در سال ۱۸۷۷ توسط ویراشتراس اثبات گردید. البته، در واقع، ویراشتراس حدود ۱۰ سال زودتر این قضیه را اثبات و در سخنرانی‌ها به طور شفاهی ارائه داد اما اولین زمان انتشار این قضیه، سال ۱۸۷۷ بوده است [۱۵، ص ۶۲۰]. این قضیه، به رفتار توابع پیوسته روی بازه‌های بسته و کراندار در مجموعه اعداد حقیقی مربوط می‌شود. این قضیه معروف، توسط فرشه^{۲۱} در ۱۹۰۶ به صورت زیر نقل می‌شود:

”هر تابع پیوسته در یک بازه بسته و کراندار، حداقل در یک نقطه به مقدار ماکسیمم خود می‌رسد.“

فرشه در تعمیم این قضیه به فضاهای مجرد، فشردگی دنباله‌ای را در ۱۹۰۶ تعریف کرد [۱۸، ص ۴۳]. یک فضای توپولوژیک، فشرده دنباله‌ای است اگر هر دنباله در آن، زیردنباله همگرا داشته باشد. لازم به ذکر است که از فرشه می‌توان به عنوان پدر مفهوم فشردگی نام برد. وی، اولین بار در مقاله [۷]، این مفهوم را نامگذاری کرد.

البته ایده‌های اساسی استفاده شده در اثبات قضیه ویراشتراس، از اثبات گزاره‌ای می‌آید که توسط بولزانو در سال ۱۸۱۷ بیان گردید و امروزه تحت عنوان خاصیت کوچکترین کران بالا^{۲۲} برای اعداد حقیقی شناخته می‌شود. این لم می‌گوید که اگر M خاصیتی باشد که برای همه اعداد حقیقی برقرار نباشد اما برای همه اعداد کوچکتر از یک عدد مشخص u برقرار باشد، آنگاه بزرگترین عدد مانند U موجود است به طوری که خاصیت M برای همه اعداد کوچکتر از آن برقرار است. ایده پشت اثبات بولزانو برای لم گفته شده، تقسیم کردن یک بازه کراندار به دو قسمت و انتخاب قسمتی بود که تعداد نامتناهی از اعضای مجموعه مورد بررسی را دارد. با تکرار این روند، بازه کوچک و کوچک‌تر شده و در نهایت عددی که کوچکترین کران بالا برای مجموعه داده شده می‌باشد؛ به دست می‌آید. روند حدی به‌کار گرفته شده در اثبات این گزاره، در سال‌های بعد برای اثبات قضیه مهمی که امروزه قضیه مقدار میانی^{۲۳} نامیده می‌شود؛ استفاده گردید. اینجا، به دلیل اهمیت قضیه مقدار میانی، اثبات این قضیه را به روش تقسیم کردن بازه‌ها، بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. اگر تابع حقیقی-مقدار f روی یک بازه بسته $[a, b]$ پیوسته بوده و علامت‌های $f(a)$ و $f(b)$ متفاوت باشند، آنگاه نقطه c در (a, b) موجود است به طوری که $f(c) = 0$.

برهان. گیریم $f(b) > 0 > f(a)$. فرض کنیم حکم، برقرار نباشد. بازه $[a_1, b_1]$ را برابر $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن نقطه وسط $[a_1, b_1]$ ، این بازه را به دو قطعه مساوی تقسیم می‌کنیم. یکی از این دو بازه جدید، دارای این خاصیت است که تابع f در ابتدای آن، منفی و در انتهایش، مثبت است. این بازه را $[a_2, b_2]$ می‌نامیم. این کار را ادامه می‌دهیم. فرض کنید در مرحله n ، بازه $[a_n, b_n]$ را داریم به طوری که $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. می‌توان بازه $[a_n, b_n]$ را از وسط نصف کرد و بازه $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ را به دست آورد آنطور که $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$. به این ترتیب، به وسیله استقرا دنباله $\{[a_n, b_n]\}$ از بازه‌های تودرتو را خواهیم داشت به طوری که به ازای هر n ، $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ و طول $[a_n, b_n]$ برابر است با $\frac{b-a}{2^n}$. با استفاده از خاصیت کوچکترین کران بالا برای اعداد حقیقی، نقطه‌ای مانند c در همه بازه‌های $[a_n, b_n]$ موجود است و دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به ترتیب، دنباله‌هایی صعودی و نزولی هستند و داریم $a_n \rightarrow c$ و $b_n \rightarrow c$. چون f پیوسته است، پس داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

²¹ Fréchet ²² The least upper bound property ²³ The intermediate value theorem

چون به ازای هر n ، $f(a_n) < 0$ ، پس $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$. به طور مشابه، چون به ازای هر n ، $f(b_n) > 0$ ، پس $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$. لذا داریم $f(c) = 0$ که با فرض خلف در تناقض است.

فرآیند تقسیم بازه‌ها در اثبات بولزانو، همان فرآیندی است که در اثبات قضیه مقدار ماکسیمم توسط وایراشتراس، مورد استفاده قرار گرفت [۹، ص ۹۵۳]. همچنین، وایراشتراس همین روش را به کار برد تا وجود نقطه حدی^{۲۴} را برای یک مجموعه نامتناهی و کراندار از اعداد حقیقی، اثبات کند. این همان خاصیتی است که فرشه، هنگام تعمیم قضیه وایراشتراس به فضاهای مجرد، به کار برد. امروزه این خاصیت، تحت عنوان خاصیت بولزانو- وایراشتراس یا فشردگی حد- نقطه^{۲۵} شناخته می‌شود. یک فضای توپولوژیک، فشرده حد- نقطه نامیده می‌شود اگر هر زیرمجموعه نامتناهی از آن، نقطه حدی داشته باشد.

