

انعطاف و تسهیل قاب‌ها نسبت به پایه‌ها در انتقال سیگنال

محسن اسماعیل بیگی* و امید چتر آنگون

چکیده. پایه‌ها یکی از ابزارهای بنیادین در ریاضیات کاربردی می‌باشند و از گذشته تا به حال، از پایه‌های چندجمله‌ای تا پایه‌های موجکی، همواره نقشی انکارناپذیر در گسترش مرزهای دانش داشته‌اند. با این وجود، شرایطی که یک پایه باید از آن برخوردار باشد، بسیار محدود کننده است. در حقیقت، عناصر یک پایه باید مستقل خطی بوده و در صورت امکان نسبت به یکدیگر متعامد باشند. چنین امری باعث می‌گردد دسترسی به پایه‌هایی که از انعطاف‌پذیری مناسب برخوردار باشند، دشوار یا حتی غیر ممکن گردد. قاب‌ها، گزینه‌ای مناسب برای دسترسی به پایه‌هایی با ویژگی‌های محدود کننده کمتر و دارای انعطاف‌پذیری بیشتر می‌باشند. به منظور آشنایی هرچه بهتر با مزیت‌های استفاده از قاب‌ها در عرصه‌های متنوع کاربردی، به مرور اجمالی نقش قاب‌ها در کاهش اثرات اختلال‌های تصادفی در پردازش سیگنال خواهیم پرداخت.

۱. مقدمه

یکی از مهمترین مفاهیم در مطالعه فضاهای برداری، پایه‌ها می‌باشند. با استفاده از پایه‌ها، همه عناصر فضای برداری در قالب این ابزارها قابل نمایش هستند. به علاوه آشنایی با ویژگی‌های عناصر پایه، امکان شناخت ویژگی‌های عناصر در فضای برداری را فراهم می‌سازد. اما دسترسی به یک پایه در یک فضای برداری مستلزم پذیرش شرایط محدود کننده‌ای است. نخست آنکه، عناصر پایه باید مستقل خطی باشند. به علاوه برای داشتن یک پایه کارآمد، تحقق شرط تعامد نسبت به یک ضرب داخلی ضروری به نظر می‌رسد. شرایط فوق عمدتاً مانع از آن می‌شود تا به پایه‌ای با ویژگی‌های مطلوب و مد نظر دسترسی یابیم. این امر باعث می‌گردد تا به دنبال ابزارهایی با انعطاف‌پذیری بیشتر و شرایط محدود کننده کمتر باشیم. در حقیقت قاب‌ها^۱ پاسخ مناسبی به این نیاز می‌باشند. قاب‌ها بدون آنکه الزاماً مستقل خطی باشند، امکان نمایش همه عناصر در فضای برداری را فراهم می‌نمایند.

آشنایی با فضاهای موجک‌ها^۲، لازمه درک هرچه بهتر مزیت‌ها و قابلیت‌های قاب‌ها نسبت به پایه‌ها می‌باشد. اما به منظور آشنایی مقدماتی و آسان‌تر با قابلیت‌های این ابزار جدید، به بررسی فرآیند پردازش سیگنال و نقش قاب‌ها در کاهش اثرات اختلال‌های تصادفی خواهیم پرداخت.

عبارات و کلمات کلیدی. پایه، قاب، انتقال سیگنال، اختلال.

دبیر تخصصی رابط: صغری نوبختیان

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۵/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۰۱

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.33449.1148>

از آنجایی که معرفی قاب‌ها در فضاهای با بعد متناهی آسان‌تر خواهد بود، در مطالب ارائه شده در این مقاله تنها به بررسی عملکرد پایه‌ها و قاب‌ها در فضاهای با بعد متناهی خواهیم پرداخت.

۲. پایه‌ها

در این بخش به معرفی قاب‌ها خواهیم پرداخت [۱].

