

روش‌های ریاضی و الگوریتم‌ها در فشرده‌سازی تصاویر

علی توکلی

چکیده. در این مقاله روش‌های فشرده‌سازی تصویر به ویژه روش فرکتالی را بررسی کرده‌ایم و هدف اصلی، آشنایی و گسترش آگاهی جامعه ریاضی و متخصصین مخابرات است. این روش را در مورد هر تصویری نمی‌توان استفاده کرد؛ مثلاً در فشرده‌سازی تصاویر ماهواره‌ای بیشتر از روش موجک و کانتورلت استفاده می‌شود و روش فرکتالی بیشتر برای تصاویری استفاده می‌شود که پارامتر عمق تصویر برای آنها کوچک باشد و بتوان با بلوکی کردن تصویر، با استفاده از سیستم تابع تکرار شونده آن‌ها را ناهم‌فشرده کرد.

۱. مقدمه‌ای از فشرده‌سازی تصویر

پردازش تصویر به دلیل کاربردهایی که در اینترنت، تحقیقات نجومی، پزشکی، عکسبرداری، نظریه کدگذاری و آنالیز هارمونیک دارد یکی از فعالیت‌های بین رشته‌ای است [۶، ۱۰]؛ در واقع برای ارسال یک تصویر گاهی آنقدر کیفیت را پایین می‌آوریم که اطلاعات درون عکس از بین می‌رود و پس از ارسال به وسیله تکنیک‌های کدگذاری، گیرنده باید آن را دوباره با همان کیفیت قبلی کدگذاری کند. انجام تحقیقات بین رشته‌ای یکی از فعالیت‌هایی است که می‌تواند ریاضیات را بسیار جذاب و کاربردی‌تر کند و همچنین می‌تواند به پیشرفت و گسترش سایر علوم، کمک کند. یکی از حوزه‌های تحقیقاتی مهم در پردازش تصویر، فشرده‌سازی تصویر^۱ است. مباحث فشرده‌سازی تصاویر به موضوع کاهش مقدار داده‌های مورد نیاز برای نمایش تصاویر می‌پردازد؛ اکثر فایل‌های رایانه‌ای (با محتویات متفاوت) دارای افزونگی^۲ اطلاعات می‌باشند. این نوع فایل‌ها دارای اطلاعات تکراری زیادی هستند. فایل‌های موجود بر روی اینترنت با استفاده از نرم‌افزارهایی نظیر WinZip فشرده می‌شوند. با این فشرده‌سازی مقدار بسیار زیادی از حجم فایل‌ها کاهش پیدا می‌کند تا کاربران بتوانند با سرعت مناسب اقدام به دریافت آنها نمایند. برنامه‌های فشرده‌سازی، اطلاعات تکراری موجود در فایل‌ها را بر اساس الگوریتم‌های مربوطه حذف می‌نمایند. پس با توجه به محدودیت پهنای باند و ظرفیت ذخیره‌سازی، تصاویر باید قبل از انتقال و ذخیره‌سازی فشرده شوند.

تکنیک‌های مختلفی برای فشرده‌سازی تصاویر موجود هستند. اما در بعضی موارد، این تکنیک‌ها کیفیت تصویر را کاهش می‌دهند. از الگوریتم‌های فشرده‌سازی می‌توان تکنیک فشرده‌سازی مبتنی بر تبدیل موجک^۳ و استاندارد JPEG2000 را نام برد. تبدیل موجک دارای ویژگی‌هایی است که باعث شده به طور گسترده‌ای در الگوریتم‌های پردازش تصویر استفاده شود. JPEG2000 نیز دارای ویژگی‌های قابل توجهی است که می‌توانید از آن برای تعیین مهم‌ترین بخش‌های یک تصویر

عبارات و کلمات کلیدی. فشرده‌سازی تصویر، روش فرکتالی، روش موجک، انگشت نگاری، تشخیص هویت.