این تلاش‌ها که در همه آنها رگه‌هایی از روندهای حدی به چشم می‌خورد، در کنار اهمیت و نقش مهم خود، همانطور که گفتیم به تعریف مفهوم فشردگی دنباله‌ای منجر گردید.

در حالی که بولزانو و وایراشتراس تلاش می‌کردند خواص اعداد حقیقی را نسبت به دنباله‌ها، مشخص‌سازی کنند؛ ریاضیدانان دیگری همچون بورل و لبگ، سعی در بررسی خواص خط حقیقی بر حسب پوشش‌های باز داشتند.

در مقاله‌ای در سال ۱۸۷۲، شرط پیوستگی و تعریف پیوستگی یکنواخت بر حسب $\epsilon - \delta$ ، توسط هاینه^{۲۶} فرمول‌بندی گردید (مرجع [۱۶] را ببینید). همچنین، در همان مقاله، قضیه توابع پیوسته یکنواخت^{۲۷} که می‌گوید هر تابع پیوسته روی یک بازه بسته و کراندار، پیوسته یکنواخت است؛ توسط وی اثبات شد [۱۵، ص ۶۲۱]. البته بنا به نوشته هاینه، این قضیه ابتدا توسط کانتور^{۲۸} صورت‌بندی شده بود و به همین دلیل، به قضیه کانتور- هاینه معروف شده است [۱۶].

بعد از آن، بورل، در رساله‌اش که در سال ۱۸۹۴ منتشر شد، یک قضیه مهم را ثابت کرد که به عنوان لم بورل از آن یاد می‌شود. روش بورل برای اثبات این لم، مشابه روشی بود که هاینه در خلال اثبات قضیه توابع پیوسته یکنواخت در سال ۱۸۷۲ به کار برده بود [۱۵، ص ۶۲۱]. در واقع، این بورل بود که به اهمیت انتخاب یک تعداد متناهی از بازه‌ها از بین یک گردایه از بازه‌ها پی برد. وی اولین کسی است که این ویژگی را در یک قضیه مستقل، بیان می‌کند [۹، ص ۹۵۴-۹۵۳]. لم بورل به زبان امروزی می‌گوید:

”اگر روی یک بازه بسته و کراندار، تعدادی نامتناهی زیربازه داشته باشیم به طوری که هر نقطه از آن بازه، نقطه درونی حداقل یکی از زیربازه‌ها باشد، آنگاه تعدادی متناهی از آن زیربازه‌ها موجودند به قسمی که هر نقطه از بازه اولیه، نقطه درونی حداقل یکی از آنها می‌باشد.“

لازم به ذکر است که قضیه توابع پیوسته یکنواخت، اولین بار در سال ۱۸۵۲ توسط دیریکله^{۲۹} در یک سخنرانی علمی ثابت شده بود. به علاوه، در اثبات دیریکله، پوشش‌ها و زیرپوشش‌ها، صریح‌تر و واضح‌تر از اثبات هاینه استفاده شده بودند [۶، ص ۹۱]. دلیل اینکه در نسخه تعمیم یافته لم بورل که امروزه تحت عنوان قضیه هاینه- بورل از آن یاد می‌شود؛ نام دیریکله وجود ندارد این است که یادداشت‌های وی تا سال ۱۹۰۴ منتشر نشدند. اضافه شدن نام هاینه به قضیه بورل نیز به دلیل ارتباطی است که اثبات بورل با روش اثبات هاینه در قضیه توابع پیوسته یکنواخت دارد که در بالا به آن اشاره کردیم. این شباهت در روش اثبات را اولین بار، یکی از دانشجویان وایراشتراس به نام شون‌فلایز^{۳۰} در ۱۹۰۰، مورد توجه قرار داد [۱۵، ص ۶۲۱]. به هر حال، شکل تعمیم یافته و امروزی لم بورل که از آن به عنوان قضیه هاینه- بورل یاد می‌شود؛ به صورت زیر است:

”یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ ، فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد.“

²⁴ Limit point ²⁵ Limit-point compactness ²⁶ Heine ²⁷ Uniformly continuous functions theorem ²⁸ Cantor ²⁹ Dirichlet

³⁰ Schönflies

در حالی که نام هاینه بر قضیه‌ای نهاده شد که توسط او اثبات نگردید؛ نام کوسین^{۳۱} بر روی لمی که او اثبات کرد، نادیده گرفته شد. داستان از این قرار است که در واقع، لم بول در ۱۸۹۴، برای پوشش‌های باز شمارا از یک بازه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ اثبات گردیده بود. بول در ۱۹۰۳، نتیجه را برای فضاهای اقلیدسی دلخواه ثابت کرد. اما لبگ در سال ۱۹۰۴، لزوم شمارا بودن پوشش را حذف کرد و قضیه را برای پوشش‌های دلخواه ثابت نمود [۵، ص ۶۳۴]. این در حالی است که منابع بر این امر دلالت دارند که این کوسین بود که قبل از آن، در سال ۱۸۹۵، لم بول را به پوشش‌های دلخواه در فضای $\mathbb{R}^2$ تعمیم داد. لم کوسین به زبان امروزی به صورت زیر است [۱۵، ص ۶۲۲]:

فرض کنید S یک مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}^2$ باشد و در هر نقطه از S ، دایره‌ای به مرکز آن نقطه در نظر گرفته شود. در این صورت می‌توان S را به تعدادی متناهی مجموعه بسته و کراندار تقسیم کرد به طوری که هر یک از آنها زیرمجموعه‌ای از یکی از دایره‌های مورد اشاره باشند.

