

سیرو سیاحت در ایران با راهنمایی بنام هرمان وایل

آلن جوهرل
مترجم: حجت رستمی

چکیده. سفری در امتداد سرزمین‌هایی که در گذشته‌ای دور بخشی از ایران بوده‌اند، آن گونه که کتاب اصیل و مشهور تقارن (۱۹۵۲) هرمان وایل ارائه می‌دهد، معرفی مناسبی از تقارن و گروه‌های تقارن در اختیار می‌گذارد. وایل قصد داشت نشان دهد که چگونه انتقال‌های هندسی و نیز ساختارهای ریاضی با کمک دیدگاهی فرهنگی و از طریق هنر و معماری بهتر می‌تواند درک شود. هدف ما تهیه مجموعه‌ای مکمل از تصاویر گلچین شده از آثار تاریخی ایران، در جهت تبیین ایده‌های وایل است. ما با پیروی از استاد، انواع مختلفی از تقارن‌ها را درون سرزمین‌های ایرانی بررسی خواهیم کرد و برای این منظور بدون توجه به گاه‌شناسی و جغرافیا، از ساده‌ترین و قدیمی‌ترین موارد شروع کرده به انواع پیچیده‌تری از آنها خواهیم پرداخت.

۱. مقدمه

هرمان وایل^۱ (۱۸۸۵-۱۹۵۵) درست کمی پیش از بازنشستگی از انستیتوی مطالعات پیشرفته پرینستون نیوجرسی، چهار سخنرانی نسبتاً معروف در مورد تقارن ایراد کرد. این سخنرانی‌ها در کتابی که آمریکن سایننتفیک^۲ از آن به عنوان مطالعه استادانه و گیرای تقارن در مجسمه‌سازی، نقاشی، معماری و تذهیب یاد کرد و عنوان ساده تقارن بر آن نهاده شد، گردآوری و در سال ۱۹۵۲ منتشر گردید. مطالب کتاب به گونه‌ای است که در زمان انتشار و حتی در حال حاضر، گاهی ریاضیدانان حرفه‌ای در موردش می‌نویسند: وایل آن را نوشت تا به مردمی که با ریاضیات آشنا نیستند نشان دهد که از آغاز تمدن تا عصر حاضر که پیشرفت‌های جدیدی نظیر مکانیک کوانتوم و نسبیت در فیزیک به دست آمده است، مفاهیم ریاضی تقارن و گروه تا چه اندازه آشنا بوده‌اند. وایل در پیشگفتار چنین می‌نویسد:

هدف من دو چیز است: از یک طرف ارائه انواع زیادی از کاربردهای اصل تقارن در هنر و طبیعت آلی و غیر آلی و از طرف دیگر توضیح گام به گام اهمیت ریاضی- فلسفی ایده تقارن. من خوانندگان کتاب را نه صرفاً متخصصین حوزه ریاضی بلکه وسیع‌تر از آن در نظر داشته‌ام ([۱۹])، پیشگفتار بدون صفحه).

عبارات و کلمات کلیدی. هرمان وایل، هندسه، تقارن، گروه‌های متقارن، کاشیکاری، موزائیک‌کاری، تزیین، ایران. دبیر تخصصی رابط: مسعود آربین‌نژاد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۰۲

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106318.1244>

^۱Herman Weyl ^۲Scientific American

در نتیجه کتاب او برخی خوانندگان را به تعجب و می‌دارد: در آن هیچ اثبات ریاضی و حتی ارجاعی به آنها دیده نمی‌شود؛ بیان تعاریف دقیق است، اما متن برای معرفی آنها متوقف نمی‌شود. هرچند این کتاب در سخن گفتن از تقارن در معنای رایج آن تا دست آوردهای پیچیده‌اش در ریاضی و فیزیک معاصر بسیار دقیق تنظیم شده، با این وجود این کتاب کوچک، گشت و گذاری در مکان و زمان و با پرش‌های غیر منتظره و عدول از خط سیر معمولش به دست می‌دهد. بن‌مایه اصلی کتاب، نمایش پیچیدگی‌های رو به رشد مفاهیم جبری و هندسی است؛ البته این نکته را نیز نباید از ذهن دور داشت که ایده تقارن یکی از قدیمی‌ترین دست آوردهای بشری است؛ در حالی که مفهوم گروه یکی از جدیدترین‌ها به شمار می‌آید و در نیمه نخست قرن نوزدهم متولد شد، هر چند که تا نیمه دوم قرن بیستم در هندسه مورد استفاده قرار نگرفت.

آشکارا به نظر می‌رسد وایل برای درج تصاویر مرتبط با موضوعات کتاب، اغلب از کتابخانه‌ها استفاده کرده است؛ در نتیجه، با در نظر گرفتن استانداردهای زمانه خودش، کتاب تنها در بردارنده تصاویر سیاه و سفید است. با این حال، نیم قرن پس از تالیف کتاب، قابلیت به کارگیری تکنیک‌های نو و توسعه جغرافیایی حوزه تحقیق وجود دارد. با این حال علیرغم وجود تسهیلات فراوان برای سفر، همچنان دو چالش زیر وجود داشت:

– تلاش برای دستیابی به مجموعه‌ای از تصاویر نمونه که محدود به تمدن‌های اروپایی یا مدیترانه قدیم نباشد، من در سایت خودم این امر را به عهده گرفته‌ام و تلاش در این زمینه همچنان ادامه دارد، ([۲۲] را ببینید)

– انتخاب محدوده‌ای جغرافیایی، که به نظر در کتاب وایل نادیده گرفته شده بود. البته نه به دلیل ذائقه یا دانش ناکافی نویسنده، بلکه شاید به دلیل کمبود تصاویر. و طراحی یک برنامه سفر به موازات آنچه که وایل در نظر داشته است. از این منظر ایران یک انتخاب ایده‌آل و کاملاً بدیهی است.

ایران تاریخی کهن و پرفراز و نشیب دارد و در گذر زمان، سرزمین‌های وسیعی را شامل بوده است. به همین علت می‌تواند به عنوان شاهد زنده ایده‌های تقارن وایل در نظر گرفته شود. این جغرافیا برای آنچه که وایل در نظر داشت همه نوع مثالی ارائه می‌دهد. به طور کلی از زمان داریوش و هخامنشیان (۳۳۰-۵۵۰ پیش از میلاد) تا شاه عباس و دوران صفویه (۱۷۳۶-۱۵۰۱ بعد از میلاد) کشورهای خاورمیانه و آسیای مرکزی بخشهای مختلفی از یک امپراطوری را تشکیل می‌داده‌اند که گستره آن در طول زمان متفاوت اما همواره شامل حوزه وسیعی از آناتولی تا ایندوس بوده است. ما تا حد امکان مثال‌های خود را از این حوزه که تقریباً منطبق بر سرزمین‌های امپراطوری ساسانیان (۶۵۱-۲۲۴ پس از میلاد) است، برمی‌گزینیم (شکل ۱)؛ این مطلب را هم باید در نظر داشت که مرزهای تمدن‌های گذشته اغلب با مرزهای سیاسی و معاصر کاملاً متفاوت بوده‌اند. ما همچنین در نمونه‌های منتخب خود، تعدادی از آثار باستانی‌ای را که بر تاثیر ایران در شرق چین و شمال هند گواهی می‌دهند، گنجانده‌ایم.

ما برنامه کتاب وایل را دنبال کرده، مثال‌ها را نه با در نظر گرفتن ملاحظات تاریخی یا جغرافیایی بلکه به واسطه حضور تقارن در آنها دسته‌بندی می‌کنیم.



شکل ۱: امپراطوری ساسانیان (حدود ۵۰۰ نقشه) CE طراحی شده اف. دنی (F. Dany)

۲. از هارمونی تا تقارن

وایل در آغاز کتابش، به یک معنی رایج و قدیمی کلمه تقارن، یعنی دریافت کلی هارمونی و تعادل، اشاره می‌کند. حتی فردی که معمار یا ریاضیدان نباشد، تقارن میدان نقش جهان اصفهان یا میدان ریگستان^۳ سمرقند را به عنوان هارمونی و تعادل درک خواهد کرد. اما او بلافاصله معنی دقیق یک انتقال هندسی را ارائه داده و شروع به مطالعه ساده‌ترین نوع انتقال‌ها، یعنی انعکاس نسبت به یک خط یا یک صفحه می‌نماید. این از اولین انتقال‌های هندسی بوده است که وقتی هنرمندان متوجه عدم تغییر بدن حیوانات یا انسان‌ها به واسطه آن شده‌اند، از آن استفاده کرده‌اند. لذا این نوع از انتقال‌ها در قدیمی‌ترین نمونه‌های بت‌ها یافت می‌شود: به هیچ وجه وفادارای به یک واقعیت بیرونی، مجسمه‌سازان را به حکاکی دوشکل روبروی هم که یکی تصویر انعکاسی از دیگری باشد، وادار نکرد. یکی از دو مثال ارائه شده از هنر ایرانی در کتاب وایل، قطعه‌ای است از کاخ داریوش در شوش (۴۹۰ پیش از میلاد). عکس انتخاب شده، خورشید بالدار مزدیسنی در بالای تصویر را ندارد، اما همان گونه که عکس درج شده ما نشان می‌دهد پایایی انعکاس خود این شکل نیز از کل تقارن تبعیت می‌کند (شکل ۲).

