ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۳، شماره ۲ (۱۳۹۷)، صص. ۵۸-۴۵

http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

خانواده برنولی وحل معادله دیفرانسیل برنولی

سید علی‌محمد محسنی‌الحسینی* و هنگامه سنمار

چکیده. معادله دیفرانسیل برنولی یک موضوع بحث برانگیزاست که در ریاضیات ومجموعه علوم مهندسی وفیزیک کاربرد بسزایی دارد. در این مقاله تاریخچه پیدایش وگسترش معادله دیفرانسیل برنولی را بررسی می‌کنیم. همچنین به نقش اندیشمندانی که برای حل این معادله تلاش کرده‌اند خواهیم پرداخت، منجمله به خانواده برنولی که طی سه نسل، هشت ریاضیدان تحویل جامعه دادند. به‌علاوه یاکوب، دانیل ویوهان برنولی بیشترین نقش رادر حل این معادله داشتند. در انتها کاربردهای معادله دیفرانسیل برنولی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱. خانواده برنولی

خانواده برنولی یک خانواده برجسته سوئیسی بودند که طی سه نسل، هشت ریاضیدان تحویل جامعه دادند. این خانواده حدود ۱۰۰ سال (از اواسط قرن هفدهم تا اواسط قرن هیجدهم) بر ریاضیات تاثیر گذار بوده‌اند. شکل (۱) شجره نامه برنولی‌ها را که با نیکلاس برنولی شروع گردیده نشان می دهد[۱۵]. در این خانواده یاکوب برنولی[۱]، یوهان برنولی[۲] ودانیل برنولی[۳] که در بخش‌های بعدی به آن اشاره خواهیم نمود در زمینه ریاضیات شهرت زیادی کسب نموده‌اند. برخی از اعضای خانواده برنولی علاوه برپرداختن به علوم ریاضی در زمینه‌های دیگر فعالیت داشته‌اند منجمله (یوهان پدر دانیل۱۶۹۴) در زمینه پزشکی، (دانیل در سال۱۷۲۱) در زمینه کالبدشناسی وگیاه شناسی، (دانیل ۱۷۵۰) در زمینه فیزیک، (یاکوب برادرزاده دیگردانیل۱۷۵۹ ـ ۱۷۸۹ ونیکلاس[۴]، بردار دانیل ۱۷۱۵) ودر زمینه حقوق، (هانس بنو از نسل سوم ۱۸۷۶ ـ ۱۹۵۸) تحصیل نموده اند[۱، ۱۴].

عبارات و کلمات کلیدی. معادله دیفرانسیل برنولی، خانواده برنولی، آیرودینامیک، اصل برنولی.
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۱۰

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

.

[1] Jacob Bernoulli [2] Johann Bernoulli [3] Daniel Bernoulli [4] Nicolaus Bernoulli

شکل ۱: شجره نامه

۲. یاکوب

یاکوب برنولی (۱۶۵۴-۱۷۰۵) ریاضیدان، فیزیکدان و استاد ریاضی دانشگاه باسل[۵] بود. در ابتدا به سفارش پدرش به مطالعه الهیات پرداخت، ولی برخلاف علایق و آرزوهای والدینش به ریاضیات و نجوم روی آورد. در خلال سال‌های ۱۶۷۲ تا ۱۶۸۸ او به سراسر اروپا مسافرت کرد و آخرین دستاوردهای ریاضیات و علوم را فراگرفت و طی ملاقاتی که با لایب نیتز[۶] داشت، علم حسابان را فرا گرفت و سپس به کمک برادرش یوهان مقالاتی درباره اشکال هم محیط ارائه کرد. او نخستین فردی بود که توانست روش‌های حل معادلات جدایی‌پذیر را گسترش دهد. وی در کتاب خود تحت عنوان فن حدس‌زدن، اصل اساس نظریه احتمالات، معروف به قضیه برنولی یا قانون اعداد بزرگ را بیان کرد. او ضمن بیان کاربردهای مهمی از مختصات قطبی، فرمول شعاع انحنای یک منحنی در مختصات دکارتی و قطبی را به‌دست آورد. نام وی در شاخه‌هایی از ریاضیات مانند آمار با قضیه برنولی، معادلات دیفرانسیل با معادله برنولی، نظریه اعداد و چندجمله‌ای‌های برنولی همراه می‌باشد یاکوب نخستین بار واژه انتگرال را وارد ریاضیات نمود و در سن پنجاه سالگی بدرود حیات گفت [۱، ۱۵].