تعریف ۱.۲. یک خانواده شمارش‌پذیر از عناصر $\{f_k\}_{k=1}^m$ را در V یک قاب برای V گوئیم، هرگاه ثابت‌های مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^m |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in V.$$

اعداد A و B کران‌های قاب نامیده می‌شوند (که این اعداد یکتا نیستند) و V یک فضای برداری با بعد متناهی می‌باشد. کران پایین بهینه، سوپریم روی همه کران‌های پایین قاب می‌باشد و کران بالای بهینه، اینفیم روی همه کران‌های بالای قاب می‌باشد. به‌علاوه قاب، نرمال نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر k ، $\|f_k\| = 1$ باشد. تحقق شرط بالای قاب به کمک نامساوی کوشی-شوارتز همواره دست یافتنی است، یعنی:

$$\sum_{k=1}^m |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^m \|f_k\|^2 \|f\|^2, \quad \forall f \in V.$$

به منظور تحقق شرط پایین برای قاب لازم و کافی است که $\text{span}\{f_k\}_{k=1}^m = V$ باشد، که در قالب قضیه زیر بیان می‌گردد:

قضیه ۲.۲. یک خانواده از عناصر $\{f_k\}_{k=1}^m$ را در V یک قاب برای V گوئیم، اگر و تنها اگر $\text{span}\{f_k\}_{k=1}^m = V$ باشد.

قضیه ۲.۲. بیان می‌دارد که یک قاب ممکن است دربرگیرنده تعداد بیشتری از عناصر به نسبت یک پایه باشد. اگر $\{f_k\}_{k=1}^m$ یک قاب برای V باشد و $\{g_k\}_{k=1}^n$ یک مجموعه دلخواه متناهی از بردارها در V باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $\{f_k\}_{k=1}^m \cup \{g_k\}_{k=1}^n$ نیز یک قاب برای V خواهد بود. اگر V یک فضای برداری مجهز به یک قاب $\{f_k\}_{k=1}^m$ باشد و نگاشت خطی زیر را تعریف کنیم:

$$T: \mathbb{C}^m \rightarrow V; T\{c_k\}_{k=1}^m = \sum_{k=1}^m c_k f_k,$$

T معمولاً عملگر پیش-قاب^۳ نامیده می‌شود. به‌علاوه عملگر الحاقی T به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T^*: V \rightarrow \mathbb{C}^m; T^*f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^m,$$

که عملگر تحلیل^۴ نامیده می‌شود. با ترکیب عملگر T و الحاقی آن یعنی T^* ، عملگر قاب به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$S: V \rightarrow V; Sf = TT^*f = \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle f_k,$$

³Pre-frame ⁴Analysis operator

یک قاب، تنگ^۵ نامیده می‌شود هرگاه در تعریف ۱.۲، $A = B$ باشد، یعنی اگر

$$\sum_{k=1}^m |\langle f, f_k \rangle|^2 = A \|f\|^2, \quad \forall f \in V.$$

برای یک قاب تنگ، مقدار A ، کران قاب نامیده می‌شود. با فرض اینکه $\{f_k\}_{k=1}^m$ یک قاب تنگ برای V با کران قاب A باشد، می‌توان نشان داد که $S = AI$ (که I عملگر همانی روی V است) و

$$f = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle f_k, \quad \forall f \in V.$$

بنابراین اگر $\{f_k\}_{k=1}^m$ یک قاب تنگ باشد و بخواهیم $f \in V$ را به صورت ترکیب خطی $f = \sum_{k=1}^m c_k f_k$ نمایش دهیم، کافی است

$$g_k = \frac{1}{A} f_k$$

و

$$c_k = \langle f, g_k \rangle,$$

در نظر گرفته شود. در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که برای هر قاب $\{f_k\}_{k=1}^m$ یک مجموعه $\{g_k\}_{k=1}^m$ وجود دارد، بطوری که به ازای هر f در V نمایش زیر برقرار باشد:

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, g_k \rangle f_k.$$

قضیه ۳.۲. فرض کنید $\sum_{k=1}^m f_k$ یک قاب برای V با عملگر قاب S باشد، آنگاه روابط زیر برقرار است:
الف) S وارون پذیر و خود الحاق است.
ب) هر f در V را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k.$$