در هر صورت، لم کوسین عموماً به لبگ نسبت داده می‌شود و این مطلب که هر مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ ، خاصیت پوشش-باز^{۳۲} دارد، تحت عنوان خاصیت بول-لبگ نامیده می‌شود [۱۵، ص ۶۲۲].

سه خاصیت معادلی که در ابتدای این بخش به آن اشاره شد، تا حدود ۱۵ سال پس از انتشارش توسط الکساندروف و اوریسون، هر کدام در کارهای مهم و تاثیرگذاری، به عنوان تعریف فشردگی مورد استفاده قرار گرفتند. در [۵، ص ۶۳۵] فهرست کوتاهی از این کارها به همراه خاصیتی که در آن مقالات به عنوان تعریف فشردگی به کار رفته، آمده است. مسلماً، نویسندگان این کارها از هم ارزی این خواص آگاه بودند و لذا انتخاب خاصیت ویژه‌ای به عنوان تعریف فشردگی، تمایل و گرایش شخصی نویسندگان را در آن زمان، بازتاب می‌دهد.

البته نسل‌های بعدی توپولوژیست‌ها، خاصیت سوم را بیش از پیش مورد توجه قرار دادند. امروزه یک فضای توپولوژیک، فشرده نامیده می‌شود اگر هر پوشش باز آن، زیرپوشش متناهی داشته باشد. همانطور که در [۵، ص ۶۳۵] اشاره شده است، شاید عاملی که باعث مطلوبیت این تعریف نسبت به فشردگی شمارا^{۳۳} یا فشردگی دنباله‌ای گردیده است، ویژگی مهمی باشد که در قضیه تیخونوف^{۳۴} بازتاب یافته است. این قضیه که شاید بتوان آن را مهمترین قضیه در توپولوژی عمومی دانست، بیان می‌کند که ضرب دکارتی یک خانواده دلخواه از فضاهای فشرده، فشرده است. در فصل چهارم که در آن به ریشه‌های پیدایش نظریه فشرده‌سازی می‌پردازیم، به تاریخچه این قضیه اشاره خواهیم کرد.

۳. بررسی قضیه توابع پیوسته یکنواخت برای درک بهتر مفهوم فشردگی

همانطور که در انتهای بخش دوم اشاره کردیم، امروزه این که هر پوشش باز از یک فضای توپولوژیک، زیرپوشش متناهی داشته باشد، به عنوان تعریف استاندارد فشردگی آن فضا در نظر گرفته می‌شود. چنین مفهومی، در ابتدای امر، برای دانشجو غیرشهودی و ناملموس است و پذیرش و درک آن سخت خواهد بود. مشکل هنگامی تشدید می‌شود که به دلیل اهمیت این مفهوم، بلافاصله بعد از تعریف، از آن در اثبات قضایا استفاده می‌شود. این در حالی است که همچنان این ابهام که چنان تعریفی از کجا و چرا به این شکل آمده است، مانعی جدی برای فهم قضایا و گزاره‌های بعدی خواهد بود.

در بخش دوم، نگاهی تاریخی به قضیه توابع پیوسته یکنواخت داشتیم. اینجا، جهت درک بهتر مفهوم فشردگی و آگاهی از فلسفه پشت آن، اهمیت امکان رسیدن از یک گردایه دلخواه از مجموعه‌های باز به تعدادی متناهی، با حفظ خاصیت پوشش دهنده‌گی، یعنی همان خاصیت فشرده بودن فضا را در اثبات امروزی این قضیه مرور می‌کنیم. این رویکرد ممکن است در آموزش مفاهیم ناملموسی همچون فشردگی، موثر باشد.

³¹ Cousin ³² Open-cover property ³³ Countable Compactness ³⁴ Tychonoff

جهت یادآوری، فرض کنید (X, d_1) و (Y, d_2) فضاهای متری باشند. در این صورت، تابع $f: X \rightarrow Y$ در x پیوسته است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $y \in X$ ، اگر $d_1(y, x) < \delta$ ، آنگاه $d_2(f(y), f(x)) < \epsilon$.