شکل ۲: یاکوب برنولی

[۵] Basel [۶] Leibniz

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

۳. دانیل

دانیل برنولی (۱۷۰۰–۱۷۸۲) که در فارسی نام او را دانیل برنویی نیز نوشته‌اند، یکی از آخرین بازماندگان خانواده برنولی است که سهم زیادی در پیشبرد ریاضیات عالی، نظریه احتمالات و آمار ریاضی و فیزیک در قرون هفده و هجده داشته است. دانیل برنولی ریاضیدان سوئیسی هلندی‌الاصلی بود که در زمینه ارائه فرمول‌های مختلف ریاضی از اعتبار بالایی در تاریخ این علم برخوردار است. وی فرزند یوهان برنولی بود، در گرونینگن[۷] چشم به جهان گشود و این درحالی بود که پدرش در علم ریاضیات جایگاه بالایی برای خود دست و پا کرده بود. برادر بزرگ‌ترش نیکلاس برنولی و عمویش، یاکوب برنولی نیز از جمله چهره‌های سرشناس در علم ریاضیات بودند از این رو او نیز به‌صورت طبیعی در میان فرمول‌ها و مباحث مختلف ریاضی رشد و نمو پیدا کرد. دانیل ۵ ساله بود که برادر دیگرش یعنی یوهان برنولی چشم به جهان گشود. هر سه برادر در سال‌های بعدی به‌مطالعه ریاضی علاقه خاصی پیدا کردند، اما این چیزی نبود که پدر خانواده برای دانیل برنامه‌ریزی کرده بود، او می‌خواست که فرزندش در زمینه تجارت و کسب و کار به مراتب و درجات بالایی برسد از این رو بر چنین ایده‌ای پافشاری می‌کرد، به همین دلیل دانیل در سال ۱۷۱۵ میلادی راهی دانشگاه باسل شد و در ۱۳ سالگی دررشته فلسفه و منطق مطالعه می‌کرد با این حال او همواره اشتیاق درونی به مطالعه ریاضیات داشت که البته این اشتیاق عمدتاً به‌واسطه علاقه خاص پدرش به این علم مربوط می‌شد. وی در حالی که در دانشگاه باسل مشغول گذراندن دوره‌های تحصیلی در رشته فلسفه و منطق بود، به‌صورت همزمان در ریاضی نیز مطالعات خود را ادامه می‌داد. او خیلی زود دست آوردهایش را در سال ۱۷۲۴ در زمینه‌ی معادلات ریکاتی که به‌صورت زیربیان شده انتشار داد [۱۱].

$$\frac{dy}{dx} = q_۰(x) + q_۱(x)y + q_۲(x)y^۲$$

شکل ۳: دانیل

۴. یوهان، پدر دانیل

او استاد ریاضی در دانشگاه گوتینگن[۸] هلند و بعداً در دانشگاه باسل بود. او به ریاضیدان معروف فرانسوی، هوپیتال، مبنای علم حسابان را آموزش داد و پس از مرگ نیوتون، درسال ۱۷۲۷ به عنوان مهمترین ریاضیدان اروپای آن زمان شناخته شد. شروع تحصیل او با پزشکی بود، پدرش چندان موافق تحصیل وی در این زمینه نبود

[7] Groningen [8] Gottingen

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

و از او می‌خواست به تجارت و کسب و کار روی آورد. او توانست پدرش را متقاعد کند، و در سال ۱۶۹۴ رشته پزشکی را با نوشتن پایان نامه‌ای درباره انقباض ماهیچه به اتمام رساند. بعد از مدتی پزشکی را رها کرد و با برادر بزرگش یاکوب، شروع به مطالعه ریاضیات کرد و توانست به کمک وی علم حسابان را در مسائل گوناگون دیگر به‌کار گیرد. با اینکه دو برادر در ابتدا با هم کار می‌کردند، ولی بعد از مدتی این تلاش تبدیل به رقابت و حتی حسادت شد. گه‌گاه اختلاف عقیده آن‌ها تا سر حد کینه‌توزی همراه با ناسزاگویی در ملاء عام اوج می‌گرفت. در سال ۱۶۹۶ یوهان مسأله‌ای را برای زور آزمایی فکری به ریاضیدانان اروپا ارائه کرد که نیوتن، لایب نیتز و دیگر برنولی‌ها آن را حل کردند. راه حل یوهان ظریف‌تر بود، حال آنکه راه حل یاکوب کمی دشوار ولی کلی بود. این مسأله سرآغاز نزاع تندی گردید که چندین سال ادامه یافت و غالباً به ناسزاگویی شدید و حتی خیابانی می‌کشید. فتنه‌جویی یوهان تا آنجا پیش رفت که بر سر حسادت نسبت به پسرش دانیل که از فرهنگستان فرانسه موفق به دریافت جایزه شده بود، او را از خانه بیرون انداخت. یوهان برنولی فردی حساس، زودرنج و شهرت‌طلب بود. او تلاش کرد که از شهرت دانیل، با تغییر تاریخ چاپ کتاب هیدرولیک به ۱۷۲۸، برای آنکه نشان دهد کتاب او زودتر چاپ شده است، بکاهد. محبت چندانی بین پدر و پسر وجود نداشت. با این همه او معلم موفقی بود. او در اول ژانویه ۱۷۴۸ در ۸۰ سالگی درگذشت.

شکل ۴: یوهان برنولی

۵. معادله برنولی

در ریاضیات، معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n$$

معادله دیفرانسیل برنولی نامیده می‌شود که nیک عدد حقیقی و $n \neq ۰$یا $n \neq ۱$. این معادله، به یادبود یاکوب برنولی، کسی که آن را در سال ۱۶۹۵ کشف کرده است، نامگذاری شده است. در ادامه بررسی خواهیم کرد که چه کسی برای اولین بار معادله دیفرانسیل برنولی را حل کرده است. آدام پارکر[9] [۱۰] راجع به این موضوع تحقیقاتی انجام داده است.

[9] Adam E. Parker

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

شکل ۵: آدام پارکر

بنا به اظهارات آدام پارکر همانطور که از نام معادله مشخص است این کارنتیجه تحقیقات یکی از برنولی ها بوده است اما این کار نتیجه‌ی کار کدام برنولی می‌باشد؟ در زیر نخستین کسانی که مظنون به حل معادله هستند را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

آیا لایب نیتز معادله را حل کرده است؟

بنا به [[۶], pp.۲۲]، راه‌حل این معادله توسط گاتفرید لایب‌نیتز، ریاضیدان آلمانی، کشف شده است.

