ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۳، شماره ۲ (۱۳۹۷)، صص. ۱۰-۱
http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

حل هندسی معادلات درجه سوم توسط عمر خیام که در ارائه آن برای یادگیری بهتر به جای حروف از اشکال هندسی رنگی استفاده شده است.

دبورا کنت و دیوید موراکی
مترجمان: اکبر طیبی و سید احمد فقیهی*

چکیده. نوشته حاضر ترجمه مقاله زیر است:

D. A. Kent and D. J. Muraki, A Geometric solution of a Cubic by Omar Khayyam in which Coloured Diagrams are used instead of letters for the greater ease of learners, *The American Mathematical Monthly*, 123 (2016) 149–160.

۱. مقدمه مترجمان

دبورا کنت[۱] دانشیار ریاضی دانشگاه دریک[۲] در آمریکا می‌باشد. خانم کنت دکتری خود را از دانشگاه ویرجینیا گرفته و تحقیقات خود را در مورد تاریخ ریاضی مربوط به منطقه آمریکا از قرن نوزدهم تا بیستم متمرکز نموده است. همچنین ایشان در گروه تحقیقاتی بین المللی مربوط به ریاضیات و جنگ جهانی اول مشارکت دارند.

دیوید جی موراکی[۳] استاد دانشگاه سیمون فریزر[۴] در کانادا می باشد. تحقیقات پرفسور موراکی مربوط به انتشار موج و دینامیک سیال جوی است. معمولا وی با دانشمندان مرکز ملی تحقیقات اتمسفری همکاری دارد و در زمان فراغت از این کار به هندسه‌های تجسمی می‌پردازد.

۲. چکیده مقاله

الیوربایرن در سال ۱۸۴۷ در جریان ویرایش کتاب‌های اصول اقلیدس، زبان تصویری را پایه گذاری کرد. زبان تصویری، ساختار مناسبی برای توصیف هندسی راه حل خیام برای حل معادلات درجه سوم فراهم می آورد. به کمک روش منحصر به فرد تصویرنگاری بایرن، یکی از سازه‌های خیام را بازسازی می‌کنیم. نمایش گرافیکی جدیدی که ساختیم به نمایش جبری وابسته نیست و بیشتر روی ارائه تصوری هندسی از چگونگی استفاده خیام از نسبت، مقاطع مخروطی و استدلال‌های بعدی تاکید دارد.

دبیرتخصصی رابط: مجید فخار
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۷/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۰
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.78166.1194

[1]Deborah A. Kent [2]Drake University [3]David J. Muraki [4]Simon Fraser University

۳. مقدمه

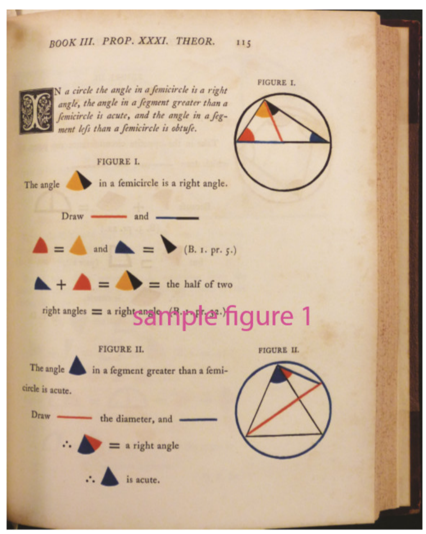
ترکیب "جبر قرون وسطایی اسلامی" برای خواننده امروزی هم از نظر مفهومی و هم نمادی نا آشناست. جبر قرون وسطایی اسلامی جایی است که توان چند جمله‌ای‌ها به ابعاد هندسی نظیر می‌شوند. به عبارت دیگر $x^۲$ نشانگر مساحت مربع و $x^۳$ نشانگر حجم مکعب است و آنچه ما چند جمله‌ای درجه سه می‌نامیم در واقع جمع حجم منشور است.