دبیر تخصصی رابط: مجید فخار

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۱۶

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.107568.1257>

¹Image compression ²Redundancy ³Wavelet

استفاده نمود؛ علیرغم جالب بودن این روش اما با توجه به اینکه به طور مثال، در تصاویر ماهواره‌ای مرزهای تصویر نسبت به مناطق تصویر از اهمیت بیشتری برخوردارند از این روش به خوبی نمی‌توان در فشردسازی تصاویر ماهواره‌ای استفاده نمود. مشکل اصلی در تشخیص لبه با استفاده از تبدیل‌هایی نظیر تبدیل فوریه و یا تبدیل موجک این است که در این صورت لبه‌های استخراج شده پیوستگی لازم را ندارند و در نتیجه کیفیت تصویر دچار مشکل می‌شود. برای چنین تصاویری معمولاً از روش قابل اعتماد کانترلت^۴ استفاده می‌شود، [۸] را ببینید.

۲. الگوریتم‌ها و روش‌های فشردسازی تصویر

فشردسازی تصویر به دو روش کلی تقسیم می‌شود؛ (الف) فشردسازی بدون زیان یا بی‌اتلاف (ب) فشردسازی با زیان یا اتلافی

در فشردسازی بدون زیان، تصویر ذخیره شده بدون از دست دادن کمترین داده‌ای، خود تصویر خواهد بود درحالی‌که در فشردسازی با زیان، تصویر ذخیره شده خود تصویر اصلی نیست، بلکه شبیه آن است و اطلاعاتی را از دست داده است. فشردسازی بدون زیان با استقرار کامل و دوباره همه داده‌های اصلی که در تصویر اصلی وجود داشت، مشخص می‌شود. فشردسازی یک سند، فشردسازی بدون زیانی است که سند ذخیره شده باید درست همانند سند اولیه باشد، نه شبیه به آن. در دنیای بصری، فشردسازی بدون زیان، خود را در اختیار تصویرهایی که بخش زیادی از آنها یک رنگ خاص دارد، مثل آسمان آبی، تصویرهای ساخته شده توسط کامپیوتر و محدوده‌هایی که تنها با یک رنگ خاص پر شده‌اند و نکات قابل توجهی در بر ندارند، مثل کارتونها، گرافیک‌ها و انیمیشن سه بعدی، قرار داده است، [۹] را ببینید. پس در روش بدون زیان معمولاً از اطلاعات بازیابی شده سیگنال می‌توان به اطلاعات اولیه آن دست یافت ولی نرخ فشردسازی آن پایین است اما در تکنیک‌های مبتنی بر روش‌های با زیان، نرخ فشردسازی بالا است و می‌توان تصویری با حجمی بسیار کمتر از حجم تصویر اولیه ذخیره نمود ولی نمی‌توان از تصویر فشرد شده، تصویر اصلی را به خوبی بازیافت نمود، [۲].

الگوریتم‌های فشردسازی تصویر، سعی در کاهش انواع افزونگی‌های تصویر دارند؛ یک الگوریتم فشردسازی، بایستی اکثر ویژگی داده‌ها را حفظ کند، از پیچیدگی کمتری برخوردار باشد، قابل اجرا باشد و فرآیند فشردسازی و برعکس آن سریع باشد. برای مقایسه کمی الگوریتم‌ها، معمولاً سه پارامتر زیر را در نظر می‌گیرند که هر سه در مخابرات و الکترونیک دارای فرمول‌های مشخصی هستند و بسیار کاربرد دارند:

MSE^۵: این پارامتر یک معیار خطا مورد استفاده برای مقایسه تکنیک‌های فشردسازی تصویر مختلف است. MSE (میانگین مربع خطا) بین تصویر اصلی و فشرد شده است.

