

الگوهای موزائیک تیل

کریستین جنست و اشتفن لائوریتزن
مترجم: حمید قربانی

چکیده. نوشته‌ی حاضر ترجمه‌ی مقاله‌ی زیر است:

C. Genest, S. L. Lauritzen, Les mosaïques de Thiele, *Accromath*, 11 No. 2 (2016) 24–29.

۱. مقدمه‌ی مترجم

ریاضیات و هنر ارتباطی قدیمی به درازای تاریخ بشر دارند. بشر ابتدا کشف کرد که هماهنگی^۱ به عنوان یکی از عناصر مهم آثار هنری، ریشه در رعایت تناسب‌های عددی دارد. از آن جمله می‌توان به کشف نسبت طلایی و نقش آن در جلوه‌های طبیعی و تلاش برای کاربرست آن در هنر و معماری اشاره کرد. تقارن، به قولی مهمترین مفهوم ریاضی است که به عنوان یک عنصر دیگر در آثار هنری استفاده شده است. ریاضیدانان، تقارن را در هندسه، شاعران در قافیه و هنرمندان در خلق توازن و زیبایی یافته‌اند. از آنجا که الگو^۲، یک مفهوم اساسی در هندسه و هنر می‌باشد که از طریق تکرار اشکال هندسی طبق یک نظم در کنار هم ایجاد می‌شود، لذا ایجاد الگوهای هندسی متقارن می‌تواند به عنوان کاربردی از ریاضیات در هنر تلقی شود. به عنوان نمونه می‌توان به انواع کاشی‌کاری‌های زینتی در معماری اسلامی، همانند کاشی‌کاری‌های کم نظیر صدف‌های مسجد جامع اصفهان، اشاره کرد. برقراری ارتباط ریاضیات و هنر و خلق چنین آثار جاودانی، نتیجه‌ی تلاش علمی در طول سالیان متمادی بوده است که به عنوان شاهد به یک مورد اشاره می‌شود. ابوالوفا محمد بوزجانی متولد ۳۱۹ هجری شمسی، ریاضیدان و منجم سرشناس ایرانی در کتاب خود 'بما یحتاج الیه الصانع من الاعمال الهندسه' گزارش داده است که در یک گردهمایی بین هندسه‌دانان^۳ و هنرمندان در بغداد شرکت کرده است. گویی گردهمایی‌های علمی متداول امروزی، در دوران طلایی تمدن اسلامی امری نیز رایج بوده است. در ادامه، ترجمه‌ی مقاله‌ای ارائه می‌شود که در آن ایجاد الگوهای زیبای کاشی‌کاری با استفاده از مفهوم همنهشتی، مورد بحث قرار گرفته است. چنین الگوهایی می‌تواند، به عنوان مثالی از ارتباط ریاضیات و هنر در نظر گرفته شود.

عبارات و کلمات کلیدی. اعداد صحیح گاوسی، اعداد مختلط، مانده ی درجه ی دوم به پیمانه ی p ، موزائیک، همنهشتی.

دبیر تخصصی رابط: محمدرضا پوریایولی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۱۳

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.109316.1266>

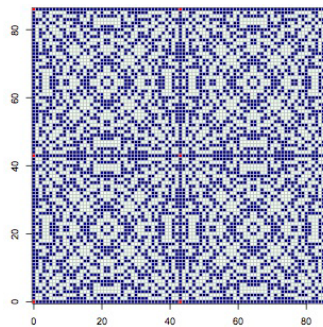
¹Harmony ²Pattern ³Geometers

۲. چکیده‌ی مقاله

ستاره‌شناس، آماردان و بیمه‌سنج^۴ دانمارکی توروالد نیکولای تیل، یک روش برای ایجاد خودکار الگوهای بسیار زیبای موزائیک، همانند شکل ۱، با استفاده از مفهوم مانده‌ی درجه دوم روی مجموعه‌ی اعداد صحیح گاوس ارائه کرده است. در این مقاله به چگونگی تولید چنین الگوهایی، پرداخته خواهد شد.

۳. مقدمه

موزائیک (کاشی‌کاری) مجموعه‌ای از مکعب‌های کوچک و یا قطعه‌های رنگارنگ از مواد مختلف است که چینش آنها کنار هم باعث ایجاد یک الگوی زینتی می‌شود. تزئین کف، دیوار، سقف و یا مجسمه با استفاده از موزائیک در عهد باستان بسیار محبوب بوده و در بستر زمان طی قرون وسطی و دوره‌ی رنسانس ادامه یافته است. هنر کاشی‌کاری که بعد از یک دوره، تقریباً محو شده بود، دیگر بار محبوبیت خود را طی جنبش هنری قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم معروف به 'هنر نو'^۵ بازیافت. اکتشافات علمی پس از آن، جذابیتی شدید در عموم به وجود آورد و بسیاری از هنرمندان (شاعران، موسیقیدانان، نقاشان و غیره) این جذابیت را با دادن ابعاد ریاضی به کار خود انتقال دادند [۱]. نظم ظریف، حاصل از چینش تعداد زیادی کاشی در کنار هم که در قالب یک الگوی کاشی‌کاری، زینت‌بخش برخی خانه‌ها و ساختمان‌های عمومی است، فقط یکی از نتایج چنین تحقیقات زیبایی‌شناختی است.