ج) اگر f در V دارای نمایشی به صورت زیر باشد:

$$f = \sum_{k=1}^m c_k f_k,$$

آنگاه

$$\sum_{k=1}^m |c_k|^2 = \sum_{k=1}^m |\langle f, S^{-1} f_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^m |c_k - \langle f, S^{-1} f_k \rangle|^2.$$

⁵Tight

هر قاب در یک فضای با بعد متناهی در برگرنده یک پایه می باشد. اگر $\{f_k\}_{k=1}^m$ یک قاب بوده اما پایه نباشد، آنگاه دنباله غیر صفر $\{d_k\}_{k=1}^m$ موجود است به طوری که

$$\sum_{k=1}^m d_k f_k = 0.$$

بنابراین هر f در V به صورت زیر قابل نمایش است:

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k + \sum_{k=1}^m d_k f_k,$$

که نشان می دهد (علاوه بر نمایش به دست آمده در قضیه ۳.۲) دارای نمایش های دیگری بر اساس جملات f_k می باشد. قضیه فوق نشان می دهد که در میان همه دنباله های $\{c_k\}_{k=1}^m$ که برای آنها نمایش $f = \sum_{k=1}^m c_k f_k$ امکان پذیر است، ضرایب $\{\langle f, S^{-1} f_k \rangle\}_{k=1}^m$ دارای نرم دو کمینه می باشد. اعداد $\langle f, S^{-1} f_k \rangle$ ضرایب قاب نامیده می شوند. لازم به ذکر است که $S: V \rightarrow V$ دو سویی بوده و دنباله $\{S^{-1} f_k\}_{k=1}^m$ نیز یک قاب می باشد که قاب دوگان کانونی^۶ از $\{f_k\}_{k=1}^m$ نامیده می شود.

برای قاب هایی که تنها شامل تعداد اندکی عضو باشند، قاب دوگان کانونی و تجزیه قاب نظیرش با انجام یکسری محاسبات مقدماتی قابل دستیابی است. در مورد سایر قاب ها نیز راهکارهای موثری ارائه شده است [۱].

مثال ۴.۲. با فرض اینکه $\{e_k\}_{k=1}^3$ یک پایه متعامد یک فضای ضرب داخلی V باشد. در صورتی که

$$f_1 = e_1, f_2 = e_1 - e_2, f_3 = e_1 + e_2,$$

باشد، آنگاه $\{f_k\}_{k=1}^3$ یک قاب برای V است.
با توجه به تعریف عملگر قاب

$$Sf = \sum_{k=1}^3 \langle f, f_k \rangle f_k,$$

خواهیم داشت:

$$Se_1 = e_1 + e_1 - e_2 + e_1 + e_2 = 3e_1$$

و

$$Se_2 = -(e_1 - e_2) + e_1 + e_2 = 2e_2.$$

بنابراین

$$S^{-1}e_1 = \frac{1}{3}e_1, S^{-1}e_2 = \frac{1}{2}e_2.$$

با توجه به خطی بودن عملگر S^{-1} ، قاب دوگان کانونی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \{S^{-1}f_k\}_{k=1}^3 &= \{S^{-1}e_1, S^{-1}e_1 - S^{-1}e_2, S^{-1}e_1 + S^{-1}e_2\} \\ &= \{\frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\} \end{aligned}$$

^۶Canonical dual frame

۳. کاربرد قاب‌ها در کاهش اثر اختلال در انتقال سیگنال

از منظر ریاضی، قاب‌ها در مقایسه با پایه‌ها از انعطاف‌پذیری بیشتری برخوردارند. همین امر باعث می‌گردد (با استفاده از قابلیت‌های بیشتر قاب) در برخی عرصه‌های کاربردی بتوانیم به نتایج مطلوب‌تری دست یابیم. به عنوان نمونه در فرایند انتقال سیگنال، استفاده از قاب‌ها می‌تواند به نتایج قابل توجهی منجر گردد، که این قابلیت ویژه را به‌طور مختصر در این فصل بیان خواهیم نمود.