آیا یاکوب برنولی که در نظریه احتمالات شناخته شده بود، پاسخ دهنده این معادله بوده است؟

بنابه [[۷], p.۹۶]، یاکوب برنولی در ۱۶۹۵، راه حل کامل را بیان می‌کند.

آیا یوهان برنولی برادر جوانتر یاکوب معادله را حل کرده است؟

واریگنون [[۸], p.۱۴۰]، در سال ۱۶۹۷ خطاب به یوهان برنولی بیان می‌کند که در حقیقت هیچ جوابی هوشمندانه‌تر از راه حل تو برای معادله برادرت، یاکوب برنولی وجود ندارد و این راه حل بسیار ساده و ظریف است.

آیا همین سه نفر به حل این معادله پرداخته‌اند؟ کلین[۱۰] [۳]، می‌گوید گاتفرید لایب‌نیتز، ریاضیدان و پروفسور آلمانی، دردسامبر سال ۱۶۹۶ نشان داد که می‌توان معادله برنولی را به وسیله تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول کاهش داد و آن را حل نمود. یوهان برنولی روش دیگری برمی‌گزیند و در سال ۱۶۹۶، جامز به طور اساسی معادله را به روش جداسازی متغیرها حل کرد.

صرف نظر از این که چه کسی به جواب معادله برنولی رسید، به‌طور حتم اولین بار یاکوب برنولی این مسئله را در سال ۱۶۹۵ منتشر کرد. او چندین ماه روی این مسئله تمرکز کرده بود و تصمیم گرفت برای حل آن، یک رقابت را سازماندهی کند.

اگرچه، این معادله به‌طور کامل توسط یاکوب برنولی بررسی نشده بود اما بخشی از این محاسبات مربوط به معادله دبون است که توسط فلوریمند دی بوین در سال ۱۶۳۸ به دکارت پیشنهاد شد.

از نظر هندسی، دبون بدنبال یک منحنی بود که معادل با حل معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\alpha}$ است، اما چنین تحلیلی برای چندین دهه بدون حل باقی ماند. از طرفی دبون به دنبال راه حلی برای دستگاه با محورهایی به شیب ۴۵ درجه

[10] Klin

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

بود که لنویر نشان داد که مسئله هندسی اورا می توان به‌طور تحلیلی به‌صورت یک معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha}{y-x}$ بیان کرد.

گلدشتاین، در[۴] بیان می‌کند چگونه معادله دیفرانسیلی مانند

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۲}x^{-۱}y-\frac{۱}{۲}y^{-۱}x$$

می‌توان با تعمیم معادله دبون به‌دست آورد. معادلاتی مانند

$$\frac{dy}{dx}=\alpha y x^{m}+b y^{r} x^{v}$$

توسط یاکوب برنولی مورد مطالعه قرار گرفته بود که آنها را می توان در دست نوشته های Meditationes CCXXXII و XII Posthuma Varia مشاهده نمود. معادلات فوق امروزه بیشتر به صورت

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^{r}$$

تعمیم پیدا کرده است. داستان فرضیه این معادله جالب و بحث برانگیز بوده است. پاسخ یاکوب برای حل معادله اصلی دبون را هوپیتال برای هویگنز می‌فرستد، سپس خودش با یک نام مستعار آنرا چاپ می کند. در مجموع، روش‌هایی مانند سری‌ها، جداسازی متغیرها و جایگزینی تکنیک‌هایی هستند که اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرند.

حال ۳۰۰ سال به جلو می‌رویم و راه حل معادله برنولی را مرور می‌کنیم. با جایگزینی $\omega=y^{۱-n}$، معادله

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^{n}$$

به معادله خطی مرتبه اول،

$$\frac{d\omega}{dx}+(۱-n)P(x)\omega=(۱-n)Q(x)$$

تبدیل می‌شود. با ضرب طرفین در عامل انتگرال‌ساز

$$\mu(x)=e^{\int(۱-n)P(x)\mathrm{d}x}$$

وبا انتگرال‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\omega\mu=e^{\int(۱-n)P(x)\mathrm{d}x}(۱-n)Q(x)dx,$$

که مقدار w و در نتیجه y برای ما به‌دست می‌آید.

اما نتایج کار هر کدام از این افرادچه بخشی از نتیجه کلی را به خود اختصاص داده‌اند؟ در ادامه به جزئیات جواب این سوال می‌پردازیم.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

۱.۵. راه‌حل لایب‌نیتز. در متن شکل ۶، ما بیانیه‌ای از مسئله و ادعای اینکه با تغییر متغیر به "z" معادله برنولی به شکل

$$\cdots dv + \cdots vdz + \cdots dz = 0$$

کاهش می‌یابد را داریم. این یک معادله خطی است و لایب‌نیتز دقیقاً روشی راکه ما امروزه استفاده می‌کنیم بیان می‌کند.

dis, ſeparandisve ab invicem indeterminatis. *Problema* de eo præſtando circa æquationem differentialem $ady = ypdx + by^n . qdx$ ſolvere poſſum, & reduco ad æquationem, cujus forma eſt $\ldots dv + \ldots vdz + \ldots dz = o$, ubi per punctata intelliguntur quantitates utcunque datæ per z. Talis autem æquatio generaliter per me reducta eſt ad quadraturas, ratione jam dudum amicis communicata, quā hic exponere neceſſarium non puto, contentus effeciſſe, ut acutiſſimus Autor problematis agnoſcere poſſit methodum (ut opinor) non diſſimilem ſuæ. Neque enim dubito & hoc ipſi innotuiſſe. Et ſunt a me in iſtis multa olim tentata,