تابع f را روی X پیوسته گوئیم اگر f در همه نقاط X ، پیوسته باشد. به عبارت دیگر، می توان گفت تابع f پیوسته است اگر

$$\forall x \in X \forall \epsilon > 0 \exists \delta_{x,\epsilon} > 0 \forall y \in X (d_1(y, x) < \delta \Rightarrow d_2(f(y), f(x)) < \epsilon).$$

حال اگر f در این خاصیت صدق کند که در رابطه بالا، بتوان δ را به گونه ای انتخاب کرد که تنها به ϵ بستگی داشته باشد و به عبارتی، δ به x وابسته نباشد، آنگاه گوئیم f روی X پیوسته یکنواخت است. به بیان دیگر تابع f پیوسته یکنواخت است اگر

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 \forall x \in X, \forall y \in X (d_1(y, x) < \delta \Rightarrow d_2(f(y), f(x)) < \epsilon).$$

واضح است که پیوستگی یکنواخت، مفهومی قوی تر از پیوستگی است. همچنین می دانیم که توابع مهمی چون $f(x) = x^2$ پیوسته بوده اما پیوسته یکنواخت نیستند. شاید اثبات این مطلب، تفاوت مفهوم پیوستگی یکنواخت را با پیوستگی، آشکارتر سازد. در واقع، تابع $f(x) = x^2$ روی $\mathbb{R}$ به این دلیل پیوسته یکنواخت نیست که مثلاً برای $\epsilon = 1$ ، نمی توان $\delta > 0$ را یافت به طوری که برای هر x و y در $\mathbb{R}$ ، اگر $|x - y| < \delta$ ، آنگاه $|x^2 - y^2| < 1$. به عبارت دیگر، با وجود ثابت نگه داشتن فاصله بین x و y ، فاصله x^2 و y^2 (با انتخاب x و y های بزرگ)، می تواند از هر عددی، بزرگ تر باشد. به بیان دقیق تر، فرض کنید $\delta > 0$ موجود است به طوری که به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ ، اگر $|x - y| < \delta$ ، آنگاه $|x^2 - y^2| < 1$. اکنون برای هر عدد طبیعی دلخواه n ، قرار می دهیم $x = n$ و $y = n + \frac{\delta}{4}$. واضح است که $|x - y| < \delta$ و نیز

$$|x^2 - y^2| = n\delta + \frac{\delta^2}{4} < 1.$$

روشن است که رابطه اخیر، با خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی یا بی کران بودن اعداد طبیعی، در تناقض است. با توجه به اهمیت بسیار زیاد مفهوم پیوستگی یکنواخت در ریاضیات و آنالیز، مثلاً در نظریه انتگرال، سوال مهمی که در این رابطه مطرح می شود این است که کدام دسته از توابع پیوسته، پیوسته یکنواخت خواهند بود؟ فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. می خواهیم ببینیم برای اینکه از پیوستگی یکنواخت f ، مطمئن باشیم، چه شرط یا شرایطی را باید به مساله اضافه کنیم؟ گیریم $\epsilon > 0$. به ازای هر $p \in X$ ، چون f در p پیوسته است، پس یک همسایگی p به شعاع δ_p موجود است به طوری که

$$f(B_{d_1}(p, \delta_p)) \subseteq B_{d_2}(f(p), \epsilon),$$

که در آن، نماد $B_d(p, r)$ همسایگی p به شعاع r نسبت به متر d را نشان می دهد. روشن است که هر δ_p به p بستگی دارد. لذا با شرایط موجود، نمی توانیم یک $\delta > 0$ ، مستقل از نقاط p ، پیدا کنیم که در شرط پیوستگی یکنواخت صدق کند. یک ایده این است که برای رسیدن به یک شعاع یکسان که شرط پیوستگی را برای همه نقاط برآورده سازد؛ مینیم یا با بیان دقیق تر، اینفیم همه δ_p ها را به دست آوریم. این ایده بلافاصله به این مشکل برخورد می کند که ممکن است عدد به دست آمده، صفر شود؛ در حالی که ما به دنبال رسیدن به یک شعاع مثبت هستیم! برای رفع این مشکل، به این نتیجه می رسیم که اگر تعداد δ_p ها، متناهی باشد، آنگاه با مینیم گرفتن از آنها، می توان به شعاعی دست یافت که ممکن است ما را به مقصود برساند! پس هدف، رسیدن از یک تعداد نامشخص همسایگی، به یک تعداد متناهی همسایگی می باشد! با توجه به این بحث، ویژگی زیر برای فضای X ، چنین امکانی را فراهم می کند:

اگر یک گردایه از همسایگی‌ها، X را پوشش دهد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که تعدادی متناهی از همان همسایگی‌ها، نیز آن را می‌پوشانند!

حال، واضح است که گردایه $\left\{ B\left(p, \frac{\delta_p}{4}\right) : p \in X \right\}$ ، فضای X را می‌پوشاند؛ یعنی

$$X \subseteq \bigcup_{p \in X} B\left(p, \frac{\delta_p}{4}\right).$$

لذا با توجه به فرض جدید، تعدادی متناهی از این همسایگی‌ها نیز X را می‌پوشانند؛ یعنی نقاط $p_1, \dots, p_n \in X$ وجود دارند به طوری که

$$(1.3) \quad X \subseteq B\left(p_1, \frac{\delta_{p_1}}{4}\right) \cup \dots \cup B\left(p_n, \frac{\delta_{p_n}}{4}\right).$$

اکنون طبق حدس پیش گفته، قرار می‌دهیم

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{p_1}}{4}, \dots, \frac{\delta_{p_n}}{4} \right\}.$$

حال اگر $x, y \in X$ و $d_1(x, y) < \delta$ ، آنگاه طبق (۱.۳)، $1 \leq i \leq n$ وجود دارد به طوری که $d_1(y, p_i) < \frac{\delta_{p_i}}{4}$. همچنین داریم

$$d_1(x, p_i) \leq d_1(x, y) + d_1(y, p_i) < \delta + \frac{\delta_{p_i}}{4} \leq \delta_{p_i}.$$