شبکه‌های ارتباطی مدرن با انتقال بسته‌هایی از داده‌ها که در بر گیرنده اطلاعات معینی می‌باشند، نقش مهمی در توسعه و پیشرفت جوامع امروزی ایفا می‌کنند.

اطلاعاتی که قصد مخابره آن را داریم بر مبنای ابزارهای اساسی نظیر پایه‌ها و قاب‌ها در قالب مجموعه‌ای از داده‌ها بیان می‌گردند. و به‌جای مخابره اطلاعات، بسته‌هایی دربردارنده این داده‌های معنادار مخابره می‌شوند. این داده‌های معنادار در مقصد به‌راحتی بازخوانی شده و اطلاعات مد نظر بازیابی می‌گردد.

در صورتی که از پایه‌ها در تقریب اطلاعات استفاده کنیم و ضرایب به‌دست آمده (نظیر به پایه مورد استفاده) را مخابره کنیم، ریسک بالایی را پذیرفته‌ایم. چرا که با از دست دادن بخشی از داده‌ها یا ایجاد اختلال در آن‌ها، امکان بازسازی اطلاعات وجود نخواهد داشت. اما در صورتی که از قاب‌ها برای تقریب اطلاعات استفاده کنیم، علی‌رغم ایجاد اختلال یا از دست دادن بخشی از داده‌ها، امکان بازسازی اطلاعات همچنان وجود دارد.

برای آنکه مزیت استفاده از قاب‌ها در انتقال سیگنال واضح‌تر بیان گردد، از یک رویکرد آماری جهت تحلیل اختلال در داده‌ها بهره می‌گیریم [۲].

در این حالت می‌خواهیم بدانیم چگونه قاب $\{f_k\}_{k=1}^m$ را برگزینیم تا فرایند موردنظر، حداقل تاثیرپذیری از اختلال در داده‌ها را برخوردار باشد.

فرض کنید فرستنده به‌کار رفته در مبدا، ضرایب $\{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^m$ را مخابره می‌کند و گیرنده مورد استفاده در مقصد، ضرایب اختلال یافته $\{\langle f, f_k \rangle + \eta_k\}_{k=1}^m$ را دریافت می‌دارد.

با فرض اینکه هر مولفه η_k را به‌عنوان یک متغیر تصادفی در نظر بگیریم که از میانگین صفر و انحراف معیار σ^2 برخوردار است و η_k و η_l زمانی که $k \neq l$ ، ناهمبسته باشند، خواهیم داشت:

$$(۱) \quad E[\eta_k] = 0, \quad E[\eta_k \eta_l] = \sigma^2 \delta_{k,l}, \quad k, l = 1, \dots, m.$$

با توجه به‌آنکه گیرنده مورد نظر در مقصد، ضرایب $\{\langle f, f_k \rangle + \eta_k\}_{k=1}^m$ را دریافت می‌دارد، فرایند بازسازی اطلاعات منجر به‌رابطه زیر می‌گردد:

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^m (\langle f, f_k \rangle + \eta_k) S^{-1} f_k = f + \sum_{k=1}^m \eta_k S^{-1} f_k,$$

بنابراین تفاوت بین سیگنال بازسازی شده $\tilde{f}$ و سیگنال اصلی f به‌صورت زیر است:

$$\tilde{f} - f = \sum_{k=1}^m \eta_k S^{-1} f_k.$$

$\tilde{f} - f$ برداری با n مولفه می‌باشد که به متغیرهای تصادفی η_k بستگی دارد. خطای میانگین مربعات وابسته به آن نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$MSE := \frac{1}{n} E \|\tilde{f} - f\|^2.$$

اکنون با در نظر گرفتن عبارت به دست آمده برای $\tilde{f} - f$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} MSE &= \frac{1}{n} E \left(\langle \tilde{f} - f, \tilde{f} - f \rangle \right) \\ &= \frac{1}{n} E \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \eta_k \eta_l \langle S^{-1} f_k, S^{-1} f_l \rangle \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m E[\eta_k \eta_l] \langle S^{-1} f_k, S^{-1} f_l \rangle. \end{aligned}$$