^۳Registan

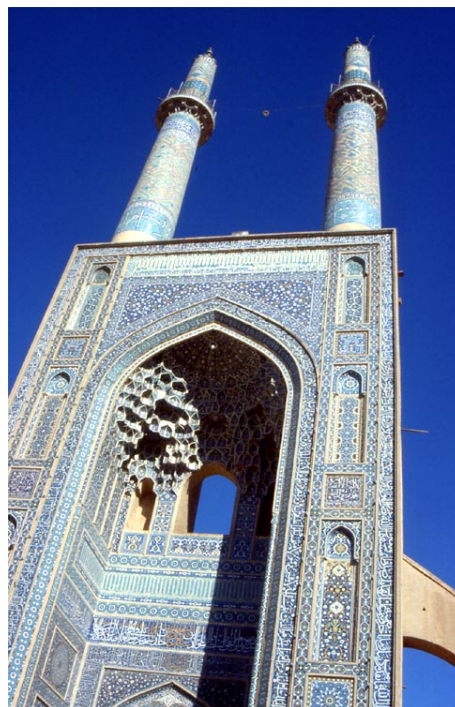


شکل ۲: نقش برجسته شوش، آجرهای لعاب‌دار (موزه تهران)



شکل ۳: نقش برجسته هیتی از قازیا نپ (موزه آنکارا)

مشهور است که هنر ایرانی از مولفه‌های هنری همه مردمان داخل امپراطوری هخامنشی بهره برد و سپس به آن هویتی منسجم داد. همچنین در امپراطوری بابلی و جهان هیتی لوح برجسته‌هایی با تقارن مشابه وجود داشته است (شکل ۳). تقارن به عنوان ویژگی کلیدی طرح‌ها و تزیینات نمای کاخ‌ها و عبادتگاه‌ها، پس از تسلط اعراب جایگاه خود را حفظ کرد. ایوان‌های بزرگ با تزیینات دقیق و استادانه مساجد موسوم به پیشطاق، انعکاس را در بالاترین درجه‌اش به نمایش می‌گذارد، به طوری که در آن‌ها تقارن نسبت به یک صفحه محوری و نه نسبت به یک خط راست دیده می‌شود.



شکل ۴: پیشطاق مسجد جامع یزد (ایران)

۳. تقارن کامل یا نه؟

گاهی، تقارن در نگاه اول به نظر کامل است؛ اما بلافاصله با یک بررسی دقیق خلاف آن دیده می‌شود. ممکن است دلیل محکمی برای آن موجود باشد و بیش از هر جای دیگری در ایران این امر همواره نشانی روشن از حکمی مذهبی یا اجتماعی است. ابتدا دری قدیمی در یزد (شکل ۵) را در نظر می‌گیریم: برای اینکه تقارن بر هم نخورد در دو کوبه دارد! اما با دقتی بیشتر می‌توان دید که هر چند جای قرارگیری این دو کوبه حافظ تقارن است، شکل آنها تقارن را بر هم می‌زند. علاوه بر این هر کدام از آنها صدایی متفاوت تولید می‌کنند. این خصیصه این امکان را فراهم می‌آورد تا مرد یا زن بودن زننده در برای اهالی درون خانه مشخص شده، در نتیجه در توسط شخصی از همان جنس باز شود.

مسجد امام (۱۶۱۱-۱۶۲۹) در سمت جنوبی میدان نقش جهان اصفهان را می‌توان در ارتباط با تقارن و میزان تطابقتش با تقارن، حداقل به دو روش مورد بررسی قرار داد. نخست، پیشطاق ورودی به دقت با محورهای میدان مستطیلی تراز شده، اما محراب گنبدی شکل به طور مشابه ترازبندی نشده است شکل ۶ (الف). دلیل این امر، لزوم ساخت آن به سمت مکه بوده که آشکارا از اهمیت والایی برخوردار است. معمار،



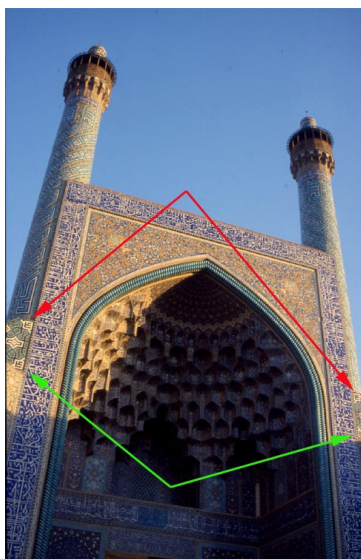
شکل ۵: در سنتی، یزد (ایران)

مسأله را به روشی زیبا و با ساخت دو پیشطاق متوالی، یکی به سمت میدان نقش جهان و دیگری به سمت حیاط، عمود بر مسیر مکه، حل کرده است. بین دو پیشطاق، حیاط باشکوهی مفرش به کاشی‌های آبی قرار دارد. با این روش، تقارن هم در میدان و هم در داخل مسجد حفظ شده است. بازدیدکنندگان، جهت خود را هنگام حرکت بین حیاط و پیشطاق اول به سمت مکه تغییر می‌دهند و با این عمل تقارنی را پشت سر گذاشته، وارد تقارنی دیگر می‌شوند. همان روش در مسجد شیخ لطف‌الله و روی ضلع شرقی میدان نقش جهان به کار گرفته شده است.

دوم این که، اغلب گفته می‌شود به عنوان نشانه‌ای از احترام به خداوند، تغییراتی که به سختی قابل تشخیص است، در تزیینات داده شده است؛ زیرا تقارن مطلق ممکن است این تلقی را به وجود آورد که انسان می‌تواند از کمال یکسانی با خداوند برخوردار باشد (شکل ۶ ب)). وایل داستان مشابهی را درباره معابد باستانی نقل می‌کند. در شکل ۶ ب)، پیکان‌ها به الگویی اشاره می‌کنند که قرینه‌سازی نشده و آن نام «علی» (داماد محمد پیامبر، کسی که در اسلام تشیع از احترام بالایی برخوردار است) است.



شکل ۶ الف): مسجد امام، اصفهان (ایران)



شکل ۶ ب): جزئیات ورودی

مثال سوم ما به دوران تاسیس ساسانیان در ۲۲۶ بعد از میلاد مسیح و زمان به قدرت رسیدن اردشیر اول برمی گردد. لوحی سنگی که چند سال پس از این تاریخ حکاکی شده، داستانی را که به نظر افسانه می رسد، نقل می کند ([۴]): اردشیر شاه حلقه ای را از خدای آسمانی ایرانیان، اهورامزدا دریافت می کند (شکل ۷).



شکل ۷. الف): اهورا مزدا (راست) و اردشیر اول (چپ)، نقش رستم (ایران)

تقارن غالب، شاه را در قامتی برابر با خدا نشان می دهد. اما این قاعده هندسی در دو جا به هم خورده است؛ نخست، برخلاف پاهای پیشین اسب ها، که انگار تصویر آینه ای یکدیگرند (پای چپ اسب اردشیر روبروی پای راست اسب اهورامزدا بلند شده است)، حلقه از دست راست به دست راست داده می شود که تأکیدی بر اهمیت نماد اهدایی است. وایل از این، به عنوان فلسفه ریاضی چپ و راست یاد کرده و در چندین صفحه آن را مورد بحث قرار داده است ([۱۹]، ۲۵-۲۰).

دوم این که با بررسی بسیار موشکافانه می توان نکته ای ظریف را متوجه شد: به عنوان نشانه ای از احترام، شاهنشاه کمی کوتاه تر از اهورامزدا به تصویر درآمده است. این مطلب از نظر سیاسی حرکت بسیار هوشمندانه ای است.

اجازه دهید به نمونه ای تئوریک از تقارن کامل نگاهی بیاندازیم، نمونه ای که با استفاده از آب به جای آینه به وجود می آید. هیچ کس به اندازه معماران ایرانی در این اندیشه سرآمد نیست؛ تأثیر آنان را در کامل ترین مثال از این نوع در دنیا یعنی تاج محل، که در سال ۱۶۳۲ در آگرای هند ساخته شد، نمی توان انکار کرد.



شکل ۹: مسجد جامع، کرمان (ایران)



شکل ۸: مسجد نادر دیوان بیگ، بخارا (ازبکستان)

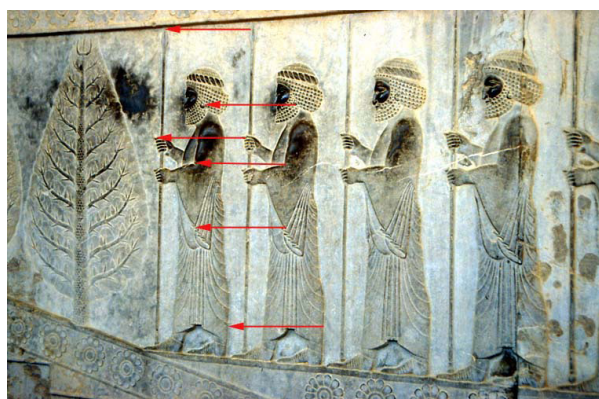


شکل ۱۰: معبد آتشکده یزد، نزدیک یزد (ایران)

در نواحی نیمه بیابانی، کمبود آب، حتی ارزش والاتری به این طرح شجاعانه می‌دهد. همچنین می‌توان دید که این شناختی دوستانه از تقارن‌های چندضلعی است که در زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد: زیرا در همه این حالت‌ها، نتیجه این دو انعکاس قطری، گروهی با چهار عنصر تولید می‌کند (معروف به چهار گروه کلاین $K = R_r \times R_r$ ؛ برای تعریف دقیق گروه و جدول کیلی چهار گروه کلاین، پیوست را ببینید) که نمای جلویی را نسبت به همه انتقال‌های حفظ می‌کند (شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰). کاخ چهل‌ستون در اصفهان (در زمان شاه عباس دوم در ۱۶۴۷ تکمیل شد. شکل ۱۹ (الف) را در زیر ببینید)، در حالی که فقط دارای ۲۰ ستون و انعکاسی آینه‌ای از استخر انعکاس دهنده در جلو است، به واسطه چنین تقارنی ملقب به «کاخ ۴۰ ستون» شد. کدام فوت و فن دیگری می‌توانست چنین فرصتی به ما بدهد تا عمل این گروه را روی نمای بیرونی یک ساختمان ببینیم؟

۴. انتقال‌ها و دوران‌ها

بعد از انعکاس‌ها، انتقال‌ها ساده‌ترین تبدیل‌های هندسی‌اند. بنابراین پس از انعکاس‌ها، وایل به بررسی آن‌ها می‌پردازد. به عنوان مثالی از شکلی که تحت انتقال و تکرارهای آن پایا بماند او به کاخ داریوش در شوش اشاره می‌کند ([۱۹]، ۴۹ شکل ۲۵). اما او می‌توانست پرسپولیس را هم برای این منظور برگزیند: راه‌پله‌های آپادانا مثال‌های متنوع‌تری از ساده‌ترین موارد (شکل ۱۱ الف، تکرار افقی از یک تصویر واحد فرم) تا غیرمعمول‌ترین نمونه‌ها را که در هر کدام جهت بردار انتقال نه افقی و نه عمودی است، ارائه می‌دهد (شکل ۱۱ ب).