ممکن است نمایش هندسی معادلات چند جمله‌ای برای دانش‌آموزان معاصر عجیب به نظر برسد و روش‌های جبری امروزی را ترجیح بدهند. با این وجود این سبک نمایش، مطالعه تاریخی ایده‌های جدید را ممکن می‌کند و بدین ترتیب با نمایش هندسی که مشخصه بارز جبر قرون وسطایی است ارتباط عمیق‌تری برقرار خواهیم کرد و درک بهتری نسبت به این مسائل پیدا می‌کنیم. برای اینکه بیشتر و بهتر با راه حل خیام آشنا شویم، معادلات را به صورت گرافیکی نمایش داده و برای این کار از زبان تصویری بایرن استفاده کرده‌ایم.

خیام با جابه جایی‌های استادانه بین خطوط، رویه‌ها و احجام، راه حل خود را اثبات کرده است. به علاوه به طور هوشمندانه‌ای در مورد طول‌ها، مساحت‌ها و احجام نیز بحث کرده است. با بازسازی راه حل خیام در قالب جدید، مشکل نمادگذاری را نخواهیم داشت و بدین ترتیب نکات هندسی کلیدی به راحتی قابل درک شده و در فهم جابه جایی‌های بین ابعاد مشکلی نخواهیم داشت. اثبات خیام بر مبنای مقاطع مخروطی است و این بیان هندسی مشخصه‌های هندسی مقاطع را فارغ از معادلات دکارتی درجه دوم آنها نمایش می‌دهد. در این مقاله با کمک گرفتن از ایده بایرن و به کمک هندسه، نسبت و مقاطع مخروطی، راه حل هندسی برای معادلات درجه سوم ارائه می‌دهیم.

۴. زبان تصویری هندسی الیور بایرن

بایرن به خاطر ویرایش جذاب و فوق العاده شش کتاب اول "اصول اقلیدس" به خوبی شناخته شده است. این کتاب اولین بار در سال ۱۸۴۷ چاپ شد [۳]. در این نسخه از کتاب برای تسهیل یادگیری به جای نمادهای جبری از اشکال رنگی استفاده شده است. کتاب‌های بایرن اخیراً و در سال‌های ۲۰۱۰ و ۲۰۱۳ تجدید چاپ شدند [۱۲] [۱۳]. بایرن سعی داشت هندسه اقلیدسی را با استفاده از اشکال رنگی نمایش دهد و از نمایش‌های مرسوم که پر از اشکال نماد گذاری شده و اثبات‌های سخت بود، فاصله بگیرد هرچند این اثبات‌های هندسی هنوز هم در برخی کتب به چشم می‌خورد.



شکل ۱. عکس گزاره ۳۱ کتاب سوم اصول اقلیدس، نسخه ویرایش شده توسط الیور بایرن را نشان می‌هد. روواری مکلین در کتاب "کتاب‌ها و نقاشی‌های رنگی ویکتوریایی (مربوط به دوره سلطنت ملکه ویکتوریا)" کتاب بایرن را اینگونه توصیف می‌کند: "طغیانی بی‌همتا از زرد، قرمز و آبی، در برخی صفحات حروف و اعداد رنگی چاپ شده اند گویی گلهای وحشی در جای جای صفحه روییده اند، این زیبایی صفحه آرایی ظریف می‌طلبد، به علاوه مثلث ها، دایره‌ها و مربع‌هایی که با رنگ‌های شاد و زنده آراسته شده اند" (صفحه ۷۰ از مرجع ۱۴ را ببینید). برای دسترسی به منبع فوق از مجوز مجتمع‌های ویژه دانشگاه کلمبیا بریتانیا، استفاده شده است.