PSNR^۶: این پارامتر، (نسبت سیگنال به نویز پیک) اندازه‌گیری خطای پیک است. کیفیت تصویر با استفاده از نسبت سیگنال به نویز پیک که متداول‌ترین روش اندازه‌گیری عینی است محاسبه می‌شود [۵]. اگر مقدار PSNR بالا باشد به این اشاره می‌کند که فشردسازی خوب است، زیرا بدین معنی است که نسبت سیگنال به نویز بالاست. بنابراین، اگر بتوانیم یک طرح فشردسازی پیدا کنیم که MSE پایین‌تر و PSNR بالاتر داشته باشد، می‌توان تشخیص داد که این طرح فشردسازی بهینه است.

CR^۷: این نسبت، نسبت عددی بیت‌های مورد نیاز برای نشان دادن داده قبل از فشردسازی به تعداد بیت‌های مورد نیاز بعد از فشردسازی تعریف شده است [۷].

۱.۲. روش فرکتالی. واژه فرکتال^۸ به معنای سنگی است که به شکل نامنظم شکسته شده باشد. در سال ۱۹۶۰ بنوت مندلبروت^۹ دانشمند لهستانی، تحقیقاتی را در شناخت خود-هماندی^{۱۰}، طی مقاله‌ای با عنوان «طول ساحل بریتانیا چقدر است؟ خود متشابه‌ای آماری و بعد کسری» آغاز کرد. در سال ۱۹۷۵ مندلبروت برای مشخص کردن شیئی که بُعد

^۴Contourlet ^۵Mean square error ^۶Peak signal to noise ratio ^۷Compression ratio ^۸Fractal ^۹Benoit Mandelbrot ^{۱۰}Self- similarity

هاوسدورف-بیسکوچ آن بزرگ‌تر از بعد توپولوژیک آن است کلمه «فرکتال» را ابداع کرد. پیش از اینکه مندلبروت این واژه را ابداع کند، برای چنین اشکالی، از واژه «منحنی‌های هیولایی» استفاده می‌شد. فرکتال ساختاری است که هر جزء از آن با کل متشابه است. فرکتال موجودی هندسی است که قوانین کلی حاکم بر آن وابسته به مقیاسی که در آن کار می‌کنیم نیست. کشف مفاهیم فرکتالی ابزاری نیرومند در اختیار دانشمندان برای همسنگی پدیده‌های پیچیده طبیعی مانند گیاهان، کوه‌ها، کرات آسمانی، دماغه‌ها و خلیج‌ها، قرار داد. برای نمونه می‌توان شکل رودخانه‌های رشته کوه‌های البرز را با شکل رودخانه‌های کوه‌های زاگرس مقایسه کرد و یا می‌توان تغییرات فعالیت‌های لکه‌های خورشیدی در زمان را توصیف و با تغییرات دمای جو زمین سنجید. از فرکتال‌های معروف می‌توان به فرکتال کانتور، مجموعه مندلبروت، مثلث سرپینسکی و فرکتال جولیا اشاره کرد. هرچند که کاربرد فرکتال‌ها در بسیاری از زمینه‌های علوم کاربردی دیده می‌شود، ساخت یک فرکتال از نظر ریاضی با استفاده از آنالیز اعداد مختلط صورت می‌گیرد و عملی کردن آن با استفاده از یک برنامه تحت نرم افزار Matlab امکان‌پذیر است، [۱] را ببینید.

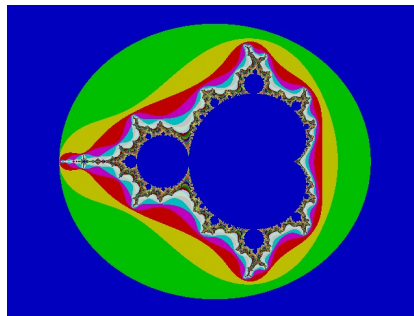
تعریف ۱.۲. فرض کنید (z_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط و f نیز یک تابع مختلط مقدار باشد به طوری که $z_{n+1} = f(z_n)$ ؛ در اینصورت دنباله (z_n) را یک دنباله بازگشتی تعریف شده توسط تابع f گوئیم.