شکل ۱: مانده‌ی درجه دوم به پیمانه‌ی ۴۳.

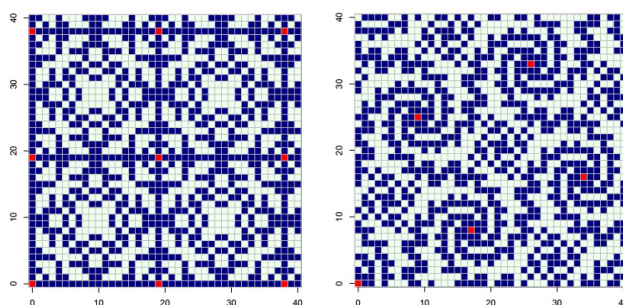
توروالد نیکولای تیل^۶ (۱۸۳۸-۱۹۱۰) به سهم خود به جنبش هنر نو به این‌صورت کمک کرد که برای اولین بار نشان داد، چگونه می‌توان با استفاده از همنهشتی در مجموعه‌ی اعداد صحیح گاوسی موزائیک‌های بسیار زیبایی تولید کرد. شکل ۲ الگوهای کاشی‌کاری‌ای را نشان می‌دهد که او برای اولین بار در سال ۱۸۷۳ در کنفرانس دانشمندان علوم طبیعی حوزه‌ی اسکاندیناوی در کپنهاگ ارائه داد. طرح سنگ‌فرش شکل ۳، نیز منتسب به اوست که در تالار ورودی وزارت دفاع دانمارک در کپنهاگ، استفاده شده است. تکنیک ساخت موزائیک تیل، علاوه بر تولید نتایج زیبا، ساده و دارای ایده‌ای خلاقانه مبتنی بر مفهوم مانده‌ی درجه دوم مختلط است که آن را در دو مرحله توضیح خواهیم داد. هدف تدوین و فرموله کردن سه پازل حل نشده است تا کشف کنیم چگونه الگوهایی نظیر سنگ‌فرش شکل ۳ طراحی شده‌اند.^۷

^۷ (مترجم: اتو لارسن که معلم یک دبیرستان در شهر آرهوس و همزمان شاگرد تیل در دانشگاه بود، در دفتر خاطرات‌اش مربوط به سال ۱۹۴۲ می‌نویسد، "تیل در خانه‌اش، اجاق گازی ساخته بود که با الگویی شبیه الگوی ارائه شده در سخنرانی‌اش در کنفرانس سال ۱۸۷۳، تزئین شده بود." همچنین او نوشته است، "سنگ‌فرش یکی از تالارهای اصلی اولین شرکت بیمه

^۴ Actuary ^۵ Art Nouveau ^۶ Thorvald Nicolai Thiele

۴. توروالد نیکولای تیل

توروالد نیکولای تیل در ۲۴ دسامبر ۱۸۳۸ در کپنهاگ به دنیا آمد و در ۲۶ سپتامبر ۱۹۱۰ در سن ۷۱ سالگی از دنیا رفت. نام او از پدرخوانده‌اش^۸ که مجسمه‌سازی دانمارکی با شهرت بین‌المللی است، گرفته شده است. بعد از یک سابقه تحصیلی درخشان، او بین سال‌های ۱۸۷۵ تا ۱۹۰۷ دارای کرسی استاد نجوم در دانشگاه کپنهاگ و همزمان مدیر رصدخانه‌ی دانشگاه بود. او یکی از پیشگامان آمار ریاضی و اولین فردی است که نظریه حرکت براونی را ارائه داده است^۹. همچنین وی تابع انباشتک^{۱۰} و تابع درستنمایی را معرفی کرده است^{۱۱}. او از موسسان اولین شرکت بیمه در دانمارک به نام هفنی^{۱۲} به سال ۱۸۷۲ و مدیر علمی آن تا سال ۱۹۰۱ و همچنین رئیس هیات مدیره این شرکت از سال ۱۹۰۳ تا هنگام مرگش در سال ۱۹۱۰ بود. دو سیارک به افتخار او نامگذاری شده است که یکی از آنها توسط پسرش هولگر^{۱۳}، که خود ستاره‌شناس مشهوری است، کشف شده است.