از زندگی و تحصیلات بایرن اطلاعات دقیقی در دست نیست. بایرن بیش از صد کتاب نوشته است. کتاب‌های بایرن حاکی از علاقه او به ریاضی، آموزش، نقشه برداری و مهندسی است در تمامی این کتاب‌ها هدف او تسهیل یادگیری و افزایش کارایی دانش آموزان در محاسبات، اندازه گیری و هندسه

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.78166.1194

است. در دیباچه کتابها بایرن استاد ریاضیات دانشکده مهندسی عمران پوتنی[۵] و مشاور در کمک‌های بشر دوستانه، مهندس عمران، مهندس نظامی و مهندس مکانیک معرفی شده است. این موسسه در سال ۱۸۴۰ افتتاح و پس از ۱۷ سال به دلیل مشکلات مالی بسته شد. بایرن تمام مدت ۱۷ سال را در این موسسه خصوصی مشغول به کار بود. بعد از تعطیلی موسسه، بایرن به عنوان نقشه کش در جزایر فالکلند بریتانیا مشغول به کار شد. بایرن همچنان به نوشتن کتاب ادامه داد. برخی از این کتاب‌ها او را به قهرمان ساده نویسی و مخترع "سیستم تسهیل رسم‌های هندسی، دیگر هنرهای خطی و نمودارهای علمی" تبدیل کرد.

شکل ۲. شکل گزاره ۸ از اصول اقلیدس ویرایش بایرن را نمایش می‌دهد. مهارت ویتینگام در نگارش این کتاب چهار رنگ به خوبی مشهود است. این کتاب تلفیقی از روش انقلابی بایرن، نمادها و اشکال ویکتوریایی است، نمادهایی که حتی در زمان خود ۵۰ سال از جهان عقب بود. نمایش کمینه گرایی (ساده گرایی) و سیستم رنگ آمیزی ساده این کتاب در واقع پیش نمایشی از جنبش هنری و طراحی آوانگارد قرن بیستم است (صفحه ۱۲ از مرجع ۹ را ببینید). از مجوز مجتمع‌های ویژه دانشگاه کلمبیا بریتانیا، استفاده شده است.

احتمالا سرخوردگی از روش‌های مرسوم آموزش هندسه، او را به ابداع این روش تشویق کرده است. اولین تلاش بایرن در تسهیل فهم اصول اقلیدس برای دانش آموزان، با چاپ کتاب پنجم اقلیدس (نسخه اولیه نظریه تناسب جامع و به زبان ساده) در سال ۱۸۴۱ اتفاق افتاد [۲].
مقدمه این کتاب گویی شکایت معلمی ناراضی از کاستی‌های متون قرن نوزدهم در مورد تناسب است. هدف بعدی بایرن ارائه مفهومی جبری، حسابی و هندسی از تناسب و تلاش در جهات شفاف سازی این شاخه گسترده و دشوار و تخصصی ریاضیات و استدلال‌های پیچیده‌ای بود که سالها ایده‌های مختلف آن را تایید کرده بودند. بایرن می‌خواست بدون از بین رفتن جهان شمولی و دقت نتایج این شاخه از ریاضی، کار خود را به سرانجام برساند (صفحه xviii-xix از مرجع ۲ را ببینید).

بایرن ابتدا به سراغ چاپ رنگی رفت اما چاپ رنگی به شدت پر هزینه بود بدین ترتیب او به خواننده‌های کتاب توصیه کرد که نمودارهای کتاب را با قلم‌های رنگی پررنگ کنند. بعدها بایرن به منظور دست یابی به هدف خود با ویلیام پیکرینگ[۶] ناشر مبدع و چارلز ویتینگام[۷] که در کار چاپ کتاب بود ــ یکی از کارهای با نفوذ قرن نوزدهم ــ همکاری را آغاز کرد. حاصل این همکاری تحقق رویای رنگی بایرن در سال ۱۸۴۷ بود [۳].
در قدم بعدی بایرن سعی داشت تا به کمک رنگ‌ها و اشکال بین گزاره‌ها، اثبات اصول اقلیدس و تصویرهای چاپ شده ارتباط بر قرار کند. هدف او از این کار کمک به یادگیری بهتر بود. بایرن معتقد بود که با این روش دانش آموزان اصول اقلیدس را در کمتر از یک سوم زمان معمول می‌آموزند به علاوه ماندگاری آموخته‌ها با استفاده از این روش بیشتر خواهد بود (صفحه ix از مرجع ۳ را ببینید).
علی رغم این بلند پروازی حجم‌های بایرن کار انقلابی در هندسه به شمار نمی آید. دیوید یوجین اسمیت[۸] در پاورقی ویرایش کتاب "یک مجموعه از تناقض‌ها"[۹] به نقل قولی از کتاب اصول اقلیدس بایرن اشاره میکند و می‌نویسد "اینکه به جای مثلث ABC بگوییم مثلث قرمز مزایایی دارد اما به قوام