دنباله‌های بازگشتی دارای شکل کلی $z_{n+1} = f(z_n)$ هستند که مقدار بعدی این الگوی تکراری از قرارداد مقدار قبلی در ضابطه تابع به دست می‌آید. در این الگوها عمدتاً از اعداد مختلط ثابتی مثل c استفاده می‌شود که در آن c طیفی از اعداد مختلط ثابت است که بیانگر شرایط اولیه می‌باشند.

مثال ۲.۲. فرم کلاسیک تابع مندلبروت به صورت $f(z) = z^2 + c$ است که مجموعه مندلبروت بیان شده با آن در شکل ۱ آورده شده است. کد Matlab که این شکل را ایجاد می‌کند در زیر آورده می‌شود.

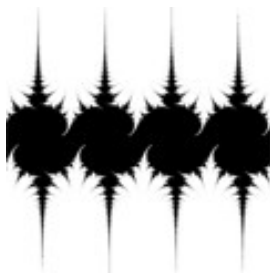
```
col = ۲۰;
m = ۴۰۰;
cx = -۰٫۶;
cy = ۰;
l = ۱٫۵;
x = linspace(cx - l, cx + l, m);
y = linspace(cy - l, cy + l, m);
[X, Y] = meshgrid(x, y);
Z = zeros(m);
C = X + i * Y;
for k = ۱:col;
    Z = z۲ + c;
```

```
W = exp(-abs(Z));
end
colormap copper(۲۵۶);
pcolor(W);
shading flat;
axis('square','equal','off');
```

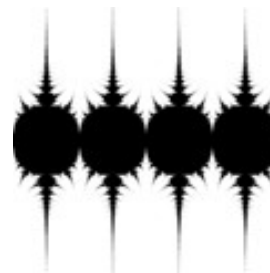


شکل ۱. فرکتال مجموعه‌ای مندلبروت

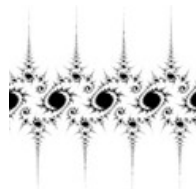
مثال ۳.۲: تابع مختلط مقدار $f(z) = c \sin(z)$ و دنباله بازگشتی تعریف شده توسط این تابع، یعنی $z_{n+1} = c \sin(z_n)$ را در نظر بگیرید. برای c های مختلف و با استفاده از نرم‌افزار *Matlab* بوسیله ۵۰ تکرار و روی بازه $[-2\pi, 2\pi]$ از محور حقیقی و موهومی، فرکتال‌های زیر به دست آمده‌اند.



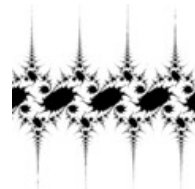
(ب) $c = ۱ + ۰/۱i$



(آ) $c = ۱$



(د) $c = ۱ + ۰/۳i$



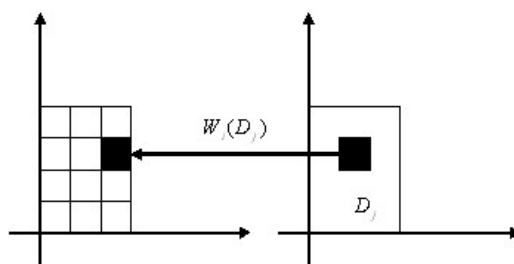
(ج) $c = ۱ + ۰/۲i$

۲.۲. ایده تابع تکرارشونده در فشرده سازی فرکتالی. سیستم‌های تابع تکرار شونده یا IFSها^{۱۱}، روشی برای ساخت فرکتال‌ها هستند. به بیان دیگر، ارائه ریاضی‌وار تصاویر فرکتالی را سیستم تابع تکرارشونده می‌گویند. این تولیدات همیشه خودمتشابه هستند.