شکل ۱۱ الف و ب: راه‌پله‌های پرسپولیس (ایران)

البته در شکل ۱۱ (ب) الگو کاملاً یکسان نیست، زیرا خراج‌گذاران هدایای متفاوتی را برای شاهنشاه می‌برند. وایل در حجاری‌های شوش، موردی از دو سرباز را که به وسیله جامه‌هایشان از هم متمایزند به عنوان الگوی پایه (یعنی کوچکترین واحدی که کل طرح را از طریق تکرار یک انتقال بوجود می‌آورد) ارائه می‌دهد. ما می‌توانیم کاربرد جدیدی از این الگوی تقارن را در آپادانا بیابیم، که در آن سربازان پارسی که سپر در دست دارند، یکی در میان با جنگجویان مادی حرکت می‌کنند (شکل ۱۲ الف). اگر اندازه جامه و شکل کلاه سربازان را در نظر بگیریم این الگوی تقارن را در شکل ۱۱ (ب) نیز می‌توان مشاهده کرد. یک مثال قدیمی ولی پیچیده‌تر از این الگو در شوش یافت شده که به دوران تمدن ایلامی (قرن سیزدهم قبل از میلاد) تعلق دارد و در آن واحد الگو شامل سه تصویر ایستاده است (شکل ۱۲ ب).



شکل ۱۲ الف. پرسپولیس (ایران)، آپادانا، دوره هخامنشیان



شکل ۱۲ ب. شوش (ایران)، آپادانا، دوره ایلامی (موزه لوور، پاریس)



شکل ۱۳. آرامگاه ساسانیان، بیشاپور (ایران)

حجاری‌هایی با الگوهای تقارن مشابه، قرن‌ها پیش از این‌ها توسط مردمانی در مناطقی که بعدها جزئی از امپراطوری هیتی گردید، ساخته شد؛ سنگ نوشته‌های هیتی‌ها در آناتولی مرکزی، که امروزه ترکیه در بخش شرقی آن، جانشین‌اش شده، و حجاری‌های متعلق به آشوریان در بین‌النهرین، جزئی از منابع هنر دوره امپراطوری هخامنشی که سنت‌های هنری پیشگامان خود را جذب می‌کردند، شدند. هرگاه در طول زمان جلوتر بیاییم، در میان حجاری‌های ساسانی در بیشاپور، می‌توانیم انتقال‌های زیبایی با طرح اسب را مشاهده کنیم (شکل ۱۳). با این وجود هنر طرح‌های کاملاً انتقال یافته، به دورانی بسیار پیش از آن و تمدن‌های بین‌النهرین برمی‌گردد: انتقال‌ها، نتیجه طبیعی غلتاندن یک مهر استوانه‌ای که کارش ایجاد امضایی معتبر روی سندی گلی بود، هستند. در مهرهای استوانه‌ای مادی و پارسی، تقارن به گونه‌ای مشابه استفاده می‌شد. از منظری هندسی، یک غلت کامل به تنهایی، الگو را به وجود می‌آورد و دوران‌های پی‌درپی انتقال‌ها را ایجاد می‌کنند. شکل ۱۴، نمونه‌ای از این نوع را منقش به تصویر شیرهای غول پیکر، نشان می‌دهد.



شکل ۱۴. مهر استوانه‌ای (۴۰۰۰ تا ۳۰۰۰ سال قبل از میلاد)، از اروک عراق (موزه لوور، پاریس)
این مثال، آمیزشی از انعکاس خطی و انتقال را نشان می‌دهد؛ زیرا الگوی اصلی، خود، تقارن خطی قائم دارد؛ چون این تقارن را از طریق دوران مهر نمی‌توان ایجاد کرد، لذا حکاکی‌های آن را طوری طراحی کرده‌اند که شامل دو حیوان رو در رو با گردن‌هایی در هم تنیده باشند.

۵. تقارن‌های چندضلعی

در واقع، وایل در جهت مخالف گام بر می‌دارد. وایل با تصویری از الگوهای انتقالی، هر یک به طول a شروع کرده، نتیجه به کارگیری آن را روی استوانه‌ای که محیطش مضربی از a ، مثلاً na است، در نظر می‌گیرد تا به واسطه آن بتواند گروه‌های متناهی R_n و D_n را معرفی کند. اولی گروه دوری، با n عنصر $Id, r, r^2, \dots, r^{(n-1)}$ ($r^n = 1$) و گروه دوم، گروه دوجهی، یعنی گروه همه تقارن‌هایی که چندضلعی n وجهی را پایا نگه می‌دارند، است. این گروه دارای $2n$ عنصر، شامل n دوران در R_n و n انعکاس خطی است که محورهای آنها از نقاط ثابت دورانها می‌گذرند. وایل معتقد است، لئوناردو داوینچی این واقعیت را که گروه‌های فوق تنها گروه‌های متناهی متقارن در صفحه هستند را هنگام مطالعه تقارن‌های کلیساها کشف کرد ([۱۹]: ۶۶). وایل اضافه می‌کند که در معماری تقارن‌های ۴، بسیار شایع‌اند ([۱۹]: ۶۵).

با یک بررسی دقیق‌تر، می‌توان شاهد یک شگفتی بود: ابنیه‌های تاریخی با شالوده مستطیلی بسیار بیشتر از انواع مربعی است. اما البته باید آن را مثلاً «در میان چندضلعی‌های منتظم» فهمید. بناهای تاریخی مربعی

شکل تقریباً در همه تمدن‌ها یافت می‌شوند حتی آن‌هایی که از بقیه تمدن‌ها به طور کامل جدا بوده‌اند. اما آسیای مرکزی دو گروه گران‌بها از این نوع را در خود جای داده است: زیگورات در چغازنبیل نزدیک شوش ایران (شکل ۱۵) و آرامگاه سامانی که محل دفن اسماعیل اول و جانشینان او در بخارا ازبکستان (شکل ۱۶) است. چغازنبیل به وسیله ایلامیان حدود ۱۲۵۰ قبل از میلاد مسیح و مقبره سامانی در بخارا، ۹۰۵ میلادی ساخته شده و هر دو نمایانگر گروه متقارن D_4 هستند.

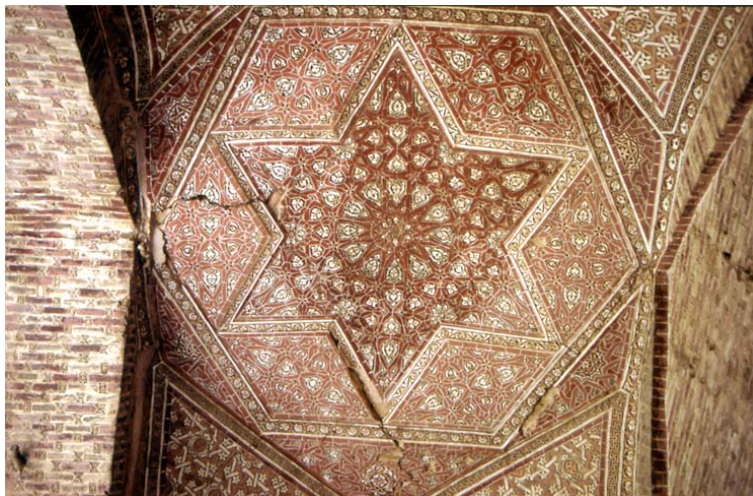


شکل ۱۵: چغازنبیل، نزدیک شوش (ایران)



شکل ۱۶: آرامگاه اسماعیل سامانی، بخارا، ازبکستان

هرگاه به جای شکل کلی بنا، توجه خود را به مطالعه تزیینات آن‌ها معطوف کنیم، می‌توانیم دیگر نمونه‌های وقوع D_n را نیز شاهد باشیم؛ برای مثال گروه D_6 در سقف مقبره مشهور الجایتو در سلطانیه ایران که در سال ۱۳۱۲ بعد از میلاد مسیح ساخته شده، دیده می‌شود (شکل ۱۷).