(توجه می‌کنیم برای اینکه $d_1(x, p_i)$ از δ_{p_i} کمتر شود، گردایه همسایگی‌ها را با شعاع‌های $\frac{\delta_p}{4}$ در نظر گرفتیم.)
اکنون با در نظر گرفتن تعریف پیوستگی f در نقطه p_i ، به دست می‌آوریم

$$d_2(f(y), f(p_i)) < \epsilon, \quad d_2(f(x), f(p_i)) < \epsilon,$$

که در نتیجه با استفاده از نامساوی مثلث، خواهیم داشت $d_2(f(y), f(x)) < 2\epsilon$.
پس برای $\epsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ پیدا کردیم به طوری که اگر $d_1(x, y) < \delta$ ، آنگاه

$$d_2(f(x), f(y)) < 2\epsilon.$$

لذا f پیوسته یکنواخت خواهد بود. پس اگر دامنه یک تابع پیوسته، ویژگی فوق را داشته باشد، آنگاه آن تابع، پیوسته یکنواخت خواهد بود.

ملاحظه می‌کنیم که وجود چنین خاصیتی که در بررسی فوق به آن رسیدیم، حکم مهمی را به اثبات می‌رساند. پس چنین خاصیتی، ارزش آن را دارد که نامی بر آن نهاده شود. این نام، فشردگی می‌باشد! البته صرفاً کارایی یک مفهوم در به دست آوردن گزاره‌ها و قضایای مهم، برای پراهمیت دانستن آن کافی نیست! باید مثال‌های مهمی از مجموعه‌ها یا عناصری وجود داشته باشند که در آن ویژگی صدق کنند. در خصوص مفهوم فشردگی، رده‌های بسیار مهمی از فضاها، متری و توپولوژیکی فشرده وجود دارند. یکی از مهمترین این رده‌ها، بازه‌های بسته و کراندار در اعداد حقیقی هستند که قضیه هاینه-بورل، بر فشردگی آنها دلالت دارد.

۴. فشرده سازی

به دلیل اهمیت و کاربرد مفهوم فشردگی، اصطلاحاً نشان دادن یک فضای غیرفشرده در فضایی فشرده نیز همواره حائز اهمیت بوده است. نظریه فشرده سازی به این مبحث می‌پردازد. در این فصل، تاریخچه این نظریه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بسیاری از فضاهای مهم در آنالیز و توپولوژی، با وجود اینکه فشرده نیستند؛ نسخه‌ای موضعی از فشردگی را دارند. این مفهوم، فشردگی موضعی^{۳۵} نامیده می‌شود. یک فضای توپولوژیکی موضعا فشرده است اگر برای هر نقطه از آن، یک مجموعه فشرده شامل یک مجموعه باز از آن نقطه، وجود داشته باشد [۱۲، ص ۱۸۲]. با توجه به اهمیت فضاهای هاسدورف^{۳۶}، بعضی از منابع، موضعا فشردگی را از همان ابتدا، روی یک فضای هاسدورف تعریف می‌کنند [۴، ص ۹۰]. به وضوح، هر فضای فشرده، موضعا فشرده است. همچنین هر زیرفضای بسته از یک فضای موضعا فشرده، موضعا فشرده خواهد بود. اما فضاهای مهمی وجود دارند که فشرده نیستند در حالی که موضعا فشرده می‌باشند. مهمترین مثال از این فضاها، فضای اعداد حقیقی است.

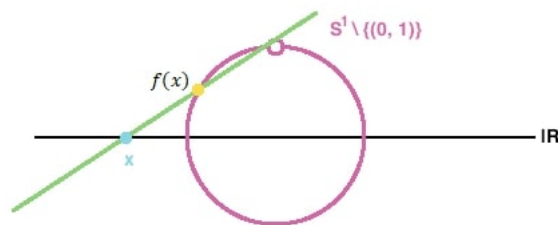
یکی از خوش رفتارترین کلاس‌ها از فضاهایی که در ریاضیات با آنها سروکار داریم، فضاهای هاسدورف و فشرده می‌باشند. این‌گونه فضاها، خواص بسیاری دارند که می‌توان از آنها در اثبات قضایا یا ایجاد ساختارهای جدید استفاده نمود. از این رو، اگر در مساله‌ای، فضای مورد بحث، هاسدورف و فشرده نباشد، یکی از راه حل‌های مفید این است که فضایی هاسدورف و فشرده پیدا کنیم که فضای مورد نظر، زیرفضای آن باشد. به دلیل آن‌که زیرفضای یک فضای فشرده و هاسدورف، ممکن است فشرده نباشد؛ پرداختن به این کار منطقی بوده و سوال زیر مطرح می‌گردد:

تحت چه شرایطی، یک فضا با یک زیرفضا از یک فضای هاسدورف و فشرده، یکریخت خواهد بود [۱۲، ص ۱۸۳]؟
کار بر روی چنین پرسشی، نظریه فشرده‌سازی را در ریاضیات، از اوایل قرن بیستم به وجود آورد.
امروزه تعریف کلی فشرده‌سازی به این صورت است: یک فشرده‌سازی از فضای توپولوژیک X ، یک زوج $(\alpha, \alpha X)$ است که در آن αX یک فضای فشرده بوده و $\alpha: X \rightarrow \alpha(X) \subseteq \alpha X$ یک یکریختی^{۳۷} می‌باشد و $\alpha(X)$ در αX چگال است. به دلیل اینکه X با $\alpha(X)$ یکریخت است، معمولا X به عنوان زیرفضای αX و αX به عنوان فشرده‌سازی X معرفی می‌گردد [۵، صص ۶۴۲-۶۴۱].