شکل ۶: حل لایب‌نیتز

با این حال ما می‌بایست به چند مورد سوال برانگیز در این متن توجه نماییم. لایب نیتز حرفی از عملیات جای‌گذاری که شکل معادله را به فرم معادله دیفرانسیل خطی کاهش می‌دهد به میان نیاورده است. او نه تنها حرفی ازبه‌دست آوردن ضرائب توابع به میان نیاورده است بلکه آن را جا انداخته است، به همین خاطر خواننده نمی‌تواند از جای‌گذاری سر دربیاورد. آیالایب نیتز عمداً می‌خواهد مبهم و گنگ باقی بماند؟

یادآوری می‌کنیم که در آن زمان پاسخ معادلات دیفرانسیل خطی شناخته شده و معمول نبود. لایب نیتز تکنیک و روش کار خود را در نامه‌ای به تاریخ ۲۷ نوامبر ۱۶۹۴ که در شکل ۷ آمده به یکی از دوستانش مانند هوپیتال در میان می‌گذارد.

raux et peuvent estre poussés plus loin: Soit $m + ny + dy : dx = 0$, ou m et n signifient des formules rationelles, ou irrationelles mais qui ne dependent que de la seule indeterminée x, je dis qu'on la peut resoudre generalement par $\int \overline{mpdx} + py = 0$, posito $\int \overline{dp : p} = \int \overline{ndx}$. Nam differentiando fit $mpdx + ydp + pdy = 0$, sed $dp = pndx$, ergo fit $mpdx + npydx + pdy = 0$ seu $mdx + nydx + dy = 0$, ut desiderabatur.

شکل ۷: تکنیک لایب‌نیتز

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

در این تکنیک لایب‌نیتز متغیر جدید p را به کمک معادله $\frac{dp}{p} = ndx$ تعریف می‌کند. با جای‌گذاری در معادله دیفرانسیل خطی داریم:

$$pmdx + ydp + pdy = \circ$$

با توجه به اینکه دو جمله آخر معادله فوق از قانون حاصل‌ضرب $d(py)$ به‌دست می‌آید با انتگرال‌گیری از را بطه زیر خواهیم داشت:

$$\int pm\mathrm{d}x = -py$$

که به این‌ترتیب y به‌دست می‌آید.

در حقیقت لایب‌نیتز از انتگرال‌گیری برای رسیدن به راه‌حل استفاده می‌کند مانند به‌دست آوردن ناحیه زیر یک منحنی. علی‌رغم این موضوعات، در ژولای ۱۶۹۶ یاکوب برنولی مقاله‌ای دیگر برای بار دوم در Acta چاپ و اعلام می‌کند که مسئله وی حل شده است[۴] . برنولی عنوان می‌کند که لایب‌نیتز مسئله چالش برانگیز او را حل کرده و توانسته معادله دیفرانسیل وی را به معادله دی بوین ربط دهد.

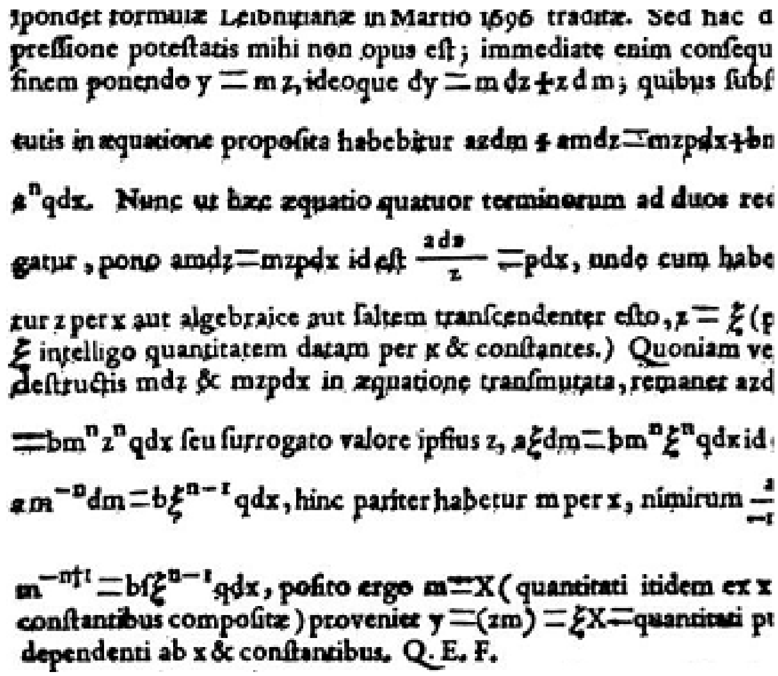
۲.۵. راه‌حل یوهان. کمتر از یک سال بعد، در مارچ ۱۶۹۷ یوهان برنولی یک مقاله در مجله Acta چاپ می کند[۵] . یوهان واقعاً دو راه حل برای آن ارائه داده است!