شکل ۱۷: آرامگاه الجایتو، سلطانیه، (ایران)

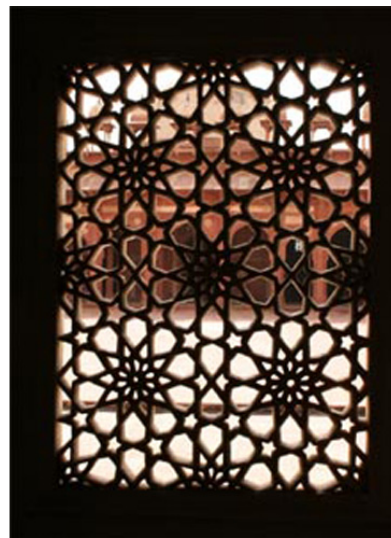
همچنین می‌توانیم الگوی D_{12} - پایا را در مرکز ستاره شش پر در نظر بگیریم: به وضوح هنرمند از این واقعیت که گروه D_6 زیرگروه D_{12} است استفاده می‌کند. شکل خود مقبره بر پایه یک هشت ضلعی D_8 - پایا است، که نشان می‌دهد شاید چند ضلعی منتظم پس از مربع رایج‌ترین شکل هندسی مورد استفاده معماران بوده است. یک مثال زیبا از D_8 ، شالوده برج بورانا^۴ در کوه‌های تیان شان^۵ جمهوری قرقیزستان است. این برج در اواخر قرن نوزدهم ساخته شده و قسمتی از مناره آن در زلزله تخریب شده است. این بنا نشان می‌دهد که تاثیر معماری ایرانی تا کجای شرق گسترش یافته است.



شکل ۱۸: برج بورانا (جمهوری قرقیزستان)

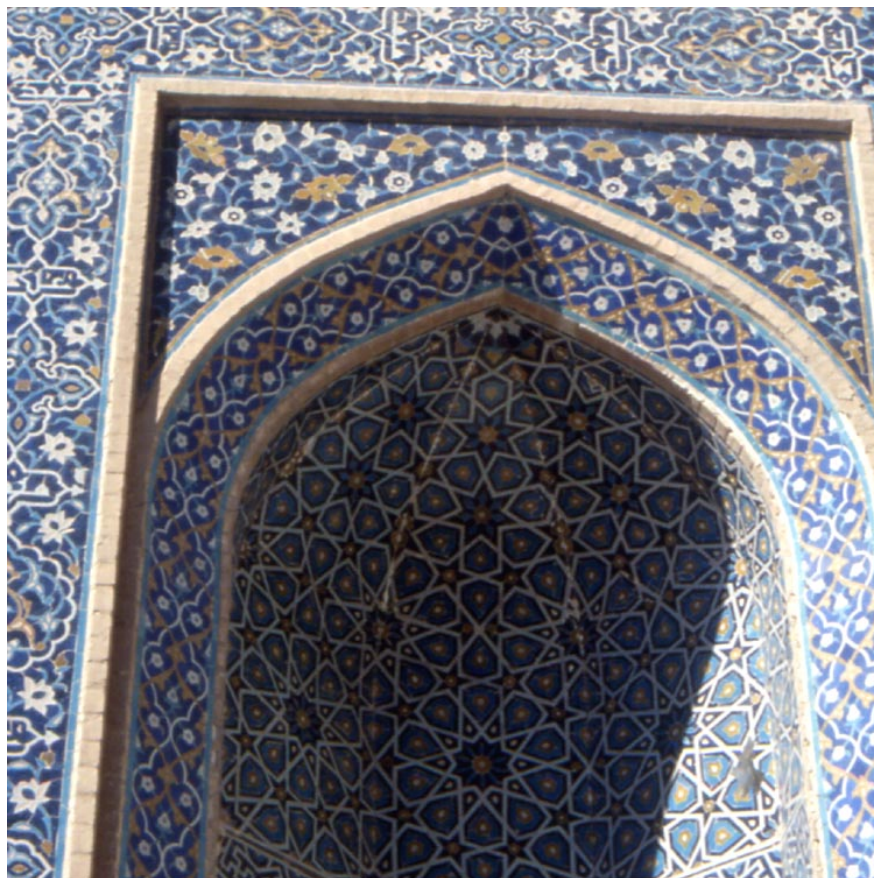
^۴Burana ^۵Tien-Shan

همان گونه که وایل می‌گوید، وقوع‌های یک n فرد بسیار نادر است، که کمی عجیب به نظر می‌رسد؛ زیرا ابزار ساخت پنج‌ضلعی منتظم، هم در یونان باستان و هم در ایران پس از اسلام شناخته شده بود. پنج و ده ضلعی‌ها گاه و بی‌گاه به عنوان الگوهای تزئینی در دیوارها و سقف بناهای مذهبی و غیرنظامی به کار گرفته شده است. شکل ۱۹ الف مثالی از سقف‌کاری چهل‌ستون در اصفهان را به نمایش می‌گذارد (در سال ۱۶۴۷ و زمان شاه عباس دوم تکمیل شده است).



شکل ۱۹ الف، چپ: کاخ چهل‌ستون، اصفهان (ایران)؛ (ب)، راست، کاخ شهر، جیپور (هند)

در اصل این الگوی ساخته شده از ده و پنج ضلعی‌ها طرحی کلاسیک بوده و استفاده از آن در ترکیه در غرب تا سین کیانگ چین در شرق گزارش شده است. همان طور که این جالی (نوعی پنجره با چوب یا سنگ مشبک حکاکی شده که در شمال آفریقا و خاورمیانه به آن مشربیه می‌گویند) نشان می‌دهد، آن را در هند نیز می‌شناخته‌اند (شکل ۱۹ ب). این طرح، تلفیقی از الگوهای D_1 - پایا (ستاره‌های ده گوشه بزرگ) و D_2 - ستاره‌ها است که بسیار هوشمندانه با چهارضلعی‌ها کامل شده است (کاشیکاری سطح آن با پنج‌ضلعی‌ها غیر ممکن است). ایوانی از مسجد جامع یزد ایران، که نوعی سرسرای طاق‌دار به کار رفته در بناهای اسلامی است، چندین ستاره هفت گوشه را به نمایش می‌گذارد (شکل ۲۰). دیوارها با یک الگوی D_1 تزئین شده؛ اما هنر واقعی ایجاد الگوی D_v داخل طاق است که در آنجا به دلیل کمبود فضا امکان ایجاد الگوی D_1 وجود نداشته است. یک فرد عادی که کاشیکاری را به صورت یک کل درک می‌کند، به سختی می‌تواند این تغییر کوچک را دریابد (شاید تنها یک ریاضیدان بتواند آن را تشخیص دهد). از آنجایی که مطمئناً ترسیمات تقریبی شناخته شده بود، کمیابی هفت ضلعی‌ها و ستاره‌های هفت گوشه تا این حد، می‌تواند تعجب‌آور باشد. در زیر، دو مثال قدیمی‌تر (شکل‌های ۲۱ و ۲۲) کمال تسلط را در این موضوع به نمایش می‌گذارند: قطعه‌ای از لوور (شکل ۲۱) سازه‌ای را نشان می‌دهد که در یک طرف آن یک هفت ضلعی و در روی دیگرش شش ضلعی‌ای که حاوی مطالبی به خط میخی است، حک شده است.



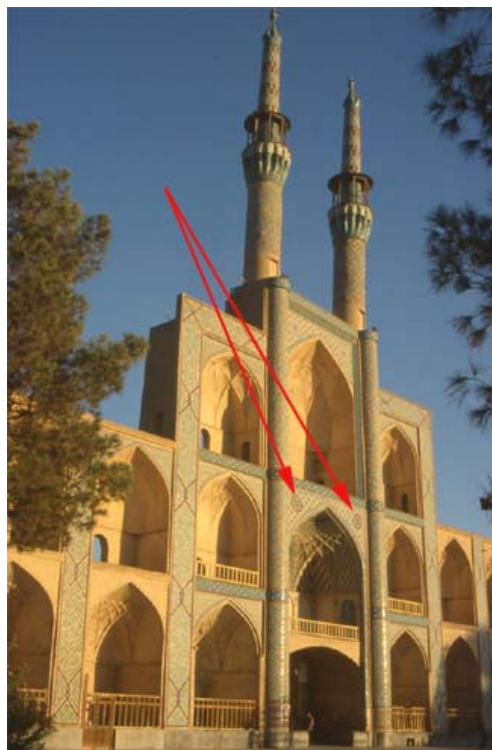
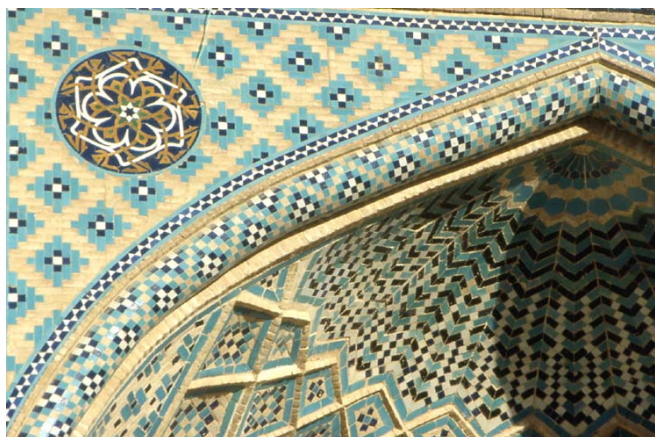
شکل ۲۰. مسجد جامع، یزد (ایران) با چندین ستاره هفت گوش در بالا و ستاره‌های ده گوش در پایین



شکل ۲۱. (چپ) سازه هفت ضلعی، تبت گلی شوش (لوور، پاریس). شکل ۲۲. (راست) کاسه برنزی، نمرود، دوره آشوریان جدید، قرن ۸-۹ ام قبل از میلاد (موزه متروپلیتن هنر، نیویورک)