بر اساس رابطه ۱ نتیجه می شود که

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sigma^2 \delta_{k,l} \langle S^{-1} f_k, S^{-1} f_l \rangle = \frac{1}{n} \sigma^2 \sum_{k=1}^m \|S^{-1} f_k\|^2.$$

حال نشان خواهیم داد که از میان همه قاب های نرمال در بر گیرنده تعداد ثابتی از عناصر، عبارت خطا برای قاب های تنگ حداقل می باشد.

قضیه ۱.۳. قاب نرمال $\{f_k\}_{k=1}^m$ برای $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید، که m و n اعداد طبیعی ثابت باشند. از میان همه چنین قاب های $\{f_k\}_{k=1}^m$ ، خطای MSE حداقل خواهد بود اگر و تنها اگر قاب مورد نظر، تنگ باشد. و مقدار خطای حداقل به دست آمده به صورت زیر است:

$$MSE = \frac{n}{m} \sigma^2.$$

قضیه ۱.۳. بیان می دارد که برای یک مقدار ثابت $n \in \mathbb{N}$ ، خطای MSE هنگامی که تعداد عناصر قاب افزایش می یابد، کاهش پیدا می کند. در حقیقت این امر بیان می دارد که قاب ها در مقایسه با پایه ها، میزان تاثیرپذیری فرایند انتقال سیگنال را از اختلال های تصادفی در فرایند مخابره اطلاعات به حداقل می رساند و با افزایش تعداد عناصر قاب تنگ به کار رفته، قابلیت رفع اختلال های تصادفی افزایش می یابد.

مفاهیم فوق از منظر غیر آماری نیز قابل طرح است. با فرض اینکه فرستنده، داده های

$$\{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^m$$

را مخابره می کند و گیرنده داده های اختلال یافته

$$\{\langle f, f_k \rangle + c_k\}_{k=1}^m$$

را دریافت می دارد، گیرنده نهایتاً اطلاعات مخابره شده را به صورت زیر بازسازی می نماید:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (\langle f, f_k \rangle + c_k) S^{-1} f_k &= \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle S^{-1} f_k + S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k \\ (2) \quad &= f + S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k, \end{aligned}$$

همانطور که از رابطه فوق برمی آید، اختلالی به صورت $S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k$ در مقصد ظاهر می گردد. اگر $\{f_k\}_{k=1}^m$ قابی فراتر از یک پایه باشد، آنگاه عملگر پیش-قاب

$$T\{c_k\}_{k=1}^m = \sum_{k=1}^m c_k f_k$$

دارای هسته ای غیربدیهی خواهد بود. این امر بیانگر آن است که بخشی از توزیع نویزها، در گیرنده ظاهر نخواهند شد.

این در حالی است که در صورت استفاده از یک پایه یکا متعامد $\{f_k\}_{k=1}^m$ ، خواهیم داشت [۱]:

$$\|S^{-1} \sum_{k=1}^m c_k f_k\| \geq \frac{1}{\|S\|} \sqrt{\sum_{k=1}^m |c_k|^2},$$

یعنی به‌هنگام بازسازی اطلاعات دریافتی (حداقل به‌طور شهودی) حتماً نویزهای موجود ظاهر خواهند شد. برای درک بهتر ظرفیت‌ها و قابلیت‌های قاب‌ها به نسبت پایه‌های کلاسیک مثال زیر بیان می‌شود.