Æquatio propoſita eſt hæc: $ady = ypdx + by^n qdx$ (ubi a & b quantitates datas & conſtantes, n poteſtatem quamvis literæ y; p & q quantitates utcunque datas per x denotant) ſeparandæ ſunt in illa literæ indeterminatæ x & y cum ſuis differentialibus a ſe invicem, ut ſaltem per quadraturas conſtrui poſſit; idquod ſic facio: Ut poteſtas n deprimatur ponendum eſt $y^n = \frac{n}{v1-n}$, unde propoſita mutatur in hanc ulterius reſolvendam $\frac{1}{1-n} adv = vpdx + bqdx$, quæ reſpondet formulæ Leibnitianæ in Martio 1696 traditæ. Sed hac de-

شکل ۸: راه حل اول یوهان

راه‌حل اول یوهان بخشی از روش لایب‌نیتز است که در متن شکل ۸ می‌توان مشاهده نمود. او با استفاده از جایگزینی $y = v^{\frac{1}{(1-n)}}$، معادله برنولی را به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل کرده است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225


ſpondet formulæ Leibnitianæ in Martio 1696 traditæ. Sed hac a
preſſione poteſtatis mihi non opus eſt; immediate enim conſequ
finem ponendo $y = mz$, ideoque $dy = mdz + zdm$; quibus ſubſ
tutis in æquatione propoſita habebitur $azdm + amdz = mzpdx + bm$
$z^n qdx$. Nunc ut hæc æquatio quatuor terminorum ad duos red
gatur, pono $amdz = mzpdx$ id eſt $\frac{adz}{z} = pdx$, unde cum habe
tur z per x aut algebraice aut ſaltem tranſcendenter eſto, $z = \xi$ (p
ξ intelligo quantitatem datam per x & conſtantes.) Quoniam ve
deſtructis mdz & $mzpdx$ in æquatione tranſmutata, remanet azd
$= bm^n z^n qdx$ ſeu ſurrogato valore ipſius z, $a\xi dm = bm^n \xi^n qdx$ id
$am^{-n}dm = b\xi^{n-1}qdx$, hinc pariter habetur m per x, nimirum $\frac{a}{-n+1}$
$m^{-n+1} = b\int \xi^{n-1}qdx$, poſito ergo $m = X$ (quantitati itidem ex x
conſtantibus compoſitæ) proveniet $y = (zm) = \xi X =$ quantitati pu
dependenti ab x & conſtantibus. Q. E. F.

شکل ۹: راه حل دوم یوهان

مطلبی که به‌دنبال آن هستیم راه حل دوم یوهان است که در متن شکل ۹ می‌توان مشاهده نمود. در این راه حل یوهان جواب را به‌صورت $y = mz$ در نظر می‌گیرد. جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل $ady = ypdx + by^n qdx$ به این معنا است که y، منجر به‌حل معادله دیفرانسیل کلی می‌شود. سپس $a\dfrac{dz}{z} = pdx$ را در نظر می‌گیرد. به‌عبارت دیگر، z در $a\dfrac{dy}{dx} = yp$ قسمت همگن از معادله برنولی

$$a\frac{dy}{dx} = yp + by^n q.$$

صدق می‌کند. آنچه یوهان به‌عنوان راه‌حل در دو قسمت $y = mz$ نوشته است، یک درجه از آزادی را بیان می‌کند. تابع z برای حل معادله دیفرانسیل همگن انتخاب شده در حالی‌که mz معادله کلی را حل خواهد کرد.

ابتدا z را به‌عنوان جوابی از معادله همگن $adz = zpdx$ در نظر می‌گیریم. بنابراین چون یک معادله تفکیک‌پذیر می‌شود لذا می‌توان آن را برای z که تابعی از x و ثابت است، حل نمود. ثانیاً، چون $y = mz$ منجر به حل معادله دیفرانسیل برنولی می‌شود، داریم:

$$ady = a(mdz + zdm) = mzpdx + bqdx.$$

چون $adz = zpdx$، داریم

$$azdm = bqdx.$$

با جایگزینی z در معادله دیفرانسیل بالا، به معادله تفکیک‌پذیر دیگری منجر می‌شود که می‌توان آن را برای m حل نمود. سرانجام با نوشتن $y = mz$ حل معادله دیفرانسیل خطی به‌دست خواهد آمد.

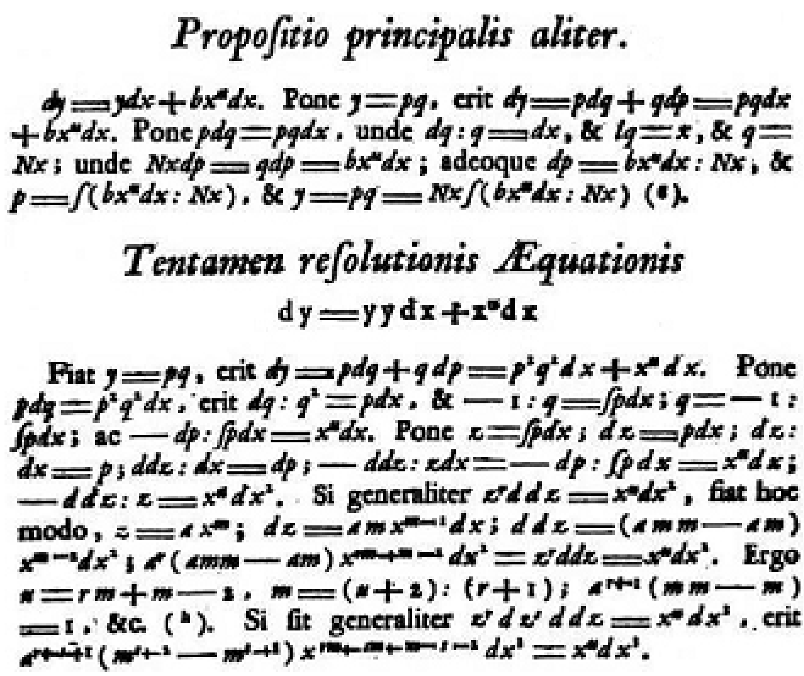
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