شکل ۲: دو موزائیک ارائه شده توسط تیل در کنفرانس ۱۸۷۳.



شکل ۳: سنگ‌فرش تیل در تالار ورودی وزارت دفاع دانمارک واقع در کپنهاگ، هولمز کانال ۹.

خصوصی در کپنهاگ به کمک چنین الگویی ایجاد شده است. نویسندگان این مقاله، توضیح می‌دهند، تیل چگونه توانسته است، چنین الگوهایی را تولید کند. به عنوان یک نمونه‌ی دیگر از این الگوها، سنگ‌فرش شکل ۳، را ملاحظه کنید. رمز گشایی این الگوها، همان کشف سه پازلی است که نویسندگان مقاله به آن اشاره کرده‌اند.

^۹ (مترجم: لائوریتزن، یکی از نویسندگان این مقاله، در کتاب خود Thiele: Pioneer in Statistics, Oxford University Press, 2002 تیل را به عنوان یکی از ۱۰۰ چهره تاثیرگذار در زمینه آمار ریاضی در قرن بیستم معرفی کرده است).

^{۱۱} (مترجم: فیشر در صفحه‌ی ۲۰ کتاب خود Statistical Methods for Research Workers, 11th ed., (1950) تیل را به همراه پنج نفر دیگر شامل بیز، لاپلاس، گاوس، پیرسون و گوست (استیودنت) به عنوان تاثیرگذارترین چهره‌های علم آمار معرفی کرده است).

^۸Bertel Thorvaldsen ^{۱۰}Cumulative Moment (or Cumulant) Function ^{۱۲} Hafnia Insurance Company ^{۱۳} Holger Thiele

۵. مانده های درجه دوم و همنهشتی در $\mathbb{Z}$

اگر $1 \leq p$ یک عدد صحیح باشد، دو عدد صحیح

$$a, b \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

را همنهشت به پیمانه p می نامیم، هرگاه تفاضل $a - b$ مضربی از p باشد، یعنی اگر $k \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشد به قسمی که $a - b = kp$. در این صورت می نویسیم:

$$a \equiv b \pmod{p}.$$

به طور خاص، عدد a با مانده ی حاصل از تقسیم آن به p همنهشت است، مثلاً $17 \equiv 1 \pmod{4}$ و $28 \equiv 0 \pmod{4}$. به علاوه گوییم، عدد طبیعی $q \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ یک مانده ی درجه دوم به پیمانه p است، اگر عدد $x \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشد، به قسمی که

$$q \equiv x^2 \pmod{p}.$$

در غیر این صورت گوییم، q یک نامانده ی درجه دوم به پیمانه p است. در ادامه به چند مثال ساده توجه کنید: هر عدد طبیعی یک مانده ی درجه دوم به پیمانه ی ۲ است. زیرا

- اگر عدد زوج باشد، یعنی $q \equiv 0 \pmod{2}$ ، آنگاه $q \equiv 0^2 \pmod{2}$ ،
- اگر عدد فرد باشد، یعنی $q \equiv 1 \pmod{2}$ ، آنگاه $q \equiv 1^2 \pmod{2}$.

در واقع هر عدد طبیعی که با صفر یا یک به پیمانه p همنهشت باشد، یک مانده ی درجه دوم به پیمانه p است. برای مثال:

- اگر $q \equiv 0 \pmod{4}$ آنگاه $q \equiv 0^2 \pmod{4}$ ،
- اگر $q \equiv 1 \pmod{4}$ آنگاه $q \equiv 1^2 \pmod{4}$.

با این حال، اگر $q \equiv 2 \pmod{4}$ یا $q \equiv 3 \pmod{4}$ ، هیچ عدد صحیح مانند $x \in \mathbb{Z}$ وجود ندارد که $q \equiv x^2 \pmod{4}$ ، این را می توان با مثال نقض، به طور جداگانه برای حالت هایی که x زوج یا فرد است، نشان داد:

- اگر $x = 2n$ آنگاه $x^2 = 4n^2 \equiv 0 \pmod{4}$ ،
- اگر $x = 2n + 1$ آنگاه $x^2 = 4n^2 + 4n + 1 \equiv 1 \pmod{4}$.

۶. پیاده روی های تیل

شکل ۴ را در نظر بگیرید. برای شروع، ایده کاشی کاری تیل را فقط در یک راستا، مثلاً جهت افقی، مانند وقتی یک پیاده رو سنگ فرش می شود ('پیاده روی تیل')، توضیح می دهیم و سپس آن را برای سنگ فرش در دو راستا، مانند سنگ فرش یک سطح صاف (یعنی جهت های افقی و عمودی)، تعمیم خواهیم داد.