[5] Putney [6] William Pickering [7] Charles Whittingham [8] David Eugene Smith [9] A Budget of Paradoxes

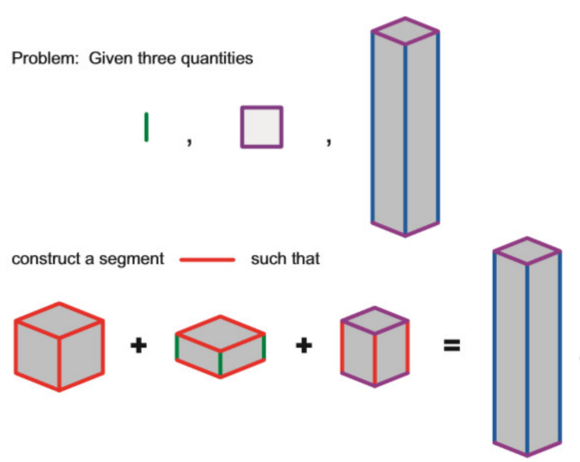
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.78166.1194

اثبات کمکی نمیکند". تنها چند سال پس از انتشار کتاب، با وجود اینکه ده نسخه از آن به فروش نرفته بود، به خاطر ورشکستگی انتشارات پیکرینگ به حراج گذاشته شد. ورشکستگی انتشارات پیکرینگ را به وامی که گرفته بود نسبت می‌دهند. اما هزینه چاپ انبوه کتاب و از طرفی فروش کند کتاب بایرن کمکی به شرایط نمی‌کرد. در قرن بیستم بخت به بایرن رو کرد. کتاب او توسط رواری مکلین[۱۰] به عنوان کتاب تحسین شده در "کتاب‌ها و نقاشی‌های رنگی ویکتوریایی" انتخاب شد [۱۴]. در حال حاضر نیز توسط مجموعه داران به عنوان پنجمین کتاب رنگی با ارزش شناخته شده است. به علاوه ادوارد توفتی[۱۱] در مطالعات خود در مورد "نمایش تصویری اطلاعات کمی"[۱۲] از کتاب بایرن کمک گرفت [۱۷]. به نظر می‌رسد سبک بایرن در ارائه بصری مفاهیم، بیشتر مناسب عصرحال، عصر نرم افزارهای دیجیتال و نشریه‌های آنلاین است. در ادامه به منظور تسهیل یادگیری و کمک به درک تفکر هندسی ریاضیدانان قرن یازدهم از این نمایش تصویری کمک گرفته‌ایم.

۵. راه حل‌های هندسی عمر خیام

ابوالفتح غیاث الدین عمربن ابراهیم خیام نیشابوری معروف به عمر خیام، بیشتر به خاطر فعالیت هایش در زمینه‌ی ستاره شناسی و رباعیات معروف بوده، اما آثاری نیز در زمینه ریاضی و فلسفه منتشر کرده است. خیام در منطقه‌ای نزدیک به افغانستان امروزی زندگی می‌کرد. از کتاب‌های ریاضی او رساله‌ای در جبر و المقابله به یادگار مانده است. اولین بار در سال ۱۹۳۱ داود کثیر[۱۳] کارهای او را به انگلیسی ترجمه کرد [۱۰] و آخرین ترجمه آثار او نیز به سال ۲۰۰۰ مربوط است و رشدی راشد[۱۴] و بیژن وهاب زاده[۱۵] زیر نظر یونسکو آثار او را به انگلیسی ترجمه کردند [۱۵].