شکل ۹، متن نامه‌ی اولیه و تحت اللفظی نوشته شده یوهان به لایب نیتز به تاریخ آگوست ۱۶۹۶ می‌باشد [[۱۳] .p.۳۲۳]، این نامه نشان می‌دهد که وی حداقل هشت ماه قبل از چاپ این مقاله از تکنیک به‌کار گرفته شده آگاهی داشته است. در واقع، یوهان در دسامبر ۱۶۹۶ به هوپیتال می‌نویسد که این معادله برای من زحمت و درد سری نداشت.

۳.۵. هنوز خیلی زوده دوستان من! داستان به همین‌جا ختم نمی‌شود. بعد از مرگ یاکوب، نوشته‌ها و مقالات او جمع‌آوری و همراه با هم، به انضمام نکات و یادداشت‌های فراوانی از سوی سردبیر کرامر [۱۱]، تحت عنوان Omnia Basiliensis چاپ می‌شود. او همچنین خوانندگان را متوجه دست نوشته‌های کتاب Varia Posthuma یاکوب می‌نمایید. به‌طوریکه در فصل هفتم کتاب فوق یاکوب به معادله $dy = ayx^m dx + by^r x^\nu$ حمله ور می‌شود، البته می‌توان آن را یک نسخه ساده‌تر از معادله دیفرانسل برنولی تصور کرد. درمتن شکل۱۰ نمونه مثال‌هایی را که یاکوب مورد بررسی قرار داده می‌توان مشاهده نمود:

$$dy = ydx + bx^v dx,\ ۲)dy = yydx + x^v dx.$$

وی برای حل آنها از تغییر متغیر $y = pq$ استفاده نموده است. در مثال اول q، معادله دیفرانسیل همگن $dy = ydx$ را حل می‌کند.



Propositio principalis aliter.

$dy = ydx + bx^n dx$. Pone $y = pq$, erit $dy = pdq + qdp = pqdx + bx^n dx$. Pone $pdq = pqdx$, unde $dq : q = dx$, & $lq = x$, & $q = Nx$; unde $Nxdp = qdp = bx^n dx$; adeoque $dp = bx^n dx : Nx$, & $p = \int(bx^n dx : Nx)$, & $y = pq = Nx\int(bx^n dx : Nx)$ (*).

Tentamen resolutionis Æquationis

$dy = yydx + x^n dx$

Fiat $y = pq$, erit $dy = pdq + qdp = p^2q^2dx + x^n dx$. Pone $pdq = p^2q^2dx$, erit $dq : q^2 = pdx$, & $-1 : q = \int pdx$; $q = -1 : \int pdx$; ac $-dp : \int pdx = x^n dx$. Pone $z = \int pdx$; $dz = pdx$; $dz : dx = p$; $ddz : dx = dp$; $-ddz : zdx = -dp : \int pdx = x^n dx$; $-ddz : z = x^n dx^2$. Si generaliter $z^r ddz = x^n dx^2$, fiat hoc modo, $z = ax^m$; $dz = amx^{m-1}dx$; $ddz = (amm - am)x^{m-2}dx^2$; $a^r(amm - am)x^{rm+m-2}dx^2 = z^r ddz = x^n dx^2$. Ergo $n = rm + m - 2$, $m = (n+2):(r+1)$; $a^{r+1}(mm - m) = 1$, &c. (b). Si fit generaliter $z^r dz^t ddz = x^n dx^3$, erit $a^{r+t+1}(m^{t+2} - m^{t+1})x^{rm+tm+m-t-2}dx^3 = x^n dx^3$.

شکل ۱۰: مثال‌های یاکوب

بخش جالب آن اینجاست که فصل هفتم کتاب Posthuma Varia توسط یاکوب بین سپتامبر ۱۶۹۴ تا ژوئن ۱۶۹۶ نوشته شده است، اگرچه یاکوب ممکن است که از تکنیک خودش برای حل معادله دیفرانسل خودش

[۱۱] Cramer

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

(معادله دیفرانسل برنولی) استفاده نکرده، یا حداقل توانایی و عملکرد آن تکنیک را به‌طورکلی به‌کارنبرده باشد اما به‌نظر می‌آید حداقل همانند برادرش توانایی به‌کارگیری تکنیک تغییر پارامترها را داشته است.

۶. اصل برنولی در فیزیک

دانیل برنولی، دانشمندی بود که معادله‌ای درباره شاره‌ها به‌دست آورد. اصل برنولی در مکانیک سیالات رفتار شاره را در جریان یکنواخت توضیح می‌دهدو فرم ریاضی قانون بقای انرژی در سیالات است[۱۴]. به زبان ساده چنین است، در شاره‌ای که جریان دارد افزایش سرعت جریان با کاهش فشار هم زمان است، به شرطی که ارتفاع سیال ثابت بماند. معادله برنولی بیان دقیق‌تر این اصل است. به عبارت دیگر اگر سرعت یک سیال افزایش پیدا کند، فشاری که بر یک سطح وارد می‌کند کاهش می‌یابد و بالعکس. حال اگرفرض کنید یک قسمت از شلنگ آب را تنگ کنید. آب از آن جهت می‌جهد. یعنی سرعت به فشار و سطح مقطع بستگی دارد. فرض کنید که یک سر شلنگ بالاتر از دیگری باشد. باز هم در فشار خروج آب اثری مشاهده می‌شود.