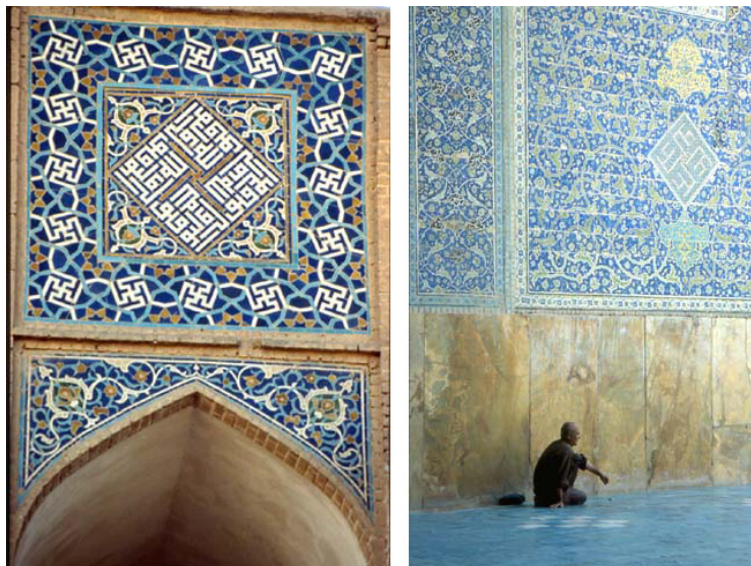
۶. دوران بدون انعکاس

تلاش برای یافتن الگوهای R_n به این معنی است که قدمی دیگر به سوی کمیابی برداشته‌ایم. با این وجود، طرح‌های R_n - پایا و نه D_n - پایا، از بدو خلقت، انسان را مجذوب خود ساخته‌اند: به نظر می‌رسد که سرچشمه نیروی جادویی منتسب به این طرح‌ها، در تقارن ناقص شگفت‌انگیزشان - دوران‌ها در غیاب انعکاس‌ها - نهفته باشد ([۱۹]، صفحه ۶۷). هنگامی که وارد یزد می‌شوید، اغلب می‌شنوید که بومیان این شهر با افتخار می‌گویند: در هیچ کجای دنیا مساجدی نظیر آن چه که در این شهر قرار دارد نمی‌توان یافت. از نگاه هندسی ما، این سخن قطعاً درست است: ما الگویی R_n - پایا در محراب مسجد جامع (شکل ۲۳ الف) و به طور مشابه در قسمت بالای قوس پیشطاق تحسین‌برانگیز مسجد امیرچخماق یافتیم (شکل ۲۳ ب).



شکل ۲۳: الف، بالا) مسجد جامع، جزییات محراب، یزد (ایران)؛ ب، پایین، مسجد امیر چخماق، یزد (ایران).

در همان بنا می‌توانیم طرح‌های بسیاری از R_n - پایاها را برای $n = ۴$ بیابیم (شکل ۲۴). یک مورد جالب دیگر در کریدور بین دو پیشطاق مسجد امام در اصفهان دیده می‌شود (شکل ۲۵).



شکل ۲۴ (چپ): مسجد امیر چخماق، یزد (ایران)؛ شکل ۲۵ (راست): مسجد امام، اصفهان (ایران)



شکل ۲۶: الف) مسجد جامع، اصفهان (ایران)



شکل ۲۶: ب) مسجد جامع، اصفهان (ایران)، جزییات الگو در ایوان غربی

البته برای یک ریاضیدان، طرح جذاب‌تر در غرب ایوان مسجد جامع اصفهان قرار دارد (شکل ۲۶ الف): علاوه بر این زیبایی ذاتی، این بنا اثبات معروفی از قضیه فیثاقورس را (شکل ۲۶ ب) که ابوالوفا (۹۴۰-۹۹۸) ارائه داده، به نمایش می‌گذارد. درباره کتاب معروف او ترسیمات هندسی لازم برای صنعتگر (کتاب فیما یحتاج الیه الصانع من الاعمال الهندسه) این گونه شایع شده بود که یک معمار یا صنعتگر می‌تواند بدون کمک هیچ ریاضیدانی از آن استفاده کند و البته دقیقاً با چنین منظوری تالیف شده بود.

۷. تقارن‌های تزیینی

با تلفیق انتقال‌های دو جهته و گروه‌های متناهی‌ای که در بالا به آنها اشاره شد، می‌توان گروه‌های والپیتر را به وجود آورد. این گروه‌ها با روش‌های مختلف کاشیکاری یک سطح در ارتباطند. اگر شکل کاشی‌ها چند ضلعی‌های منتظم باشد، آنگاه این چندضلعی‌ها تنها می‌توانند مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع یا شش ضلعی باشند؛ زیباترین مثال از این مورد اخیر را می‌توان در مدرسه اَلْغَبِیْگ (مدرسه آموزشی اسلامی که در آن نه فقط الهیات بلکه ادبیات، شعرسرایی و علوم تدریس می‌شد) در سمرقند یافت که در سال ۱۴۲۰ پس از میلاد بنا شده است. آجرکاری کار- باز (شکل ۲۷) در واقع یک ایده انقلابی شاهزاده بود، که به جای دیوار معمول یکپارچه که امکان مشاهده داخل یا خارج را غیرممکن می‌ساخت به کار گرفته شد: کارکرد معماری آن، تا حدی جدا نگه داشتن طلاب از بازار شلوغ و در عین حال حفظ پیوند نمادین اجتماعی بین نخبگان و مردم بوده است.



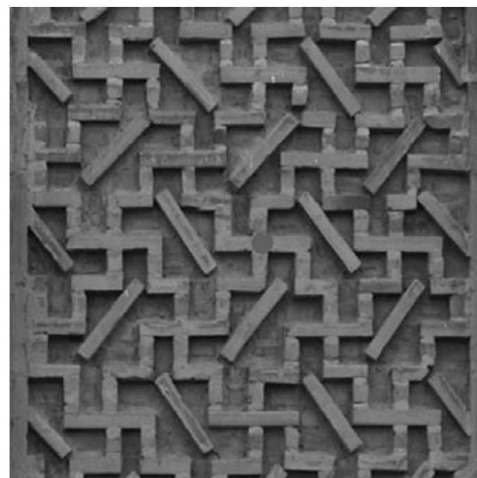
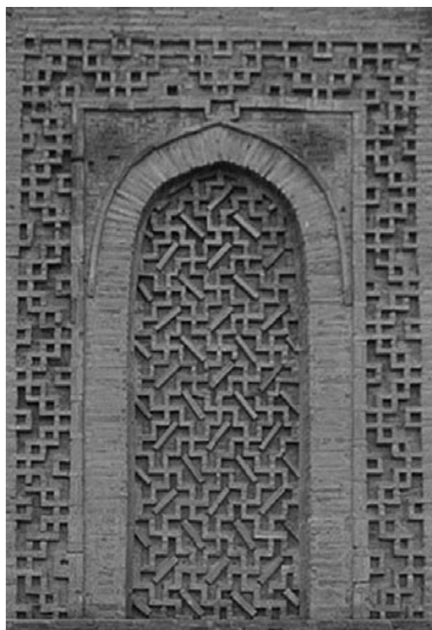
شکل ۲۷: مدرسه شیر دار (ساخته شده در سال ۱۶۳۶ بعد از میلاد) که از سوی دیگر آجرکاری کار- باز مدرسه الغ بیگ (ساخته شده در ۱۴۲۰ بعد از میلاد) دیده می‌شود، سمرقند (ازبکستان)

تصور نکنید که این تنها مورد جالب هندسی در این مدرسه است: هنرمندانی که دیوارهای داخلی را کار کرده‌اند، فهم عمیق‌شان را از هندسه تزینی در خلق آرایش‌های مختلف با استفاده از اشکال منظمی که در کاشیکاری سطوح هیچ کدام را به تنهایی نمی‌توان به کار برد، مگر زمانی که در الگویی با قابلیت انتقال دو جهت در کنار هم قرار گیرند، از خود نشان داده‌اند: این را قبلاً در شکل‌های ۱۹ الف و ۱۹ ب مشاهده کردیم. ما نمونه خوبی از این نوع را روی دیوار داخلی ایوانی یافتیم که الگوی پایه آن ترکیب پنج و شش و نه ضلعی‌ها با هفت ضلعی‌های داخل این نه ضلعی‌ها بود (شکل ۲۸ ب).

هر چند که کاشیکاری‌های بسیار پیچیده صرفاً در بناهای مذهبی استفاده شده است، به سختی می‌توان پذیرفت که این کارها هیچ ارتباطی با علاقه عمیق شاهزاده به ستاره‌شناسی و ریاضیات نداشته است. الغ بیگ (۱۳۹۳-۱۴۴۹) نوه تیمور لنگ زندگی خود را وقف علم کرد و به عنوان امیر سمرقند از ۱۴۰۹ تا ۱۴۴۷ هزینه‌های ساخت یک رصدخانه را تامین کرده، برنامه اجرایی ساخت یک مدرسه را تحقق بخشید و تیمی تحقیقاتی متشکل از هفتاد ستاره‌شناس را برای کار و تدریس در آن‌ها دور هم جمع کرد. در میان محققان برجسته، ستاره‌شناسی چون قاضی‌زاده رومی (۱۴۳۶-۱۳۶۴) و ریاضیدانی نظیر جمشید کاشانی معروف به الکاشی (۱۴۵۰-۱۳۸۰) که به عنوان پدر روش معروف تقریبات متوالی شناخته می‌شود، حضور داشتند. او $\sin 1^\circ$ را تا ۶۰ رقم اعشار در حدود ۲۰۰ سال پیش از کپلر (۱۶۱۸) تقریب زد. این روش تا شش قرن بعد به عنوان روش استاندارد محاسبه ریشه‌های معادلات پیچیده‌ای که در ستاره‌شناسی ظاهر می‌شوند، باقی ماند.