به طور کلی پیاده روی تیل به پیمانه ی p از کاشی های مربعی شکل به ضلع یک تشکیل شده است که در مختصات $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(2, 0)$ والی آخر، قرار می گیرند. کاشی قرار گرفته در مختصات $(q, 0)$ به صورت زیر رنگ آمیزی می شود:

- قرمز، اگر q با صفر به پیمانه ی p همنهشت باشد،
- آبی، اگر q یک مانده ی درجه دوم به پیمانه ی p باشد (ولی $q \not\equiv 0 \pmod{p}$)،
- سفید، اگر q یک نامانده ی درجه دوم به پیمانه ی p باشد.



شکل ۴: پیاده روی تیل به پیمانه‌ی ۴.

به عنوان مثال برای $p = 4$ ، کاشی‌هایی که در مختصات $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(2, 0)$ و $(3, 0)$ هستند به ترتیب به صورت قرمز، آبی، سفید و سفید، رنگ‌آمیزی می‌شوند و این الگو، بهمین ترتیب با دوره تناوب ۴ تا بی‌نهایت تکرار می‌شود. در واقع، برای هر مقدار دیگر $p > 1$ ، تکمیل رنگ‌آمیزی پیاده‌روی تیل، مادامی که رنگ کاشی‌های قرار گرفته در مختصات $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $\dots$ و $(p-1, 0)$ را بدانیم، آسان است، زیرا دوره تناوب این رنگ‌آمیزی p است. تعمیم قاعده‌ی رنگ‌آمیزی بالا، برای کاشی‌کاری یک سطح به روش تیل، بر اساس یک اصل مشابه می‌باشد. با فرض یک جفت عدد صحیح $p = (p_1, p_2)$ ، کاشی قرار گرفته در مختصات $q = (q_1, q_2)$ ، بسته به اینکه q یک مانده درجه دوم به پیمانه p هست یا خیر، رنگ‌آمیزی می‌شود. بنابراین لازم است، ابتدا مفهوم همنهشتی بین بردارهای دوتایی از اعداد صحیح را تعریف کنیم.

۷. تعمیم به مجموعه‌ی اعداد گاوسی

در اثر منتشر شده به سال ۱۸۰۱ از ریاضیدان، ستاره‌شناس و فیزیکدان شاخص آلمانی کارل فردریش گاوس^{۱۴} (۱۷۷۷-۱۸۵۵) به تعریف همنهشتی روی مجموعه‌هایی غیر از $\mathbb{Z}$ ، از جمله روی مجموعه‌ی زوج‌هایی از اعداد صحیح، یعنی بردارهای $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، علاقه نشان داده است. گاوس، مجموع و حاصل ضرب هر دو عنصر $a = (a_1, a_2)$ ، $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ را به صورت زیر تعریف کرده است:

$$(1) \quad \begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \\ (a_1, a_2) \times (b_1, b_2) &= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1), \end{aligned}$$

که در آن، مجموع تعریف شده، همان مجموع دو بردار است، ولی ضرب، به صورت جالبی ریشه در مبحث اعداد مختلط دارد (بخش ۸ را ببینید). هرگاه مجموعه‌ی $\mathbb{Z}^2$ ، معروف به مجموعه‌ی اعداد گاوسی، با این دو عملگر تجهیز شود، همه خواص لازم برای تعریف مفهوم همنهشتی و مانده‌ی درجه‌ی دوم، شبیه آنچه برای $\mathbb{Z}$ تعریف شد، را دارا خواهد بود. برای اعداد صحیح مثبت p_1 و p_2 که هر دو همزمان صفر نیستند، دو عضو $a, b \in \mathbb{Z}^2$ را همنهشت به پیمانه‌ی $p = (p_1, p_2)$ می‌گوییم، اگر عدد $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ به قسمی وجود داشته باشد که $a - b = kp$. به عبارت دیگر $a \equiv b \pmod{p}$ ، اگر و تنها اگر:

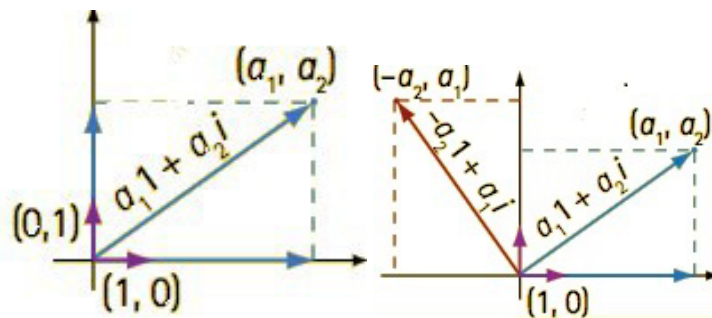
$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (k_1 p_1 - k_2 p_2, k_1 p_2 + k_2 p_1).$$