مایکل بارنزلی^{۱۲}، در سال ۱۹۸۷، فشرده‌سازی فرکتالی را ابداع کرد. شناخته شده‌ترین الگوریتم فشرده‌سازی فرکتالی عملی توسط بارنزلی ابداع شد. ارنالد جاکوین^{۱۳}، دانشجوی فارغ التحصیل بارنزلی، در سال ۱۹۹۲، اولین الگوریتم خودکار را با نرم‌افزار پیاده‌سازی کرد. هم اکنون، متداول‌ترین روش کدگذاری فرکتالی که تبدیل فرکتال نامیده می‌شود، بوسیله مایکل بارنزلی با سیستم‌های تکرارشونده ایجاد شده است. تبدیل بارنزلی اولین الگوریتم عملی استفاده شده برای شرح ریاضیاتی یک تصویر واقعی با توجه به ویژگی‌های فرکتالی آن است. همه روش‌های مبنی بر تبدیل فرکتالی از سیستم‌های تابع تکرار شونده استفاده می‌کنند، [۴، ۶] را ببینید.

الگوریتم پیشنهادی زیر برای کد کردن فراکتالی بکار می‌رود:

- الف) تصویر به سلول‌های کوچک برد $\{R_i\}$ بخش‌بندی می‌شود که بهتر است مربعی باشد.
- ب) تصویر با یک دنباله از سلول‌های دامنه پوشیده می‌شود. اندازه آنها ممکن است بزرگ باشد.
- ج) برای هر سلول برد یک تابع آفین نظیر می‌شود که سلولی از دامنه را به آن می‌برد.
- د) کدی که برای تصویر کددار شده فراکتالی ساخته می‌شود شامل یک لیست از اطلاعاتی است که برای هر سلول برد بدست آمده است (محل هر سلول برد) و این اطلاعات از نگاشتی بدست می‌آید که سلولی از دامنه را به آن می‌برد. حتی این اطلاعات می‌تواند کد رنگ باشد. (W_i توابع انقباضی هستند).



شکل ۳. دست چپ بلوک‌های دامنه و دست راست بلوک‌های برد

در شکل (۳)، بلوک‌های برد در کنار هم تصویر را به صورت منظم و کامل می‌سازند. بلوک‌های دامنه به صورت نامنظم ممکن است هر قسمتی از تصویر باشند. یک بررسی دقیق نشان می‌دهد که به تعداد پیکسل‌های تصویر، بلوک دامنه وجود دارد. بنابراین محاسبات محدودی پیش رو داریم. علت استفاده از فرکتال‌ها برای کدگذاری تصاویر دو فرضیه مهم است:

- الف) مناظر طبیعی زیادی این جزئیات را در ساختار تفصیلی خود دارا هستند.
- ب) می‌توان یک IFS پیدا کرد که با تقریبی نزدیک و با کمترین تبدیل، یک منظره را تولید کند.

لم ۴.۲. اگر تصویر با ابعاد $N \times N$ داشته باشیم و ابعاد بلوک دامنه و برد به ترتیب $2n \times 2n$ و $n \times n$ باشند و همچنین زمان لازم برای بررسی تطابق یک بلوک دامنه و یک بلوک برد t در نظر گرفته شود، آنگاه زمان لازم برای فشرده‌سازی این تصویر از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$t = \left(\frac{N}{n}\right)^2 (N - 2n)^2 t_0.$$

¹¹Iterated function system ¹²Michael F. Barnsley ¹³Ernard A. Jacquin

□

اثبات. به [۶] مراجعه شود.

همانطور که از لم ۴.۲ پیداست زمان فشرده‌سازی تقریباً با توان ۴ ابعاد تصویر متناسب است که این باعث عدم کاربرد عملی این روش می‌شود. برای کاهش این زمان، یک روش کاستن از تعداد بلوک‌های دامنه مورد جستجو و یا جستجوی هدفمندانه است که یکی از این تحقیقات جستجوی هرمی نام دارد. (به [۴] مراجعه کنید). آنچه فشرده‌سازی به روش بالا را تضمین می‌کند کاربرد توابع انقباضی و قضیه‌ای معروف از بارنزی است. این قضیه ادعا می‌کند که می‌توان یک خانواده از نگاشت‌های انقباضی پیدا کرد که تصاویر را تقریب بزنند و یا تصاویر ارسال شده را ذخیره و بازیابی کنند.