بیان هد این معادله که بیانگر بقا ارتفاع یا هد سیال است (و از تقسیم معادله بر شتاب گرانش به‌دست می‌آید) چنین است:

$$(\frac{p}{\rho g}+\frac{v^{۲}}{۲g}+z)=b.$$

که در آن pفشار، ρچگالی شاره، vسرعت شاره ،zارتفاع شاره وb عددی ثابت معروف به ثابت برنولی است.

از طرفی دانیل برنولی در سال ۱۷۳۸ در کتاب خود به نام هیدرودینامیک توضیح داد: افزایش سرعت یک سیال (غیر لزج) به‌طور همزمان باکاهش فشار و یا کاهش در انرژی پتانسیل آن همراه است. زمانی‌که شما داخل لوله فوت می‌کنید، جریان هوا به عنوان یک سیال از فشار آن بر نوارهای کاغذی می‌کاهد، و در نتیجه فشار اتمسفر از بیرون، نوارها را به همدیگر می‌چسباند. اگر بخواهم ساده و دوستانه بگویم، مولکول‌های یک سیال در حال حرکت، برخلاف برخی راننده‌ها، بیشتر حواسشان به جلو و مسیر حرکتشان است، نه اطراف و به‌همین خاطر فشارشان به اطراف کم می‌شود[۱۹].

مثال‌هایی از اصل برنولی :

سیستم های اندازه گیری مواد نفتی به روش اختلاف فشار یک روش اندازه‌گیری سیالات می‌باشد که با توجه به اهمیت دقت دراندازه‌گیری محصولات هیدروکربني کاربرد فراواني درصنعت نفت دارد. این سیستم بر اساس قانون برنولی طراحی شده است [۱۶].

یک لوله یا شلنگ باریک مانند خودکار بیک پیدا کنید و یک سر آن را دو نوار باریک کاغذی از روبرو بچسبانید، به طوریکه فاصله آنها از همدیگر حدود نیم سانتی‌متر باشد. اگر از سر دیگر فوت کنید، در این صورت برخلاف انتظار نوارها براساس اصل برنولی به هم نزدیک می‌شوند[۱۷].

قطاری که به سرعت حرکت می‌کند، براساس اصل برنولی می‌تواند شخصی را که زیادی نزدیک آن ایستاده را به خود جذب کند[۱۴].

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

۷. کاربردهای اصل برنولی

از جمله کاربردهای این معادله عبارتند از:

* **سوختگیری باک ماشین است.** برای این‌که جریان بنزین از گالن به باک را هدایت کنید، در صورتی‌که نخواهید شلنگ رابط را مک بزنید، فشار را در گالن بیشتر کنید تا شارش از فشار زیاد به فشار کم جریان یابد، یعنی بلندتر گرفتن ارتفاع گالن نسبت به ارتفاع باک [۱۴].

* **جمع شدن تفاله‌های چای.** چرا تفاله‌های چای در وسط استکان جمع می‌شود؟

هم زدن باعث آن می‌شود که مایع به دور فنجان بچرخد. دلیل این هم همان نیروی گریز از مرکز است، که جهت آن به سمت بیرون واقع شده است. اما در نزدیکی‌های ته و لبه فنجان مایع به دلیل وجود اصطکاک آرامتر می‌شود. آنجا نیروی مرکزگرا ضعیف‌تر است و اختلاف فشار اهمیت بیشتری برای جریان مایع پیدا میکند. این اتفاق را لایه مرزی و یا به‌طور خاص‌تر یک لایه اکمن [12] می‌نامند. به دلیل وجود نیروهای گریز از مرکز فشار در امتداد لبه ها بیشتر از میان فنجان است.در یک فنجان چای، از آنجایی که چرخش در پایین فنجان آهسته‌تر است، گرادیان فشار افزایش می‌یابد و یک جریان به‌سمت داخل در امتداد انتهای فنجان ایجاد می‌کند. در عوض در قسمت بالایی، مایع به سمت بیرون جریان می‌یابد. این جریان ثانویه که به سمت داخل و در امتداد انتهای فنجان حرکت می‌کند، تفاله‌های چای را به مرکز فنجان می‌آورد. و به همبن صورت ادامه می‌یابد. تفاله‌های چای برای اینکه به سمت قسمت بالایی فنجان بیایند، بسیار سنگین هستند. بنایراین در همان قسمت میانه فنجان می مانند. همراه با جریان چرخشی اولیه، تفاله‌ها یک حرکت مارپیچی در انتهای فنجان خواهند داشت.