کار بزرگ خیام مطالعه ی جامع و ارائه راه حل‌هایی برای موضوعی است که امروزه با نام معادلات خطی تا درجه سوم شناخته می‌شوند. خیام در ابتدای کتاب جبر خود توضیح می‌دهد که اساس کار او بر مطالعات ارشمیدس استوار است. ریاضیدانان مسلمان در قرن نهم و بعد از ترجمه آثار یونانیان از جمله آثاراقلیدس، ارشمیدس و آپولونیوس با معادلات درجه دوم و سوم آشنا شدند و احتمالا از سه مشکل کلاسیک ساختاری یونانیان نیز با خبر بودند. ریاضیدانان مسلمان به خاطر پیشرفت هایشان در جبر و پیشبرد کارهای هندوها و بابلی‌ها شناخته شده هستند. آنها با الهام از متون هندسی یونانی به خصوص این عقیده که هیچ مسئله ریاضی بدون اثبات پذیرفته نیست به شدت در پیشرفت جبر موثر بودند. اثبات‌های ریاضیدانان مسلمان اغلب هندسی هستند. بخشی از پروژه ریاضیات اسلامی قرون وسطی، اثبات هندسی قوانین جبر بود. در یکی از متون جبری اسلامی منسوب به خوارزمی ریاضیدان قرن نهم، الگوریتم جبری حل معادلات درجه دوم به صورت هندسی اثبات شده است. در قرن‌های دهم و یازدهم ریاضیدانان مسلمان برخی معادلات درجه سوم ارشمیدسی را با تکیه بر مقاطع مخروطی متقاطع حل کرده‌اند.



شکل ۳. مسئله مکعب خیام،"مجموع یک مکعب و یک مربع و چند ضلع به گونه‌ای که با مقدار معلوم داده شده برابر باشند." به روش بایرن نمایش داده شده است. پاره خط سبز، مربع بنفش و مکعب داده شده اند هدف پیدا کردن پاره خط قرمز است.

[10] Ruari Mclean [11] Edward Tufte [12] Visual Display of Quantitative Information [13] Daoud Kasir [14] Roshdi Rashed [15] Bijan Vahabzadeh