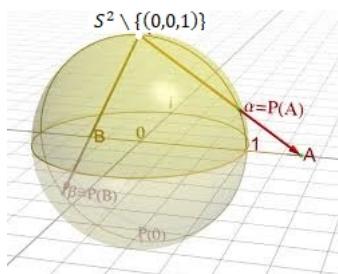
مبانی نظریه مدرن فشرده‌سازی فضاهای هاسدورف، به مقالاتی متکی است که عمدتاً در دهه ۱۹۳۰ میلادی توسط ریاضیدانانی همچون الکساندروف، اوریسون، تیخونوف، استون^{۳۸} و چخ^{۳۹} و ... نگاشته شده‌اند. فهرستی از این مقالات را می‌توان در [۵، ص ۶۳۶] مشاهده نمود.

اولین روش فشرده‌سازی، فشرده‌سازی تک نقطه‌ای بود که توسط الکساندروف در سال ۱۹۲۴ در [۱] معرفی گردید. این فشرده‌سازی، روی فضای هاسدورف و موضعا فشرده X به این صورت تعریف می‌شود: عنصری خارج از X که با ∞ نمایش داده می‌شود و آن را نقطه در بینهایت می‌نامیم؛ به X اضافه می‌کنیم تا مجموعه $\omega X = X \cup \{\infty\}$ تشکیل شود. مجموعه‌های باز در ωX را مجموعه‌هایی تعریف می‌کنیم که یا در X باز هستند یا به شکل $\omega X - K$ می‌باشند که در آن، K یک زیرمجموعه فشرده از X است. به این ترتیب، ωX یک فضای فشرده و هاسدورف خواهد بود و X زیرفضایی از ωX می‌باشد. به علاوه، اگر X فشرده نباشد، آنگاه X در ωX چگال خواهد بود [۱۲، ص ۱۸۴].
به عنوان مثال‌های مشهور، می‌توان به فشرده‌سازی‌های تک نقطه‌ای $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2$ اشاره نمود که همان‌طور که در شکل‌های ۱ و ۲ می‌بینیم، به ترتیب، دایره S^1 و کره S^2 می‌باشند.

³⁵ Local compactness ³⁶ Hausdorff spaces ³⁷ homeomorphism ³⁸ Stone ³⁹ Čech



شکل ۱: فشردسازی تک نقطه‌ای $\mathbb{R}$. نقطه $(0, 1)$ عنصر اضافه شده در فشردسازی می‌باشد.



شکل ۲: فشردسازی تک نقطه‌ای $\mathbb{R}^2$. نقطه $(0, 0, 1)$ عنصر اضافه شده در فشردسازی است.

بنیادی‌ترین مقاله در نظریه فشردسازی، مقاله [۱۹] است که توسط تیخونوف در سال ۱۹۳۰ منتشر گردید. در این مقاله، تیخونوف توپولوژی حاصلضربی را روی حاصلضرب یک خانواده دلخواه از فضاهای $I = [0, 1]$ تعریف می‌کند. این فضا با توپولوژی حاصلضربی، تحت عنوان مکعب I^T نامیده و نمایش داده می‌شود. تیخونوف، در همان مقاله ثابت می‌کند که این فضا با توپولوژی حاصلضربی، فشرد است. قضیه مهمی که امروزه تحت عنوان قضیه تیخونوف نامیده می‌شود، بیان می‌کند که حاصلضرب هر خانواده دلخواه از فضاهای فشرد، با توپولوژی حاصلضربی، فشرد است. این قضیه نیز در سال ۱۹۳۵، توسط خود تیخونوف اثبات گردید [۵، ص ۶۳۶]. همانطور که گفته شد، در مقاله ۱۹۳۰ حالت خاصی از قضیه تیخونوف بیان و اثبات گردیده بود.

تیخونوف در مقاله مهم [۱۹] در ادامه ارائه کارهای اساسی ذکر شده، قضیه‌ای را ثابت کرد که مبنایی برای معرفی یک نوع مهم از فشردسازی قرار گرفت. امروزه، این فشردسازی به فشردسازی استون-چخ معروف است. قضیه تیخونوف بیان می‌کند که فضاهای کاملاً منظم^{۴۰}، دقیقاً فضاهایی هستند که می‌توانند در مکعبی همچون I^T نشانده شوند. به عبارت دیگر، برای هر فضای کاملاً منظم، یک مکعب I^T وجود دارد به طوری که زیرفضایی از این مکعب، با فضای داده شده یکرخت است [۵، ص ۶۳۶].

لازم به یادآوری است که مفهوم کاملاً منظم بودن یک فضا، توسط اوریسون در سال ۱۹۲۵ ارائه شد. فضای توپولوژیک X کاملاً منظم است اگر هاسدورف باشد و به ازای هر زیرمجموعه بسته A از X و هر $x \in X \setminus A$ ، تابع پیوسته $f: X \rightarrow I$ موجود باشد به طوری که $f(x) = 0$ و برای هر $y \in A$ ، $f(y) = 1$.