قضیه ۵.۲. قضیه اختلال بارنزی^{۱۴}:

فرض کنید $\{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ توابع انقباضی روی $\mathbb{R}^n$ باشند بطوریکه

$$\forall i = 1, 2, \dots, m \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n : |W_i(x) - W_i(y)| \leq c|x - y|, \quad 0 < c < 1$$

همچنین فرض کنید $E \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه غیر تهی فشرده باشد. در این صورت داریم

$$d(E, F) \leq d\left(E, \bigcup_{i=1}^m W_i(E)\right) \frac{1}{1-c}$$

که در آن F مجموعه پایه‌ی W_i و d فاصله هاسدورف می‌باشند.

□

اثبات. به [۴] مراجعه شود.

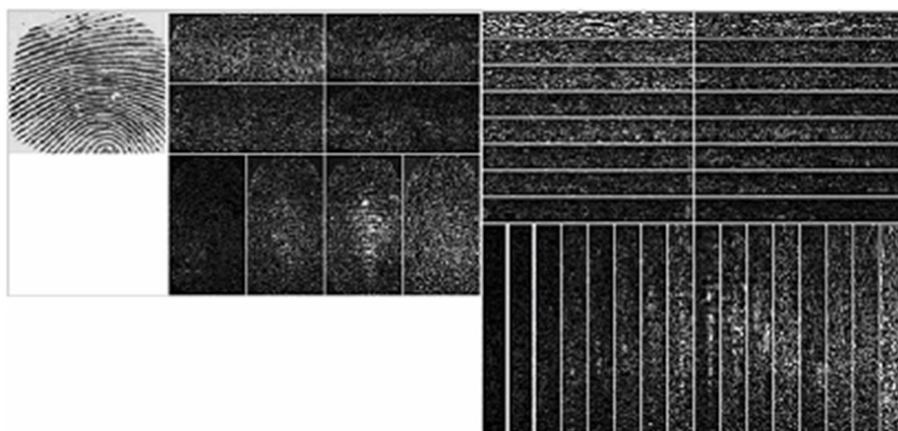
۳.۲. کاربرد در انگشت نگاری و تشخیص چهره. تا اواخر قرن ۱۹ شیوه کشف جرایم و دستگیری مجرمین در کشورهای مختلف، چندان تفاوتی با هم نداشت و افراد پلیس پس از حضور در محل وقوع جرم و استماع شهود و تهیه صورت مجلس، در صورت امکان به دستگیری مجرم یا متهم اکتفا می‌نمودند. سابقه تاریخی بررسی خطوط برجسته سرانگشتان و کف دست و پا به صورت علمی به نیمه دوم قرن هفدهم میلادی بر می‌گردد. در سال ۱۶۸۴ "دکتر نهیما گریو"^{۱۵} در انگلستان و در سال ۱۶۸۶ "دکتر مارسلو مالپیگی"^{۱۶} در ایتالیا این خطوط برجسته و نیز منافذ ریز پوست کف دست و پا را از دیدگاه پزشکی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۱۷۸۸ دانشمند دیگری به نام "مایر" از نظر تشریحی توضیحاتی درباره خطوط پوستی داد. وی عقیده داشت که هرگز این خطوط در دو نفر مانند هم نیستند.