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.78166.1194

بدین ترتیب خیام نیز مانند ریاضیدانان قبل از خود با ریاضیات کلاسیک یونان آشنا بوده است. به علاوه خیام به وضوح در مقدمه کتاب خود می‌گوید اصول اقلیدس و دو فصل اول کتاب مخروطات آپولونیوس پیشنیاز درک این کتاب (جبر خیام) است. برای خیام تنها اعداد مثبت قابل قبول بوده است بدین ترتیب ۱۴ مکعب متفاوت داریم. خیام به ازای هر مکعب یک مقطع مخروطی معرفی می‌کند که برای اثبات لازم است و نشان می‌دهد که ساختار کلی راه حل درست می‌باشد. خیام از جبر برای معرفی مجهولات هندسی و عددی استفاده کرد. خیام سعی داشت برای راه حل جبری موجود یک اثبات هندسی ارائه کند درست شبیه کاری که برای معادلات درجه اول و دوم انجام داده بود. هرچند خیام به این نتیجه رسید که ارائه راه حل جبری برای معادلات درجه سوم غیر ممکن است اما او با استفاده از مقاطع مخروطی راه حل هندسی برای سوال ارائه داد [۱۱]. در این مقاله به یکی از سازه‌های خیام می‌پردازیم. سازه‌ای که برای اثبات معادلات درجه سوم به کار برده شده در شکل شماره سه آمده است. در این سازه ضلع مکعب و مربع‌ها و دیگر اضلاع باهم برابر و متناظر با یک عدد است. دقت کنید منظور از مکعب، مربع و اضلاع در اینجا به ترتیب $x^۳$ ، $x^۲$ و x است. به بیان امروزی با ضرب این مجهولات در ضرائب به معادله درجه سوم می‌رسیم. اما در عصر خیام، هر عبارت چند جمله‌ای درجه سه با یک حجم سه بعدی متناظر بوده است. قابل ذکر است که چند جمله‌ای درجه چهار و یا مراتب بالاتر در این نوع نمایش نمی‌توانند وجود داشته باشند. خیام x را پاره خطی فرض کرد که می‌توان با آن سه جعبه ساخت که حجم ترکیبی هر سه آنها با مقدار دلخواه داده شده برابر باشد. اولین جعبه مکعب کاملی است که اضلاع آن x است. دومین جعبه قاعده‌ای مربعی شکل دارد که مقدار ضلع آن مجهول است اما ارتفاع آن $a(x^۲)$ است. و سومین جعبه قاعده‌ای مربعی شکل به طول ضلع $x(b^۲)$ دارد اما ارتفاع آن مجهول است. بدین ترتیب راه حل مورد نظر بخشی از شکل هندسی خواهد بود به طوری که مجموع حجم این سه جعبه با مقدار داده شده یعنی $c(b^۲)$ برابر باشد. قاعده این بخش از شکل مربعی و دقیقا مشابه قاعده سه بخش دیگر است. اگر بخواهیم راه حل خیام را به شیوه‌ی امروزی نماد گذاری کنیم خواهیم داشت $x^۳ + a(x^۲) + (b^۲)x = (b^۲)c$ که در آن ضرایب چند جمله‌ای‌ها مثبت است. این معادله تنها یک جواب مثبت دارد.

پیدا کردن پاره خط مورد نظر در واقع پیدا کردن جوابی هندسی برای مسئله است. دنبال کردن خط به خط اثبات خیام اندکی چالش برانگیز است. نماد گذاری نقاط پایانی و پیدا کردن پاره خط، تنها بخش کوچکی از کار است. کار خود را با بازسازی گرافیکی راه حل خیام آغاز می‌کنیم (شکل۳). در واقع معرفی تصویر نگاری بایرن نیز به حساب می آید. همانطور که در شکل ۳ مشهود است هر مقدار داده شده‌ای نمایش هندسی خاص خود را دارد. پاره خط رنگی و دیگر خطوط متجانس هستند پس این معادله با چهار حجم، معادله درجه سه‌ای است که در خطوط قبلی معرفی کردیم. پاره خط سبز ارتفاع جعبه دوم و مقدار آن معلوم است، به بیان امروزی‌تر پاره خط سبز، ضریب $x^۲$ می‌باشد. به علاوه مساحت مربعی که ضلعهایش بنفش است ضریب بخش خطی معادله بوده و حجم بخش تیره در واقع ثابت چند جمله‌ای است. طبق قرار داد مساحت قاعده حجم داده شده با مساحت مربعی که ضلع‌های آن بنفش است، برابر می‌باشد. جواب این معادله هندسی در واقع پیدا کردن پاره خطی است که در معادله حجم داده شده صدق کند. در شکل شماره ۴ بخش‌های خنثی که هیچ تاثیری در اثبات ندارند را با رنگ مشکی نمایش می‌دهیم. همه‌ی سطوح دو بعدی را با خاکستری روشن مشخص کرده‌ایم، این سطوح الزاماً برابر نیستند و همه اشیاء سه بعدی در سایه روشن و به رنگ خاکستری تیره نشان داده شده اند.