به علاوه، گوئیم زوج $q = (q_1, q_2)$ یک مانده‌ی درجه دوم به پیمانه‌ی $p = (p_1, p_2)$ است، هرگاه $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ وجود داشته باشد، به قسمی که $q \equiv x^2 \pmod{p}$. به عبارت دیگر باید اعداد صحیح x_1 و x_2 را طوری بیابیم، تا داشته باشیم:

$$(q_1, q_2) \equiv (x_1^2 x_2^2, 2x_1 x_2) \pmod{p}.$$

¹⁴Carl Friedrich Gauss

۸. ارتباط با اعداد مختلط



شکل ۵: نمایش عدد مختلط $a + bi$ ، به صورت بردار (a, b) در $\mathbb{R}^2$ (سمت چپ) و تاثیر ضرب آن در عدد i (سمت راست).

عملگر تعریف شده توسط گاوس روی $\mathbb{Z}^2$ ، ارتباط نزدیکی با مفهوم اعداد مختلط دارد. می‌دانیم، هر عدد مختلط به صورت $a_1 + a_2i$ است، که در آن $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد. در واقع یک عدد مختلط را می‌توان در $\mathbb{R}^2$ ، با قرار دادن $1 = (1, 0)$ و $i = (0, 1)$ به صورت بردار $(a_1, a_2) = a_1 1 + a_2 i$ نمایش داد، که آنرا نیز، بدون نگرانی از سردرگمی، می‌توان به صورت $a_1 + a_2i$ نوشت (سمت چپ شکل ۵).
با اعمال جمع و ضرب معمولی روی عبارات جبری $a_1 + a_2i$ و $b_1 + b_2i$ ، داریم:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2i) + (b_1 + b_2i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i, \\(a_1 + a_2i) \times (b_1 + b_2i) &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)i + a_2b_2i^2 \\&= (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i,\end{aligned}$$

که در آن از تساوی $i^2 = -1$ استفاده شده است.
لازم به ذکر است، ضرب i در بردار نظیر یک عدد گاوسی، باعث دوران آن به اندازه $\frac{\pi}{2}$ ، در جهت عکس عقربه‌های ساعت و ایجاد یک بردار با طولی متفاوت، می‌شود (سمت راست شکل ۵)، یعنی:

$$(a_1 + a_2i) \times i = a_1i + a_2i^2 = -a_2 + a_1i,$$

که حاصلضرب بالا، به ازای $a_1 = 0$ ، یک عدد حقیقی و به ازای $a_2 = 0$ ، یک عدد انگاری^{۱۵} است.
عملگرهای تعریف شده روی مجموعه اعداد مختلط، دقیقاً همانهایی هستند که پیش‌تر در رابطه‌ی (۱) روی $\mathbb{Z}^2$ تعریف شدند، بنابراین مجموعه‌ی $\mathbb{Z}^2$ ، تجهیز شده با دو عملگر مذکور را اغلب با نماد $\mathbb{Z}[i]$ نشان می‌دهیم.

۹. کاشی‌کاری تیل

همانند 'پیاده‌روی تیل' که کاشی‌کاری در یک راستا انجام می‌شد، کاشی‌کاری تیل به پیمانه‌ی $p = (p_1, p_2)$ از مربع‌هایی به ضلع یک تشکیل شده است، با این تفاوت که حالا یک سطح صاف (مثلاً کف) را کاشی می‌کنیم.
کاشی واقع در مختصات $q = (q_1, q_2)$ ، به صورت زیر رنگ‌آمیزی می‌شود:

- قرمز، اگر q با صفر به پیمانه‌ی p هم‌نهشت باشد،

¹⁵Imaginary Number

- آبی، اگر q یک مانده‌ی درجه دوم به پیمانه‌ی p باشد (ولی $q \not\equiv 0 \pmod{p}$).
- سفید، اگر q یک نامانده‌ی درجه دوم به پیمانه‌ی p باشد.