برای بررسی علمی، در ابتدا اثر انگشت اسکن شده به وسیله الگوریتم بخش‌بندی مورد تجزیه تحلیل قرار گرفته و بخش اصلی تصویر و حاشیه از هم تفکیک می‌شوند. مرحله بعدی تهیه میدان جهتدار اثر انگشت می‌باشد. عمل بهبود تصویر اثر انگشت با فیلتر گابور بهینه سازی شده انجام می‌شود. بهینه سازی فیلتر گابور به این صورت انجام می‌شود که پهنای باند فیلتر متناسب با ویژگی‌های تصویر در هر محل تغییر می‌کند. در ادامه، تصویر بهبود یافته به تصویر دودویی تبدیل و عمل نازک‌سازی بر روی آن انجام می‌شود. از روش نوینی برای استخراج نقاط منحصربفرد؛ شناسایی نوع آنها؛ استخراج نقطه مرجع و زاویه مرجع برای هر اثر انگشت استفاده می‌شود. نقاط منحصربفرد برای گروه‌بندی اثر انگشت به پنج گروه مجزا مورد استفاده قرار می‌گیرند. تصویر نازک‌سازی شده وارد نرم افزار Matlab می‌شود و توسط برنامه فشرده‌سازی، به کد تبدیل می‌شود. سپس با حجم کم فشرده شده و انتقال پیدا می‌کند. کد منتقل شده در مقصد طی یک فرایند ریاضی و پردازش تصویر، بازسازی شده و تصویر اصلی با اندکی خطا، استخراج می‌شود. اثر انگشت را می‌توان به عنوان یک تصویر کوچک در نظر گرفت؛ بنابراین طبیعی است که آن را به اینچ-مربع‌های 256×256 تقسیم کرد و به هر کدام، یک درجه خاکستری با مقیاس از صفر (کاملاً سفید) تا ۲۵۶ (کاملاً سیاه) داد. با این کار می‌توان داده‌های اساسی را به شکل دنباله‌ای از زوج‌های مرتب (زوج‌هایی شامل شماره پیکسل‌ها و درجه خاکستری آن‌ها) نوشت. دقت داشته باشید که از نظر ریاضی،

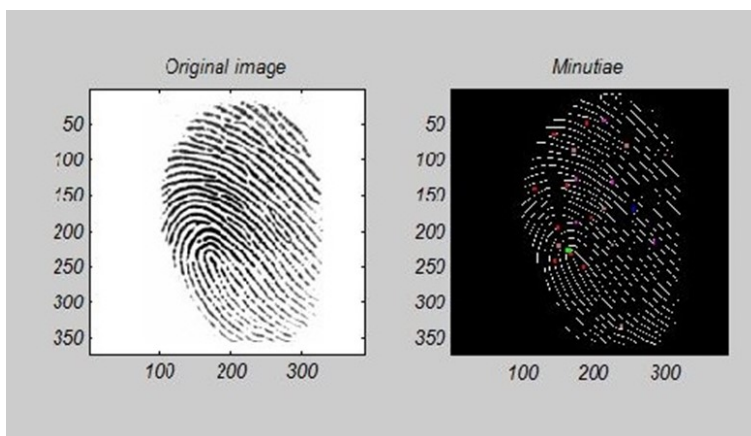
¹⁴Barnsley disorder theorem ¹⁵Nehima Greive ¹⁶Marcello Malpeigi

یک عکس شامل دنباله‌ای از زوج‌های مرتب از اعداد است که مولفه اول آن‌ها، شماره پیکسل‌ها و مولفه دوم، شدت نور را نشان می‌دهد. روشن است که کیفیت این کار، بستگی به اندازه پیکسل‌ها دارد. حال این دنباله می‌تواند به راحتی ذخیره و به شکل الکترونیکی ارسال شود. به تصاویر ۴ و ۵ مراجعه کنید، [۳] را ببینید.

وضعیت مشابهی برای تشخیص هویت نیز وجود دارد؛ الگوریتم‌های بسیاری برای تشخیص چهره ارائه شده است و یکی از محبوب‌ترین و موفق‌ترین آن‌ها براساس روش فرکتالی عمل می‌کند. با استفاده از این روش، متوسط میزان خطا در پردازش تصاویر به مقدار ۷۵٪ در پایگاه داده ORL به دست آمده بود. در این پایگاه داده، ۲۰ میلیون اثر انگشت و ۲۰ میلیون تصویر چهره وجود دارد.