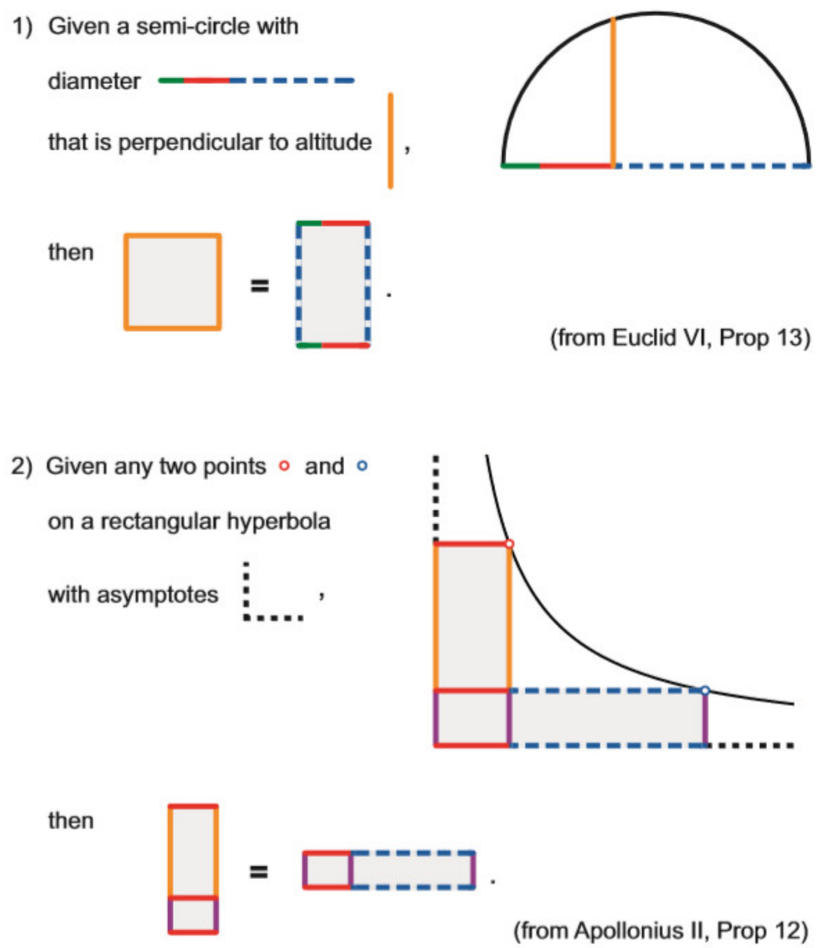
۶. دو ناحیه با مساحت برابر

راه حل هندسی خیام برای مسئله‌ای که در آن یک مکعب، چند مربع و یک سری خط با یک مقدار مشخص برابر هستند، به پیدا کردن دو ناحیه با مساحت‌های برابر بستگی دارد [۶]. که یکی از این نواحی از اصول اقلیدس و دیگری از مقاطع مخروطی آپولونیوس حاصل می‌شود [۸].

اثبات ناحیه اول از اصول اقلیدس به دست می آید که در گزاره ۱۳ کتاب پنجم به آن پرداخته شده است. نیم دایره‌ای با قطر مشخص در نظر بگیرید، مساحت مربعی که با ضلع مشخصی ساخته می‌شود با مساحت مستطیلی که طول آن با ضلع مربع برابر بوده و عرض آن بخشی از قطر نیم دایره است که توسط ضلع مربع قطع شده، برابر خواهد بود. اثبات هندسی این مطلب در قسمت بعدی آورده شده است. البته هدف ارائه اثبات نیست بلکه نشان دادن چگونگی اثبات به زبان تصویری بایرن است. اثبات ناحیه دوم در کتاب مخروطات آپولونیوس، کتاب دوم گزاره ۱۲ آورده شده است [۸]. آپولونیوس در واقع اثبات کلی تری از فاصله یک هذلولی تا مجانب هایش ارائه میکند، اما حالت خاصی که ما به آن نیاز داریم یک هذلولی مستطیلی شکل است. البته از اثبات این موضوع می‌گذریم، مسئله در واقع برای کسی که معادله هذلولی مستطیلی یعنی $xy = c$ را می‌شناسد آشناست. نقاط قرمز و آبی نمودار ۴ روی هذلولی قرار دارند و مجانب این هذلولی خط چین‌های سیاه هستند. چون مساحت این دو ناحیه باهم برابر هستند پس حاصل امتداد اضلاع این دو باید باهم برابر باشند. رنگ‌های انتخاب شده در نمودار ۴ دقیقا رنگ‌هایی هستند که در نمودار ۷ و ۸ به کار میبریم.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.78166.1194