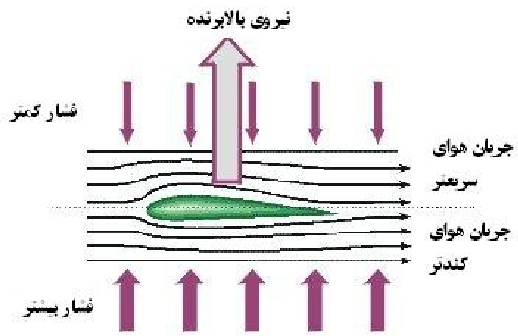
* **پرده سقفی اتومبیل‌ها.** یکی از کاربردهای قانون برنولی در توجیه پف کردن پرده سقفی اتومبیل‌ها به سمت بالا می‌باشند. چنانچه تمام پنجره‌های داخل اتومبیل‌هایی که در بزرگراه‌ها با سرعت زیاد در حال حرکت هستند بسته باشند پرده سقفی به سمت بالا پف نموده و برجسته می‌شود به این دلیل که هوای خارج اتومبیل با سرعت زیاد از روی پرده جریان دارد، در حالی‌که هوای داخل اتومبیل درحال سکون است. بنابراین، هوای خارج نسبت به داخل فشار کمتری دارد و در نتیجه پرده سقفی به طرف بیرون پف خواهد کرد[۱۸].

۸. آیرودینامیک پرواز

قانون برنولی یکی از مهم‌ترین و در عین حال جالب‌ترین قوانین مکانیک سیالات یعنی علم مطالعه حرکات مواد سیال است. به بیان ساده این قانون چنین می‌گوید: اگر سرعت یک سیال افزایش پیدا کند، فشاری که بر یک سطح وارد می‌کند کاهش می‌یابد و بالعکس. این قانون نقش مهمی در آیرودینامیک یا علم مطالعه نیروهای وارد بر سیالات دارد.

* **بال هواپیما.** شکل ۱۱ پدیده‌ای را نشان می‌دهد که در هنگام عبور جریان هوا از دو طرف بال هواپیمای در حال حرکت افقی رخ می‌دهد. جریان هوا در هنگام برخورد به لبه حمله بال (لبه جلویی) به دو قسمت تقسیم می‌شود. قسمتی که از روی سطح بالایی عبور می‌کند به‌علت طول بیشتر این سطح باید سریعتر حرکت کند تا خود را به قسمت پایینی جریان هوا به‌رساند. در نتیجه افزایش سرعت نیمه بالایی جریان هوا، فشاری که به سطح بالایی بال وارد می‌کند کمتر می‌شود. در نتیجه فشار روی سطح بالایی کمتر از فشار روی سطح پایینی است و اختلاف این دو به‌صورت نیروی بالابرنده عمل می‌کند [۱۲].

[12] Ekman



شکل ۱۱: بال هواپیما

مراجع

[1] http://www.thefamouspeople.com

[2] G. Piella, *Adaptive wavelets and their applications to image fusion and compression*, Ph. D. dissertation, Centre for Mathematics and Computer Science, University of Amsterdam, 2003.

[3] M. Kline, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, **2**, Oxford University Press, New York, 1990.

[4] Ja. Bernoulli and Jo. Bernoulli, *Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli*, Variationsrechnung, H. Goldstine, ed., Birkh¨auser Verlag Press, Basel, 1991.

[5] Jo. Bernoulli, *De conoidibus et spaeroidibus quaedam. Solutio analytica æquationis in Actis A*, 1695, pp. 553 propositæ (A Fratre Jac. Bernoullio), Acta Eruditorum, (1697) 113–118.

[6] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Press, New York, 1944.

[7] I. Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, **3**, D. T. Whiteside, ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[8] E. Hairer and G. Wanner, *Analysis By Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York, 2008.

[9] G. W. Leibniz, Notatiuncla ad Acta Decemb, 1695, pp. 537 et seqq., *Acta Eruditorum*, (1696) 145-147.

[10] A. E. Parker, Who Solved the Bernoulli Differential Equation and How Did They Do It?, **44**, 2013 the college mathematics journal.

[11] John E. Sasser, *History of ordinary differential equations The first hundred years*, Mathematics and Applied Sciences University of Cincinnati.

[12] http://scitech.blogsky.com/1390/11/25/post-309/.

[13] Mathematische Schriften, Band III/1, Briefwechsel Zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli, C. I. Gerhardt, ed., Halle, 1855.

[۱۴] https://fa.wikipedia.org/wiki/معادله برنولی

[۱۵] و. فغفوری، خانواده برنولی ها، همراه با ریاضی، **۴۸/۶** شماره ۴۵.

[۱۶] ا. فراهانی، سیستم هاي اندازه گیري جریان بر اساس اختلاف فشار، ماهنامه اکتشاف و تولید، شماره ۱۰۰ (۱۳۹۲).

[۱۷] پ. یاکوف، *فیزیک برای سرگرمی*، ترجمه احسان قوام زاده.

[۱۸] دانشنامه رشد– اصل برنولی

[۱۹] http://bigbangpage.com/physics/اصل برنولی

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225

سید علی محمد محسنی الحسینی
دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه یزد، دانشکده علوم ریاضی
amah@vru.ac.ir؛ mohsenhosseini@yazd.ac.ir؛ mohsenialhosseini@gmail.com

سید علی محمد محسنی الحسینی متولد شهریور ماه ۱۳۴۰ در شهر یزداست. وی در سال ۱۳۶۶ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه سیستان وبلوچستان شد و در سال ۱۳۷۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریا ضی کاربردی دانشگاه تربیت مدرس شدو در سال ۱۳۹۰ دکتری محض خویش رابا گرایش آنالیز نقاط ثابت تحت راهنمائی محمد علی دهقان وحمید مظاهری دریافت نمود.

هنگامه سنمار
دانشگاه یزد، دانشکده علوم ریاضی
Hg۲snm@gmail.com

هنگامه سنمارمتولد ۱۳۶۸ است. وی در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضیات وکاربردها و در سال ۱۳۹۳ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه یزد شد.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.103951.1225