شکل ۲۸. الف، بالا) موقعیت الغ بیگ و گروه ستاره‌شناسی او،
مدرسه الغ بیگ، سمرقند (ازبکستان)؛
ب، راست) جزییات کاشیکاری، درون ایوان

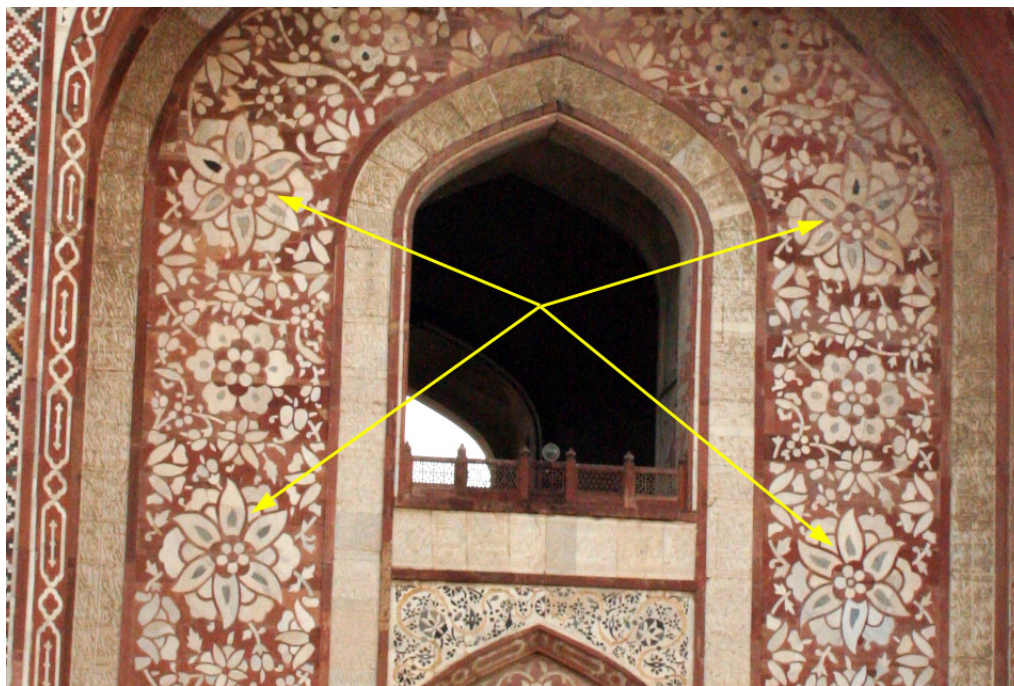


شکل ۲۹. الف، چپ). قوس کور برج بورانا
(جمهوری قرقیزستان)؛
ب، بالا). جزییات تزیینات آجری

امکان دارد پا اساس شبکه زمینه یک کاشیکاری مربع باشد. اما این به این معنی نیست که زیرگروه انتقال‌هایی که یک نقطه را ثابت نگه می‌دارند باید گروه تقارن‌های مربع، یعنی D_4 باشد. برای مثال در شکل ۲۹ الف و ب، طاق کور برج بورانا (شکل ۱۸ را ببینید) تنها پایایی انتقال و دوران را بدون هیچ گونه انعکاسی نشان می‌دهد: اگر نقطه قرمز در شکل ۲۹ ب را به عنوان یک گوشه مربع پایه در نظر بگیریم، آنگاه تقارنهایی که آن را پایا نگه می‌دارند گروه R_4 است.

هر چند که برج بورانا در ایران قرار ندارد، نمونه‌ای از آجرکاری دوره اسلامی در آسیای میانه را در حدود ۱۰۰۰ سال بعد از میلاد به نمایش می‌گذارد. زمانی که برای مثال این نمونه را با الگوهای آجرکاری آرامگاه سامانی در بخارا مقایسه کنید، آنگاه گستره نفوذ ایران آشکارتر می‌شود. الگوهای تقارن برج بورانا خیلی با

الگوهای تقارن مائورسک^۶ شکل ۶۶ از وایل ([۱۹]، صفحه ۱۱۴) تفاوت ندارند، چرا که هر دو دارای گروه پایایی یکسان هستند که به طور سنتی در نظریه گروه‌های کاغذ دیواری با P_4 نمایش داده می‌شود (برای جزییات و نمادها [۲۰] و [۲۱] را ببینید).



شکل ۳۰: آرامگاه اکبر در سیکاندرآ، نزدیک آگرا (هند)

بسیاری از این گونه طرح‌های تلفیقی را البته با سبکی ملایم‌تر می‌توان در بناهای تاریخی دوران مغول، برای مثال در آرامگاه اکبر (ساخته شده در ۱۶۱۳ پس از میلاد) نزدیک آگرا مشاهده کرد که در آن نفوذ ایران در طراحی کلی و تزیینات ساختمان به آسانی قابل تشخیص است (شکل ۳۰). در این بنا هنرمند، هندسه را با طبیعت و گل‌ها در آمیخته است. بنا بر نظر وایل ([۱۹]، صفحه ۵۸) گل‌ها متناوباً تقارن‌های دورانی از مرتبه ۵ یا ۶ را به نمایش می‌گذارند. به علاوه یک بررسی دقیق معلوم می‌کند که در اصل وقوع‌های موضعی D_4 و R_4 نمایش داده شده‌اند. دوران جزئی گلبرگ‌ها را بررسی کنید و به پایایی عمودی توسط انتقال توجه نمایید. مثال دیگر بنای معروف تاج‌محل در آگرا است که بیانگر تاثیر آرامگاه‌های دوران تیموری است و گفته می‌شود استاد معمار آن استاد احمد لاهوری، ایرانی است.

آخرین مثال، کاروانسرای نوگنبد است (شکل ۳) که در آن می‌توانیم تقارن‌ها و انتقال‌ها و نیز تلفیق الگوها را در اطراف کنج برج‌ها ببینیم. توجه داشته باشید که جهت پیکان‌های بالای برج‌ها با انعکاس صفحه‌ای نسبت به یک صفحه (مجازی) قائم گذرنده از درب اصلی هماهنگ شده است.

^۶Mauresque



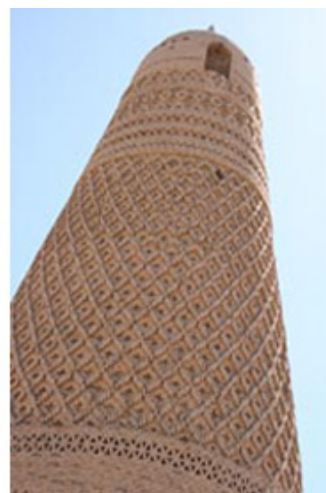
شکل ۳۱: نوگند در جاده یزد- اصفهان (ایران)

تغییرات مقیاس

زمانی که هرمان وایل توجه خود را به فضای سه بعدی و تشابه گروه‌ها معطوف می‌کند، به معماری اشاره چندانی نمی‌کند اما به جای آن به پدیده‌های طبیعی نظیر گل‌ها و صدف‌ها توجه دارد. با این حال مثال‌هایی از معماری وجود دارند: یک مثال جالب پیشنهادی، آجرکاری مناره امین در تورفان (شین کیانگ، چین) ساخته شده به سال ۱۷۷۸ پس از میلاد است. (شکل ۳۲). شکل مخروطی این بنا متضمن پایایی آن توسط گروه همسانی‌های پیوسته است (مرکز مشترک هر کدام یک نقطه مجازی یعنی راس مخروط است و برج یک قسمت ناقص (سر بریده) آن است) و برآمدگی‌های آجرها، مارپیچ‌های مخروطی روی آن به جای گذارده است. این طور به نظر می‌رسد، معمار سعی داشته، زاویه ثابتی را با محور قائم برج حفظ کند. این خاصیتی اساسی از یک مارپیچ است و هر خانواده تحت یک زیرگروه گسسته از یک گروه، پایا می‌ماند؛ یکی هنگام گرایش به راست و دیگری هنگام چرخش به سمت چپ بزرگ می‌شوند.



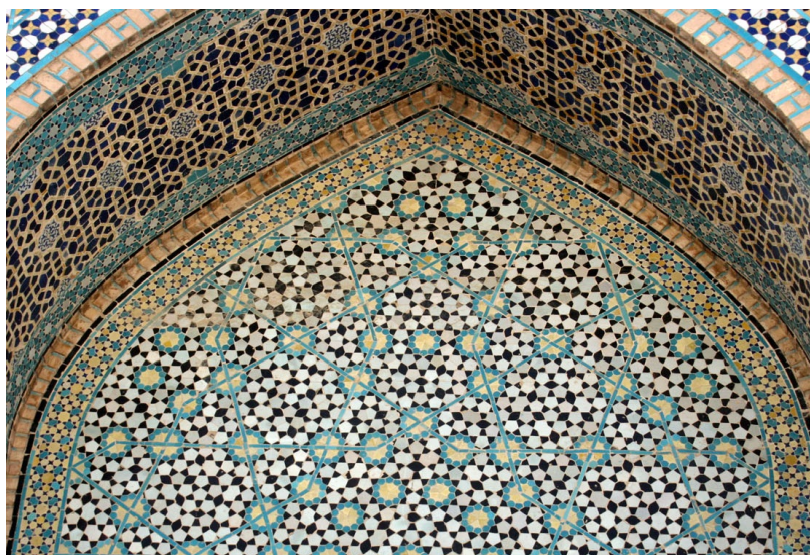
شکل ۳۲. دو چشم‌انداز از مناره امین، تورفان، شین کیانگ (چین)



از هندسه تا گروههای مجرد

البته ما در جاده‌های ایران قدیم هیچ ارتباطی با هیچ یک از عناوین فصل پایانی کتاب وایل، استفاده از نظریه گروه در نسبیت یا مکانیک کوانتوم، پیدا نخواهیم کرد. همچنین در آن از پیشرفت‌های فوق‌العاده‌ای که در قرن بیستم در نظریه گروه اتفاق افتاد، خبری نیست. تلاش برای طبقه‌بندی گروه‌های متناهی سی سال پس از مرگ وایل در سال ۱۹۵۵، به ثمر نشست. به هر حال یک نوع پیوند عاطفی با عنوان پایانی کتاب وایل، یعنی نظریه گالوا، وجود دارد زیرا این نظریه به حل‌پذیری معادلات جبری می‌پردازد: فراموش نکنید که ما به منظور تبیین این گروه‌های متقارن در ایران، به زادگاه سرزمین پدر جبر، خوارزمی (اهل خوارزم) (۷۸۰-۸۵۰ پس از میلاد) و سرزمین عمر خیام (۱۰۴۸-۱۱۳۱) که اهل نیشابور در خراسان بود سفر کردیم. عمر خیام اولین کسی بود که تلاش‌های ارزشمندی در جهت حل معادلات درجه ۳ صورت داد.