برای مثال، اگر $p = (2, 0)$ داریم:

$$(a_1, a_2) \equiv (b_1, b_2) \pmod{p} \Leftrightarrow a_1 - b_1 = 2k_1, a_2 - b_2 = 2k_2,$$

که معادل این است که گفته شود، $a_1 \equiv b_1 \pmod{2}$ و $a_2 \equiv b_2 \pmod{2}$. بنابراین برای همه‌ی $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ داریم:

$$(a_1, a_2) \equiv (0, 0), (0, 1), (1, 0) \text{ or } (1, 1) \pmod{p = (2, 0)}.$$

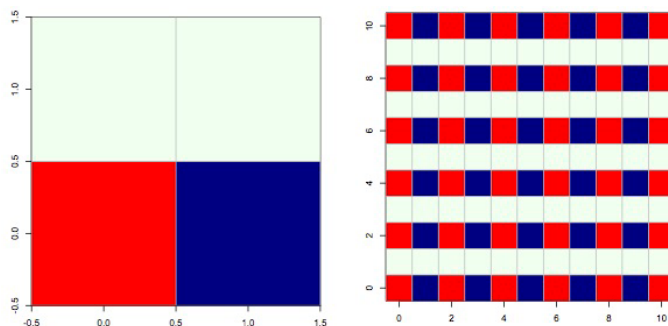
بنابراین برای ایجاد کاشی‌کاری تیل متناظر، کافی است تعیین کنیم که آیا زوج‌های $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(1, 1)$ مانده‌ی درجه دوم مختلط به پیمانه‌ی $p = (2, 0)$ هستند یا خیر؟

بنابراین با فرض $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$ ، باید بررسی کنیم که آیا $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ به قسمی وجود دارند که:

$$a_1 \equiv x_1^2 - x_2^2 \pmod{2}, a_2 \equiv 2x_1x_2 \pmod{2}.$$

اگر $a_2 = 0$ ، کافی است $x_1 = a_1$ و $x_2 = 0$ اختیار شود. اما اگر $a_2 = 1$ ، نمی‌توان مقداری برای x_1 یا x_2 یافت، زیرا $2x_1x_2 \equiv a_2 = 1 \pmod{2}$ بدون در نظر گرفتن مقادیر $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ ، همیشه یک عدد زوج است و لذا هیچگاه نمی‌توان انتظار داشت $2x_1x_2 \equiv a_2 = 1 \pmod{2}$.

شکل ۶، نتایج بالا را نمایش می‌دهد. همانطور که گفته شد، کاشی‌های واقع در مختصات $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(1, 1)$ مایه‌ی اصلی الگو را تعیین می‌کنند، یعنی الگوی سمت راست شکل (۶)، توسط تکرار قطعه‌ی سمت چپ، به عنوان یک واحد، در دو جهت افقی و عمودی، با شروع از مختصات $(0, 0)$ ، تولید شده است.



شکل ۶: کاشی‌کاری تیل به پیمانه‌ی $p = (2, 0)$.

دو الگوی کاشی‌کاری ارائه شده توسط تیل در کنفرانس ۱۸۷۳، به کمک برنامه‌نویسی در نرم افزار آماری مشهور و رایگان R^{۱۶} بازتولید و در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. الگوی سمت چپ متناظر با ورودی $p = (19, 0)$ و الگوی سمت راست متناظر با ورودی $p = (17, 8)$ در این برنامه می‌باشد (بخش ۱۱ زیر را ببینید). هر دو الگو درجه‌ای از نظم را نشان می‌دهند، نظم الگوی سمت چپ مربوط به تناوب افقی و عمودی، در حالی که تشخیص نظم موجود در الگوی سمت راست مشکل‌تر است.

¹⁶<https://www.r-project.org>

۱۰. چه تعداد کاشی رنگ شده؟

بر اساس تجربه، زیباترین الگوی موزائیک تیل، مربوط به موزائیک‌هایی است که $p = (p_1, p_2)$ نظیرشان، یک عدد گاوسی اول باشد (الگوی کمتر زیبای شکل ۸ را با الگوهای زیباتر دیگر مقایسه کنید). توجه کنید اگر $p = (p_1, p_2)$ اول باشد، رابطه‌ی زیر برای همه‌ی $a, b \in \mathbb{Z}^2$ برقرار است:

$$a \times b \equiv (0, 0) \pmod{p} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{p} \text{ or } b \equiv 0 \pmod{p}.$$

می‌توان نشان داد، که $p = (p_1, p_2)$ اول است، اگر و تنها اگر یکی از سه شرط زیر برقرار باشد:

- اگر $p_1 \geq 1$ و $p_2 \geq 1$ ، آنگاه $p_1^2 + p_2^2$ ، یک عدد اول (به مفهوم متداول) باشد،
- اگر $p_1 = 0$ و $p_2 \geq 1$ ، یک عدد اول و $|p_2| \equiv 3 \pmod{4}$ باشد،
- اگر $p_2 = 0$ و $p_1 \geq 1$ ، یک عدد اول و $|p_1| \equiv 3 \pmod{4}$ باشد.

بنابراین بردارهای $(19, 0)$ ، $(17, 0)$ و $(17, 8)$ اعداد گاوسی اول هستند، ولی چون $(1, -2) \times (1, 2) = (5, 0)$ ، پس $(5, 0)$ اول نیست.