مثال ۲.۳. در این مثال فضای $\mathbb{R}^2$ مورد بحث می‌باشد و ضرب داخلی استاندارد زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^2 x_i y_i.$$

همانطور که می‌دانیم مجموعه $\left\{e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ یک پایه متعامد یک‌ه برای $\mathbb{R}^2$ می‌باشد و مجموعه $\left\{X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\right\}$ نیز یک قاب برای $\mathbb{R}^2$ است. براساس آنچه در مثال ۴.۲ گفته شد، خواهیم داشت

$$S^{-1}(X_1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad S^{-1}(X_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad S^{-1}(X_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

و

$$S^{-1}(e_1) = e_1, \quad S^{-1}(e_2) = e_2.$$

بنابراین با فرض اینکه فرستنده داده‌های $\{\langle f, e_i \rangle\}_{i=1}^2$ را مبتنی بر پایه متعامد یک‌ه $\{e_1, e_2\}$ و داده‌های $\{\langle f, X_i \rangle\}_{i=1}^3$ را مبتنی بر قاب $\{X_1, X_2, X_3\}$ مخابره می‌کند و گیرنده به‌ترتیب داده‌های اختلال یافته $\{\langle f, e_i \rangle + c_i\}_{i=1}^2$ و $\{\langle f, X_i \rangle + c_i\}_{i=1}^3$ را دریافت می‌دارد، جمله خطا به‌هنگام استفاده از پایه $\{e_1, e_2\}$ به‌صورت

$$S^{-1} \sum_{k=1}^2 c_k e_k = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

می‌باشد که (در صورت وجود نویز) همواره دارای نرم بزرگتر از صفر خواهد بود. در حالی که در صورت استفاده از قاب $\{X_1, X_2, X_3\}$ ، جمله خطا $S^{-1} \sum_{k=1}^3 c_k X_k$ در رابطه ۲ به‌ازای c_3 دلخواه و $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} c_3$ و $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} c_3$ همواره برابر با صفر خواهد بود.

بنابراین همانطور که در نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌گردد، نویز ورودی در داده‌ها زمانی که به کمک پایه‌های کلاسیک انتقال می‌یابند همواره در مقصد ظاهر خواهند شد ولی هنگامی که از قاب‌ها در انتقال داده‌ها استفاده می‌کنیم، بخشی از توزیع نویزها در گیرنده ظاهر نخواهد شد.

برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینه قاب‌ها و مزیت‌های آن نسبت به پایه‌های مرسوم می‌توانید به مرجع [۳، ۴] مراجعه کنید.

۴. تشکر و قدردانی

از داوران محترم که با مطالعه دقیق مقاله به بهبود کیفیت مقاله کمک شایانی نمودند، سپاسگزاری می‌شود.

مراجع

- [1] O. Christensen, *FRAMES AND BASES: An introductory Course*, Birkhauser publication, 2008.
- [2] V. K. Goyal, J. Kovacevic and A. J. Kelner, Quantised frame expansions with erasures., *Appl. Comp. Harm. Anal.*, **10** (2000) 203-233.
- [3] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhauser publication, 2016.
- [4] O. Christensen, *Approximation Theory: From Taylor polynomials to wavelets*, Birkhauser publication, 2006.

محسن اسماعیل بیگی

ملایر، دانشگاه ملایر، گروه ریاضی

m.esmaeilbeigi@malayeru.ac.ir

محسن اسماعیل بیگی متولد آبان ماه ۱۳۵۸ در شهر تویسرکان است. وی در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه شیخ بهایی اصفهان شد و در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی در دانشگاه خواجه نصیر طوسی تهران شد. در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع دکتری دانشگاه یزد شد و در سال ۱۳۹۱ با درجه دکتری ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی فارغ التحصیل شد. از سال ۱۳۹۱ تاکنون نیز عضو هیات علمی و استادیار گروه ریاضی دانشگاه ملایر است.



امید چترآبگون

ملایر، دانشگاه ملایر، گروه آمار

o.chatrabgoun@malayeru.ac.ir

امید چترآبگون در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی رشته آمار دانشگاه رازی کرمانشاه شد و در سال ۱۳۸۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته آمار در دانشگاه رازی کرمانشاه شد. در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع دکتری دانشگاه شهید چمران اهواز شد و در سال ۱۳۹۳ با درجه دکتری آمار فارغ التحصیل شد. از سال ۱۳۹۳ تاکنون نیز عضو هیات علمی و استادیار گروه آمار دانشگاه ملایر است.