نمی‌دانم تا چه اندازه ممکن است جالب باشد، اما ما در ایران با پیشرفت‌های بزرگ و جدیدی در علم تقارن‌ها روبرو می‌شویم. فصل پایانی وایل «کریستال‌ها: ایده کلی تقارن» نام دارد. سی سال پس از چاپ این کتاب، در سال ۱۹۸۲ شبه کریستال‌ها کشف شد و سه دهه پس از آن، برای این کشف جایزه نوبل شیمی به دان شچمن^۷ اهدا شد. رشد شبه کریستال‌ها را می‌توان با استفاده از کاشیکاری پرنور، یعنی کاشیکاری‌های ساختاری، بدون پایایی انتقال،^۸ (۱۹۷۶) مدل‌سازی کرد این کاشیکاری‌ها از یک تعداد متناهی از اشکال کاشی شامل پنج ضلعی‌ها و ده ضلعی‌ها بهره می‌برند. می‌توان به راحتی نشان داد که هیچ کاشیکاری منظمی را تنها با استفاده از این کاشی‌ها نمی‌توان به وجود آورد: تنها کافی است به مجموع زاویه‌ها در یک راس بیندیشید. اکنون با حقیقتی شگفت‌آور مواجه می‌شویم چندین محقق (اولین‌شان ماکوویکی^۹ [۱۲] و بونر^{۱۰} [۵])، بعد پیترو^{۱۱} و پیتراشتین هارت^{۱۲} [۱۱] تصاویری از چنین کاشی‌کاری‌هایی را (با کمی تعدیل) در بناهای باستانی معماری اسلامی دوره میانه که تاریخ ساخت آنها به زمان ساخت گنبد کبود در مراغه (قرن دوازدهم) و بعدی آرامگاه درب امام در اصفهان ایران (شکل ۳۳) که مکرر به آن اشاره شد، (۱۴۵۳) یافتند.



شکل ۳۳: درب زیارتگاه امام، اصفهان (ایران)؛ عکس توسط کی. دودلی و ام. الیف

⁷Dan Shechtman ⁸Penrose ⁹Makoviky ¹⁰Bonner ¹¹Peter lu ¹²Peter Steinhardt

نتیجه‌گیری

پروژه وایل این بود که به خواننده خود که ممکن است با ریاضیات آشنایی چندانی نداشته باشد، نشان دهد که بین تاریخ تمدن‌ها و پیشرفت‌های اخیر صورت گرفته در علم و مطالعه تقارن تا حدی رابطه‌ای نسبتاً مزاحم اما عمیق وجود دارد. در زمان ما که حوزه تحقیق بیش از هر زمان دیگری تخصصی شده و دانش به رشته‌های جزیی‌تر تقسیم گردیده است، تعامل بین محققان حوزه علم از یک سو و تاریخ، هنر و معماری از سویی دیگر از لحاظ کمی بسیار ناچیز است؛ شکی نیست که نه تنها عموم مردم بلکه حتی مخاطبان خاص نیز به سختی تصویری از آن‌ها دارند. وایل یکی از معدود افرادی بود که سعی کرد پلی میان این شکاف بین ریاضیدانان و عوام بسازد و راه او باید ادامه یابد. سفری به ایران یک راه آرامش بخش و دلپذیر در جهت حفظ روح کتاب وایل است، لذا بیایید آرزو کنیم آن‌هایی که نظریه گروه را مطالعه می‌کنند به مطالعه معماری ایرانی رغبت نشان دهند و گردشگرانی که به ایران سفر می‌کنند به فهم مقدمات نظریه گروه راغب شوند.

۸. پیوست: درباره گروه‌ها

۱.۸. یک تاریخچه مختصر از زمان تولد گروه‌ها. نظریه گروه‌ها نخست توسط لاگرانژ (۱۷۷۰)، کوشی (۱۸۱۵) و گالوا (۱۸۳۰) معرفی شد. همه آن‌ها به موضوع حل‌پذیری معادلات جبری از درجه ۵ و بالاتر علاقه‌مند بودند. آن‌ها برای نیل به این هدف مجبور به مطالعه جایگشت‌های ریشه‌های یک چند جمله‌ای شدند و گالوا نخستین کسی بود که وجود فرمول‌های صریح برای حل این نوع از معادلات را به مطالعه گروه جایگشت‌ها پیوند زد. توجه به این مطلب می‌تواند جالب باشد که گالوا علیرغم راه حل درخشان و البته پر زحمات‌اش، تعریف دقیقی از کلمه گروه ارائه نداد و این تا زمان کیلی (۱۸۵۴) ادامه داشت. دیگر منبع برای فهم نظریه گروه، مطالعه انتقال‌های هندسی بود که عمده‌تاً توسط کلاین (۱۸۷۰) صورت پذیرفت.

۲.۸. گروه (تقارن) چیست؟ معلوم است که همه انتقال‌های ایزومتری که یک شکل معین را حفظ می‌کنند - برای مثال، یک چند ضلعی - دارای ویژگی‌های زیر هستند:

(الف) به کارگیری دو انتقال ایزومتری که به صورت متوالی مثلاً ابتدا r و سپس s به یک انتقال با خاصیت پایایی منجر می‌شود. ما آن را با $s \circ r$ نمایش می‌دهیم به طوری که اگر M یک نقطه دلخواه در

$$\text{صفحه (یا فضا) باشد آنگاه } s \circ r(M) = s(r(M))$$

(ب) انتقال همانی، Id ، شکل مورد نظر را حفظ می‌کند.

(ج) برای هر انتقالی از این نوع، انتقال معکوسی وجود دارد، یعنی برای هر انتقال r انتقال s چنان موجود

است که $r(M) = P$ و این معادل است با $s(P) = M$ و چون $s \circ r = r \circ s = Id$ ، می‌نویسیم $s = r^{-1}$.

(ت) ترتیب عمل هنگام به کارگیری انتقال سوم t مهم نیست. هر کس می‌تواند ابتدا $s \circ r$ را به کارگیرد

و سپس t را؛ یا نخست r را تأثیر داده و بعد از آن $t \circ s$ را. یعنی $t \circ (s \circ r) = (t \circ s) \circ r$.

این چهار ویژگی تعریف کیلی می‌باشند.

در حالت کلی برای هر r و s ، یک گروه ممکن است از خاصیت

$$s \circ r = r \circ s \quad (\text{ح})$$

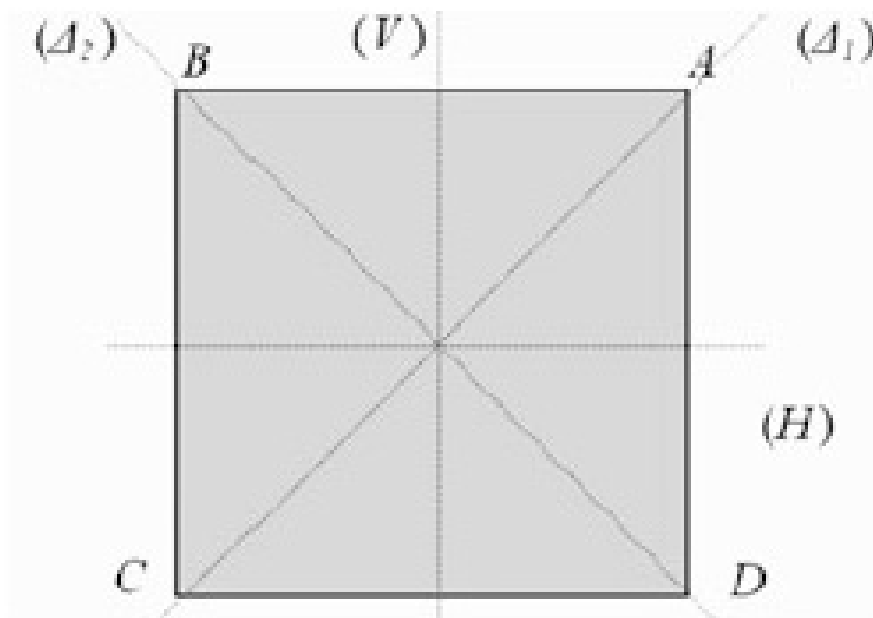
برخوردار نباشد. اگر گروهی از چنین خاصیتی برخوردار شد به آن گروه جابجایی یا آبل می‌گوییم، اما همچنان که گفته شد بسیاری از گروه‌های انتقال از این خاصیت برخوردار نیستند.

۳.۸. ساخت جدول کیلی: گروه مربعی. به راحتی از حفظ فاصله‌ها نتیجه می‌شود، هر تقارن که یک چندضلعی منتظم را حفظ می‌کند، می‌تواند به عنوان جایگشت رئوس آن چند ضلعی در نظر گرفته شود. این نوع از نگاه، گروه‌های هندسی را با گروه‌های جایگشتی که توسط پیشگامان این حوزه مورد مطالعه قرار گرفت، پیوند می‌زند و در محاسبه $s \circ r$ کمک موثری می‌نماید، زیرا برای تعیین آن کافی است مکان هر راس را پس از انتقال در نظر بگیریم.