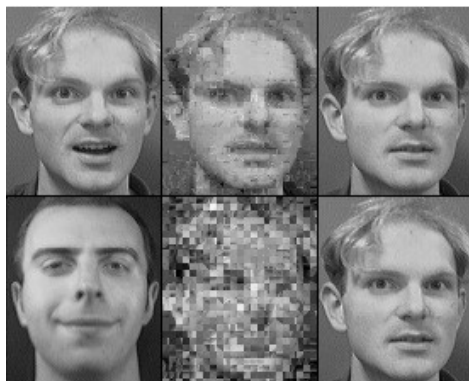


شکل ۴. روش بلوک‌بندی فرکتالی روی اثر انگشت



شکل ۵. فشرده‌سازی به وسیله روش فرکتالی

در شکل ۶ فرآیند فشرده‌سازی فرکتالی اعمال شده و نتیجه دیده می‌شود.



شکل ۶. تصاویر سمت چپ چهره‌های ورودی هستند. تصاویر سمت راست درست کننده کد فرکتال. تصاویر میانی نتیجه اعمال کد فرکتال به چهره‌های ورودی.

مراجع

- [۱] س. جعفری، مثلث خیام و هندسه فرکتال، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، بهمن ۱۳۸۷.
- [۲] ح. عباسی‌نژاد و ش. محمدی، تحلیل سیکل‌های تجاری ایران با استفاده از نظریه موجک‌ها، مجله تحقیقات اقتصادی، ۷۵ (۱۳۸۵).
- [۳] ه. گرایلو، فشرده سازی تصاویر اثر انگشت در نرخ بیت‌های پایین با رویکرد حفظ یا بهبود کارایی بازشناسی، مجله بینایی ماشین و پردازش تصویر، ۲، ۱۳۹۴.
- [4] M. Barnsley and M. F. Hurd, *Fractal image compression*, AK. Peters Ltd., Wellesley, MA, 1993.
- [5] Y. Fisher, *Fractal image compression*, Springer- Verlag, New York, 1995.
- [6] A. E. Jacquin, *Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformation*, IEEE Transactions on Image Processing, 1 (1992) 18-30.
- [7] H. Lundmark and R. Forchheimer, *Image sequence coding at very low bit-rates: A review*, IEEE Transactions on Image Processing, 5 (1994) 589-606.
- [8] W. A. Pearlman and A. Said, *Set Partitioning Coding: Part I of Set Partition Coding and Image Wavelet Coding Systems*, Foundations and Trends in Signal Processing, 2 (2008) 95-180.
- [9] W. B. Pennbaker and J. L. Itchell, *JPEG still image data compression standard*, Van Nostrand Reinhold, New York, NY, USA, 1993.
- [10] G. Wallace, *The JPEG still picture compression standard*, IEEE Transactions on Consumer Electronics, 38 (1992) xviii-xxxiv.

علی توکلی

گروه ریاضی - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد شهر مجلسی - اصفهان - ایران

at4300125@gmail.com

علی توکلی متولد ۱۳۵۳ در اصفهان است. ایشان در سال ۱۳۷۱ در مقطع کارشناسی و در رشته ریاضی وارد دانشگاه اصفهان شد. سپس در سال ۱۳۷۵ در مقطع کارشناسی ارشد رشته آنالیز در دانشگاه اصفهان وارد و سال ۱۳۷۸ با راهنمایی‌های استاد دکتر محمود لشکری‌زاده بی‌ی از پایان‌نامه خود دفاع کرد. همچنین مجدداً در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع دکتری دانشگاه اصفهان شده و در سال ۱۳۹۳ با راهنمایی‌های استاد دکتر علی رجالی فارغ‌التحصیل شدند. در حال حاضر ایشان عضو گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر مجلسی اصفهان هستند.