ضمناً می‌دانیم، اگر p اول باشد، نصف اعداد بین ۱ و $p-1$ مانده‌های درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی p هستند. به عبارت دیگر، تعداد $\frac{p-1}{2}$ کاشی از الگوی اصلی کاشی‌کاری به پیمانه p آبی هستند.

به طور مشابه، با بکارگیری مفاهیم نظریه‌ی اعداد، می‌توان نشان داد، اگر $p = (p_1, p_2)$ یک عدد گاوسی اول باشد، به قسمی که $p_1 \geq 1$ و $p_2 \geq 1$ ، آنگاه $(p_1^2 + p_2^2 - 1)/2$ ، کاشی از کاشی‌های تیل به پیمانه‌ی p ، آبی هستند.

۱۱. تولید موزائیک تیل با نرم افزار R

موزائیک تیل را می‌توان به راحتی با استفاده از یک برنامه نوشته شده توسط سورن بول^{۱۷}، استاد ریاضیات و آمار در دانشگاه آلبورگ^{۱۸}، تولید کرد. کدهای برنامه با مراجعه به آدرس زیر در دسترس است:

<http://www.math.mcgill.ca/cgenest/Thiele.R>

بعد از انتقال برنامه به نرم افزار R، می‌توان یک موزائیک تیل با اندازه $(n+1) \times (n+1)$ با پارامترهای کنترل کننده (p, n) ، که ورودی‌های برنامه هستند، تولید کرد. برای مثال، شکل ۲ مربوط به پارامترهای $(19, 40)$ و $(17, 40)$ است. موزائیک شکل ۷ مربوط به پارامتر $(71, 71)$ است. لازم به ذکر است، نرم افزار R با سیستم‌های عامل ویندوز، یونیکس و مک سازگار است.

۱۲. تعبیر هندسی

به منظور درک بهتر این که چرا موزائیک تیل منظم است، عناصر $\mathbb{Z}^2$ را به صورت بردارهایی با مختصات صحیح در نظر گرفته و ملاحظه کنید که طبق تعریف، دو بردار $a = (a_1, a_2)$ و $b = (b_1, b_2)$ متعلق به $\mathbb{Z}^2$ همنهشت به پیمانه‌ی $p = (p_1, p_2)$ هستند، اگر و تنها اگر:

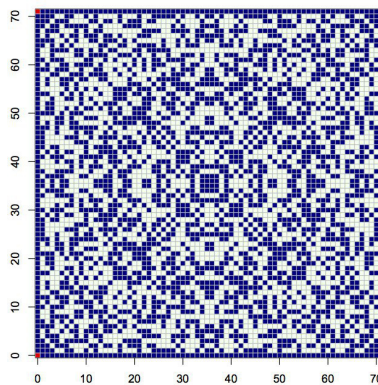
$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (k_1 p_1 - k_2 p_2, k_1 p_2 + k_2 p_1) = k_1 (p_1, p_2) + k_2 (-p_2, p_1),$$

به عبارت دیگر این دو بردار همنهشت هستند، اگر و تنها اگر تفاضل آنها برابر با مجموع مضربی از بردار $p = (p_1, p_2)$ و مضربی از بردار عمود بر p ، یعنی $p' = (-p_2, p_1)$ باشد.

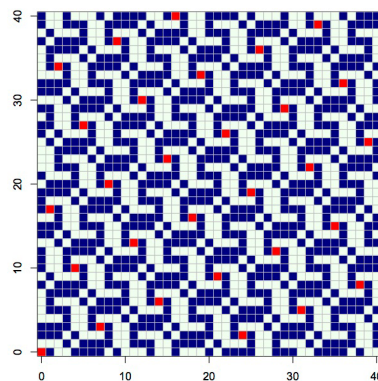
¹⁷Søren Buhl ¹⁸Aalborg University

به بیان هندسی، بردارهای a و b به پیمانه‌ی p هم‌نهشت‌اند، اگر حرکت از انتهای a به انتهای b (یا بالعکس) به وسیله‌ی تعداد متناهی از انتقال‌های p ، $-p$ ، p' و $-p'$ ممکن باشد. خصوصاً هر بردار دلخواه با بردار دیگری که انتهای آن داخل مربع به رئوس $(0,0)$ ، p ، p' و $p+p'$ واقع است، هم‌نهشت می‌باشد. این خاصیت در $\mathbb{Z}^2$ معادل باقیمانده‌ی خارج قسمت تقسیم به p در $\mathbb{Z}$ است.

با نگاه مجدد به الگوی سمت راست شکل ۲ ملاحظه می‌شود که مایه‌ی اصلی الگو، بین چهار نشان قرمز در مختصات $(9, 25)$ ، $(17, 8)$ ، $(26, 33)$ و $(34, 16)$ واقع شده است.