با بیانی دقیق‌تر، در مقاله یاد شده، تیخونوف اثبات کرد که یک فضای کاملاً منظم، می‌تواند در یک مکعب که تعداد عامل‌های آن با عدد اصلی فضای داده شده، یکسان است؛ نشانده شود. مثلاً اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ ، در مکعب $I^{\mathbb{N}}$ نشانده

⁴⁰ Completely regular spaces

می‌شود. منظور از $\aleph_0$ ، عدد اصلی $\mathbb{N}$ است. چنخ در سال ۱۹۳۷، با استفاده از همان شیوه تیخونوف، اما بدون اعمال محدودیت ذکر شده روی تعداد عامل‌ها و در واقع با استفاده از تعداد ماکسیمالی از عامل‌ها، فشردسازی استون-چنخ را به دست آورد که خاصیت توسیع ماکسیمال دارد [۵، ص ۶۳۷]. فشردسازی استون-چنخ فضای X معمولاً با βX نشان داده می‌شود. فشردسازی استون-چنخ دارای این خاصیت است که اگر γX یک فشردسازی دلخواه از فضای X باشد، آنگاه تابع پیوسته و پوشای $\gamma X \rightarrow \beta X$: π موجود است به طوری که $\pi \circ \beta = \gamma$. این خاصیت معمولاً با نماد $\gamma X \leq \beta X$ نشان داده می‌شود [۵، ص ۶۴۲].

یک روش کاملاً متفاوت برای ساختن فشردسازی βX ، در همان سال ۱۹۳۷ توسط استون ارائه گردید. در حالی که شیوه چنخ، کاملاً به قضیه حاصلضربی تیخونوف وابسته بود، روش استون به این قضیه وابسته نبود. در واقع، استون برای فضای کاملاً منظم X ، یک توپولوژی روی گردایه ایده‌آل‌های اول در حلقه عناصر به شکل $((a, b), f^{-1})$ ، که در آن، f تابعی حقیقی-مقدار، پیوسته و کراندار روی X می‌باشد، تعریف کرد. به این ترتیب فضایی فشرد به دست آورد که در واقع همان فشردسازی βX از X بود [۵، صص ۶۴۰-۶۳۹].

از مقالات مستقل استون و چنخ در سال ۱۹۳۷، می‌توان قضیه فشردسازی استون-چنخ را به صورت زیر نوشت.

قضیه ۱.۴. [۸، ص ۸۶] هر فضای توپولوژیک کاملاً منظم X ، یک فشردسازی βX با خواص معادل زیر دارد:

(الف) هر نگاشت پیوسته g از X به توی فضای فشردی مانند Y ، دارای یک توسیع پیوسته G از βX به توی Y می‌باشد؛

(ب) هر تابع حقیقی-مقدار، پیوسته و کراندار f روی X ، یک توسیع پیوسته F روی βX دارد.

پاسخ به پرسش‌هایی همچون میزان سهم استون، چنخ و تیخونوف در معرفی و کشف فشردسازی استون-چنخ، اولین منبعی که از این فشردسازی، تحت عنوان فشردسازی استون-چنخ استفاده کرد و دلیل نام‌گذاری "استون-چنخ" برخلاف روش الفبایی معمول "چنخ-استون" و سوالات دیگری از این دست را می‌توان در [۵، صص ۶۳۸-۶۳۷] و مراجع اشاره شده در آن یافت.

مقاله چنخ در سال ۱۹۳۷ نه تنها مبنای نظریه فشردسازی قرار گرفت، بلکه یکی از مهمترین زمینه‌های تحقیقاتی در توپولوژی عمومی، توسط این مقاله، بنیان نهاده شد: مطالعه فشردسازی استون-چنخ فضای اعداد طبیعی و مطالعه $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. چنخ چند مساله را در خصوص $\beta\mathbb{N}$ و $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ مطرح کرد که قادر به حل آنها نبود. یکی از آن مسائل، تعیین عدد اصلی $\beta\mathbb{N}$ بود. البته چنخ اشاره کرده است که عدد اصلی $\beta\mathbb{N}$ بین $2^{\aleph_0}$ و $2^{2^{\aleph_0}}$ است. این مساله، در همان سال ۱۹۳۷ توسط پوسپیشیل^{۴۱} حل شد. در واقع، ثابت شد که اگر T یک فضای گسسته نامتناهی با عدد اصلی α باشد، آنگاه عدد اصلی βT برابر است با 2^{α} [۵، صص ۶۳۹-۶۳۸].

در میان روش‌های گوناگون برای ساخت βX ، روش ساختن βX با اضافه کردن نقاط جدید متناظر با هر z -ابرفیلتر آزاد^{۴۲} روی X به مجموعه X ، در مرجع [۸، بخش ۵، ۶] معرفی شده است. با استفاده از مفهوم فیلترها، ثابت می‌شود $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ شامل زیرفضایی یکرخت با $\beta\mathbb{N}$ می‌باشد؛ به این معنی که $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ یک کپی از $\beta\mathbb{N}$ را در بر می‌گیرد [۸، صص ۹۰-۹۱].