برای نمونه، جدول کیلی برای گروه حافظ - مربع در زیر آورده شده است. این گروه هشت عضو دارد که به عنوان ۸ جایگشت از شانزده جایگشت روی رئوس A, B, C, D از مربع عمل می‌کنند. (پس این گروه را می‌توان به عنوان زیرگروه، گروه همه جایگشت‌های روی چهار عنصر نیز در نظر گرفت). این گروه را با D_4 نمایش می‌دهند و متشکل از چهار دوران Id, r (دوران 90°)، $r^2 = r \circ r = -Id$ و $r^3 = r \circ r^2$ (با بررسی ویژگی (الف) در جدول کیلی D_4 می‌توان دید که این زیرگروه R_4 آن است) و چهار انعکاس s_1, s_2, s_V و s_H به ترتیب با محورهای $(V), (H), (\Delta_1), (\Delta_2)$ است.

این جدول را باید به روش زیر خواند:

$a \circ b$ بیانگر a در ستون b در سطر است. توجه کنید که $s_H \circ r$ و $r \circ s_H$ برابر نیستند، لذا باید در ساخت و خوانش این جدول دقت کرد.



مربعی یا محورهای تقارن

	Id	r	r^2	r^3	s_H	s_V	s_1	s_2
Id	Id	r	r^2	r^3	s_H	s_V	s_1	s_2
r	r	r^2	r^3	Id	s_1	s_2	s_V	s_H
r^2	r^2	r^3	Id	Ir	s_V	s_H	s_2	s_1
r^3	r^3	Id	r	r^2	s_2	s_1	s_H	s_V
s_H	s_H	s_2	s_V	s_1	Id	r^2	r	r^3
s_V	s_V	s_1	s_H	s_2	r^2	Id	r^3	r
s_1	s_1	s_H	s_2	s_V	r^3	r	Id	r^2
s_2	s_2	s_V	s_1	s_H	r	r^3	r^2	Id

جدول کیلی برای D_4 در بالا، سمت چپ، مشخص شده است.

ساخت جدول کیلی: گروه مستطیلی

یک مستطیل تقارنهای کمتری نسبت به یک مربع دارد: در این حالت به وضوح (Δ_1) و (Δ_2) محورهای تقارن نبوده و تنها (H) و (V) محورهای تقارن به شمار می‌آیند. دورانهایی که یک مستطیل را بدون تغییر حفظ می‌کنند دو موردند: Id و $-Id$ ، یعنی $R_2 = \{Id, -Id\}$ گروهی تنها با دو عضو است.

	Id	$-Id$	s_H	s_V
Id	Id	$-Id$	s_H	s_V
$-Id$	$-Id$	Id	s_V	s_H
s_H	s_H	$-s_H$	Id	$-Id$
s_V	s_V	$-s_V$	$-Id$	Id

جدول کیلی برای گروه چهارگان کلاین، R_4 در بالا، سمت چپ، مشخص شده است.

این مدل، از برخی جهات جالب است. زیرا در حالت طبیعی زمانی رخ می‌دهد که نمای خارجی متقارن، در حوضی انعکاس دهنده بازتاب شود. مانند R_4 ، این نیز گروهی آبله با چهار عنصر است، اما با R_4 متفاوت است. زیرا در گروه کلاین، برای هر عنصر x ، $xox = Id$ برقرار است، در حالی که در R_4 به وضوح چنین نیست.

روش دیگر برای دیدن این موضوع، در نظر گرفتن $K = R_r \times R_r$ به صورت $(a, b) \circ (c, d) = (a \circ c, b \circ d)$ است. وقتی نحوه ساخت یک گروه با چهار عنصر را در نظر بگیریم (با رسم جدول‌های مختلف)، آنگاه می‌توان دید که این دو گروه تنها گروه‌های موجود از مرتبه چهار هستند.

۹. تقارن‌های چندضلعی و گروه‌های مرتبط

با تعمیم مورد مربع، یک n -ضلعی منتظم به وسیله تبدیلات گروه دوجهی D_n که $2n$ عنصر، شامل n تقارن محوری و زیرگروهی متشکل از n دوران یعنی گروه دوری R_n (و به همین دلیل وایل آن را با C_n نمایش داد) دارد، حفظ می‌شود: دو امکان زیر برای گروه متناهی [تقارن‌ها] وجود دارد:

الف) گروه شامل تکرارهای یک تک دوران سره به اندازه $\alpha = \frac{360}{n}$ که در آن $\frac{360}{n}$ ، مقسوم علیه 360° است.

ب) گروه مرکب از این دورانها و انعکاسهایی موجود نسبت به n محوری که زاویه‌های $\frac{1}{2}\alpha$ می‌سازند.

گروه نخست را گروه دوری C_n و دومی را گروه دوجهی D_n می‌نامند. پس این گروه‌ها، تنها تقارنهای مرکزی ممکن در دو بعدی‌ها هستند:

$$C_1, C_2, C_3, \dots, D_1, D_2, D_3, \dots$$

لئوناردو داوینچی^{۱۳} تعیین اسلوبمند تقارنهای ممکن یک بنای مرکزی و چگونگی ساخت محراب‌ها و طاقچه‌ها در آن بدون ایجاد خلل در تقارن اصلی آن را بررسی و مورد مطالعه قرار داده است ([۱۹]، صفحه ۶۵).

مطابق انتظار، هنرمند شهیر بدون این که اثباتی ارائه دهد، تنها اشاره‌ای به آن داشته و البته هیچ صحبتی از خواص گروه نیز به میان نیاورده است.

۱۰. تشکر و قدردانی

مترجم از داور مقاله که با ارائه نظرات مفید موجب ارتقای ترجمه حاضر شد کمال تشکر و امتنان را دارد. خواننده ممکن است از تعداد کم مراجع کتاب وایل شگفت زده شود. اما باید به این حقیقت تاکید شود که این کتاب برای متخصصین موضوعی تالیف نشده است. با در نظر داشتن این مطلب، ما مجموعه‌ای از کارهای مقدماتی را به همراه مراجعی چند از استاد ارائه می‌دهیم. خواننده علاقمند به آسانی می‌تواند مراجع بیشتری از جمله مقالات مهم نگاشته شده توسط ریاضیدانان بزرگی نظیر لاگرانژ، کوشی، گالوا، جردن، لی، کلاین، کارتان و دیگران که در تولد و تکامل نظریه گروه نقش داشتند را بیابد.

مراجع

- [1] M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, New York: Springer-Verlag, 1988.
- [2] J. L. Bell and K. Herbert and W. Hermann, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, (Spring 2011 Edition), Edward N. Zalta and ed, <http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/weyl/>, M. Berger, 1987, *Geometry*.
- [3] M. Berger and I. Geometry, London, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
- [4] C. Bier, *Piety and Power in Early Sasanian Art, in Official Cult and Popular Religion in the Ancient Near East*, E. Masushima, ed. Heidelberg: Universitätsverlag C. Winter, 1993 171–194.

¹³Leonardo Davinci

- [5] J. Bonner, *Three Traditions of Self-similarity in Fourteenth and Fifteenth Century Islamic Geometric Ornament*, in Proceedings ISAMA/Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science, R. Sarhangi and N. Friedman, eds. Granada, 2003 1-12.
- [6] E. Broug, *Islamic Geometric Patterns*, London: Thames Hudson, 2008.
- [7] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, New York: John Wiley Sons, 1961.
- [8] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, (1962), Rpt. Mineola, NY: Dover Publications, 1989.
- [9] D. L. Johnson, *Symmetries*, London, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [10] O. Jones, *The Grammar of Ornament*, (1865), Mineola, NY: Dover Publications, 1987.
- [11] P. Lu and P. Steinhardt, *Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. Science*, 2007 1106-1110.
- [12] E. Makovicky, *800-Year Old Pentagonal Tiling from Maragha, Iran, and the New Varieties of Aperiodic Tiling it Inspired in Fivefold Symmetry*, I. Hargittai, ed. Singapore: World Scientific, 1992.
- [13] J. J. Rotman, *Galois Theory*, New York: Springer-Verlag, 1990.
- [14] M. Senechal, *Crystalline Symmetries: An Informal Mathematical Introduction*, Bristol: Adam Hilger, 1990.
- [15] ———, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge: Cambridge University Press, SMITH, G. and O. TABACHNIKOVA, 2000, Topics in Group Theory, London, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
- [16] J. P. Tignol, *Galois Theory of Algebraic Equations*, Singapore: World Scientific Books, 2001.
- [17] H. Weyl, *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*, Princeton: Princeton University Press, 1939.
- [18] ———, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Mineola, NY: Dover Publications, 1950.
- [19] ———, *Symmetry*. Princeton: Princeton University Press, 1952.
- [20] [Frieze Groups]: http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group.
- [21] [Groups]: http://en.wikipedia.org/wiki/Group_%28mathematics%29.
- [22] [JUHEL]: Art, Architecture et Symétrie, [http://home.nordnet.fr/~simajuhel/Weyl/weyl\\$_\\$intro.html](http://home.nordnet.fr/~simajuhel/Weyl/weyl$_$intro.html) (in French).
- [23] [Symmetry and Patterns]: The Art of Oriental Carpets: <http://mathforum.org/geometry/rugs/symmetry/>.
- [24] [Wallpaper Groups]: http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group#cite_ref-0
- [25] [Wallpaper Groups]: <http://www.clarku.edu/~simdjoyce/wallpaper/index.html>

حجت رستمی

زنجان، آموزش و پرورش، پژوهشگاه تعلیم و تربیت ملاصدرا

h.rostami5991@gmail.com

مترجم متولد آذر ماه ۱۳۵۹ در شهر زنجان است. وی کارشناسی آموزش ریاضی، کارشناسی ارشد ریاضی محض و دکتری ریاضی محض (جبر) را در سالهای ۱۳۸۴، ۱۳۹۰، ۱۳۹۴ از دانشگاه زنجان اخذ کرد.