شکل ۷: موزائیک تیل به پیمانه‌ی $(71, 0)$ که به عنوان طرحی برای سنگ‌فرش تالار ورودی وزارت دفاع دانمارک (شکل ۳)، به کار گرفته شده است.



شکل ۸: مانده‌های درجه دوم به پیمانه‌ی $(2 + 5i) \times (1 - i) = 7 + 3i$. در واقع این موزائیک با عددی تولید شده است که اول نیست.

۱۳. نگاهی دوباره به طرح سنگ‌فرش

سنگ‌فرش شکل ۳ یک موزائیک تیل به پیمانه‌ی $(71, 0)$ است، که الگوی کامل آن در شکل ۷ آمده است. اگرچه ساختمان اکنون متعلق به وزارت دفاع دانمارک است، ولی ساختمانی که برای اولین استفاده از این الگوی سنگ‌فرش در آن دیده شد، مربوط به شرکت بیمه هفنیا بوده است. تیل به عنوان رئیس هیئت مدیره این شرکت، بر روند تکمیل ساختمان تا چند ماه قبل از مرگش در سن ۷۱ سالگی نظارت داشته است. به نظر می‌رسد، انتخاب موزائیک تیل به

پیمانه‌ی (۷۱، ۷۱)، به عنوان طرح سنگ‌فرش تالار این ساختمان، بعد از مرگش و به خاطر گرامیداشت یاد او بوده است. در ادامه به سه نکته راجع به سنگ‌فرش شکل ۳ اشاره می‌شود:

- هنگام اجرای سنگ‌فرش از روی الگو اشتباه رخ داده است، به این معنی که اگرچه زوج (۲۷، ۳۵) یک مانده‌ی درجه دوم مختلط به پیمانه‌ی $p = (۷۱, ۰)$ است، ولی کاشی قرار گرفته در این مختصات، سفید است. دلیل آن شاید اشتباه محاسباتی باشد. همه قراین به سود این باور است، خصوصاً این که در کل سنگ‌فرش فقط هفت بار چنین خطایی تکرار شده است.
 - با مقایسه‌ی شکل‌های ۳ و ۷، ملاحظه می‌کنیم که کاشی قرار گرفته در مختصات (۲۵، ۷۵) باید سفید باشد، در صورتی که در اجرا قرمز است.
 - چرا کاشی‌های مطابق با مانده‌های درجه دوم با قرمز و بقیه با سبز رنگ‌آمیزی شده‌اند؟ آیا فقط به خاطر زیبایی؟ نظم موجود در الگو چنین القا می‌کند که چنین طرحی دلالت بر خاصیت ریاضی دیگری از این مانده‌ها دارد، ولی کدام خاصیت؟
- ممکن است آرشیو شرکت بیمه به دو سوال اول پاسخ دهد، ولی ماهیت سوال آخر ریاضی است و ممکن است برای حل آن به خواص معینی از اعداد صحیح گاوسی و مانده‌ی درجه دوم و موضوعات جالب دیگری از نظریه اعداد نیاز داشته باشیم. به هر حال جواب این سوال برای ما معلوم نیست و آن را به خوانندگان علاقه‌مند وامی‌گذاریم.

تشکر و قدردانی

بدین وسیله از نویسندگان مقاله‌ی اصلی، بابت راهنمایی‌ها حین برگردان آن از زبان فرانسه، از دست‌اندرکاران محترم این مجله، بخصوص سر دبیر محترم آن، جناب آقای دکتر عبدالهی و کارشناس محترم، سرکار خانم موسوی بابت پاسخگویی‌های سریع و با حوصله به مکاتبات، همچنین از داوران محترم بابت زحمت داوری و پیشنهادات موثر در بهبود کیفیت ترجمه، کمال امتنان را دارم. برای همگی سلامتی و توفیق بیشتر از پیشگاه خداوند بزرگ، خواستارم.

مراجع

- [1] F. Caron, À la recherche de l'idéal, *Accromath*, 1 (2006) 36-39.

حمید قربانی

دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی

hamid332000@yahoo.com

حمید قربانی متولد اردیبهشت ماه ۱۳۵۶ در شهر اصفهان است. وی در سال ۱۳۷۳ وارد مقطع کارشناسی رشته آمار دانشگاه اصفهان، در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی دانشگاه شهید بهشتی شد و سپس دکترای خود را در سال ۱۳۸۳ از دانشگاه صنعتی فرایبرگ آلمان در زمینه‌ی آمار فضایی و هندسه تصادفی دریافت کرد. هم‌اکنون استادیار گروه آمار دانشگاه کاشان می‌باشد.