در پایان، با بررسی یک مثال، نکات جالب دیگری را در خصوص فشردسازی استون-چنخ، یادآور می‌شویم. فضای $[0, 1]$ را با توپولوژی زیرفضایی از $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. با اضافه کردن نقطه 0 به این بازه، فضای فشرد $[0, 1]$ به دست می‌آید. روشن است که مجموعه‌های باز در $[0, 1]$ ، یا در $(0, 1]$ باز هستند یا متمم آنها، فشرد می‌باشد. لذا، فشردسازی تک نقطه‌ای فضای $[0, 1]$ برابر است با $[0, 1]$. ممکن است در ابتدا به نظر آید که فشردسازی استون-چنخ

⁴¹ Pospíšil ⁴² Free z-ultrafilter

فضای $(0, 1]$ نیز برابر است با $[0, 1]$! این مطلب، درست نیست. به عنوان مثال، تابع $f: (0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ با ضابطه $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ، تابعی پیوسته و کراندار است اما ملاحظه می‌شود که این تابع، قابل توسیع به تابعی پیوسته روی $[0, 1]$ نخواهد بود. لذا طبق قضیه فشردسازی، فشردسازی استون-چنخ $(0, 1]$ ، بازه $[0, 1]$ نیست. در واقع، می‌دانیم که $(0, 1]$ با فضای $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ یکریخت است. لذا فشردسازی استون-چنخ آنها نیز، یکریخت می‌باشد. ثابت می‌شود که $\beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ فشرد و همبند است و $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ ، اجتماع دو مجموعه یکریخت $\beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ و $\beta\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{R}^-$ است. همچنین داریم

$$|\beta\mathbb{R}| = |\beta\mathbb{N}| = 2^c$$

که در آن، c عدد اصلی $\mathbb{R}$ و برابر با $2^{\aleph_0}$ می‌باشد. لذا $|\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}| = 2^c$ [۸، صص ۹۱-۹۲]. بنابراین $|\beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+| = 2^c$. به عبارت دیگر، $|\beta((0, 1]) \setminus (0, 1]| = 2^c$. در حقیقت، توصیف صریحی برای نقاط $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ و به طور مشابه، برای $|\beta((0, 1]) \setminus (0, 1]|$ وجود ندارد و وجود این نقاط، توسط اصل انتخاب، ثابت می‌شود.

۵. تشکر و قدردانی

در اینجا شایسته است مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به دبیر محترم تخصصی و داوران بزرگوار این مقاله که با پیشنهادهای موثر خود، به بهبود کیفیت مقاله، کمک شایانی نمودند؛ ابراز دارم.

مراجع

- [1] P. S. Alexandroff, Über die Metrisation der im kleinen topologischen Räume, *Math. Ann.*, **92** (1924) 294–301.
- [2] P. S. Alexandroff, Some results in the theory of topological spaces obtained within the last twenty-five years, *Uspehi Mat. Nauk*, **15**, 25–95, in Russian, English translation: *Russian Math. Surveys*, **15** (1960) 23–83.
- [3] P. S. Alexandroff and P. Urysohn, Memoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. Nederl. Akad. Wetensch. Afd. Naturk. Sect. I*, **14** (1929) 1–96.
- [4] N. Bourbaki, *General Topology*, Addison-Wesley, 1966.
- [5] R. Chandler and G. Faulkner, *Hausdorff compactifications: A retrospective*, in *Handbook of the History of General Topology*, Edited by C. E. Aull, R. Lowen. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [6] P. Dugac, Sur la correspondance de Borel et le theoreme de Dirichlet–Heine–Weierstrass–Borel–Schoenflies–Lebesgue, *Arch. Inter. Hist. Sci.*, **39** (1989) 69–110.
- [7] M. Fréchet, Généralisation d’un theoreme de Weierstrass, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **139** (1904) 848–850.
- [8] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton, 1960. Reprinted: Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1976.
- [9] M. Kline, *Mathematical Thought: From Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1972.
- [10] T. Kuhn, Objectivity, Value Judgement and Theory Choice, In *The Essential Tension*, University of Chicago Press, (1977) 320–339.
- [11] P. Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [12] J. R. Munkres, *Topology a First Course*, Prentice-Hall, 2000.
- [13] C. Peacocke, Implicit Conceptions, Understanding and Rationality, *Philosophical Issues*, **9** (1998) 43–88.
- [14] C. Peacocke, Implicit Conceptions, the A Priori, and the Identity of Concepts, *Philosophical Issues*, **9** (1998) 121–148.
- [15] M. Raman-Sundström, A Pedagogical History of Compactness, *Amer. Math. Monthly*, **122** (2015) 619–635.
- [16] G. I. Sinkevich, On History of Epsilonics, *Antiq. Math.*, **10** (2016) 183–204.

- [17] J. Tappenden, Extending Knowledge and “Fruitful Concepts”: Fregean Themes in the Foundations of Mathematics, *Noûs*, **29** (1995) 427–467.
- [18] A. Taylor, A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **27** (1982) 233–295.
- [19] A. Tychonoff, Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Anti.*, **102** (1930) 544–561.

احسان انجیدنی

نیشابور، دانشگاه نیشابور، گروه ریاضی

anjidani@neyshabur.ac.ir

احسان انجیدنی، استادیار رشته ریاضی با تخصص نظریه عملگرها، فارغ التحصیل مقطع کارشناسی در رشته ریاضی کاربردی از دانشگاه فردوسی مشهد در سال ۱۳۸۴، فارغ التحصیل مقاطع ارشد و دکتری در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی از دانشگاه گیلان به ترتیب در سال های ۱۳۸۶ و ۱۳۸۹، عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه نیشابور از سال ۱۳۹۰ تاکنون.