در شکل ۵، لم نیم دایره به زبان تصویری باین اثبات شده است. این اثبات با اثبات آپولونیوس که در کتاب ۵ام (گزاره ۱۳ از صفحه ۲۳۱ مرجع [۳]) به آن اشاره شده متفاوت است. در این اثبات مفهوم میانگین نسبت‌ها با مثلث‌های متشابه جایگزین شده است.

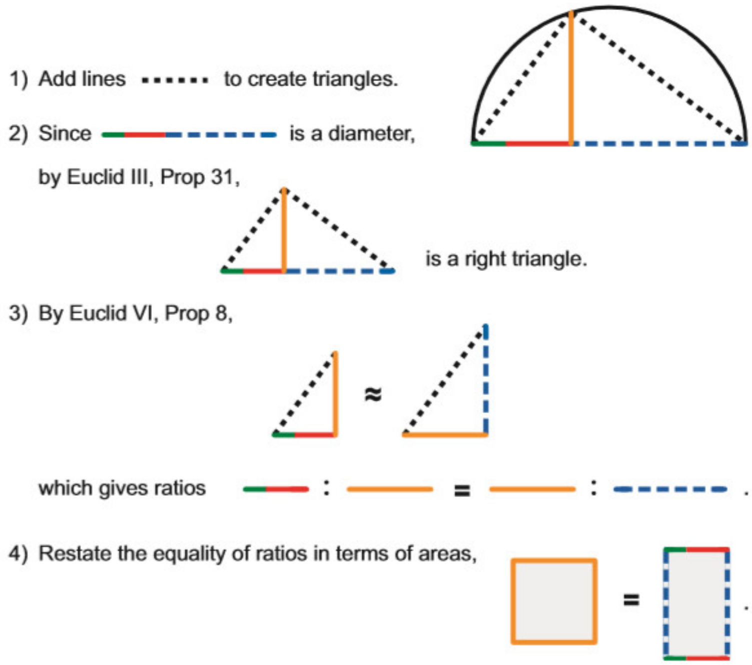


شکل ۴. نمودار ۴، دولم پیش نیاز اثبات خیام را به صورت تصویری نشان می‌دهد. قسمت اول نمایش کلاسیک ریشه دوم است که در اصول اقلیدس به آن پرداخته شده است و قسمت دوم از ویژگی‌های هذلولی که در مقاطع مخروطی به آن اشاره شده است برداشت شده است. رنگ‌های به کار برده شده در این شکل، مقدمه‌ای بر رنگ شکل‌های ۷ و ۸ است.

نقاط انتهایی شکل ۴ را به ارتفاع وصل کنید. طبق گزاره ۳۱ ازکتاب سوم اصول اقلیدس مثلث‌های بدست آمده قائم الزاویه هستند. طبق گزاره ۸ کتاب ۵ام هر سه مثلث بدست آمده متشابه هستند. در اثبات گزاره ۸ از تشابه دو مثلث داخلی که در ارتفاع مشترک هستند، استفاده شده است. نسبت قسمت قرمز+سبز به ارتفاع، از مثلث سمت چپ با نسب ارتفاع به خط چین آبی، در مثلث سمت راست باهم برابر است. مرحله چهارم از شکل ۵ در واقع ضرب برداری هندسی است چرا که حاصل دو پاره خط مساحت یک مستطیل است. چون نسبت‌های بالا باهم برابرند پس مساحت مربعی که اضلاع آن با ضلع داده شده برابر است با مساحت مستطیلی که اضلاع آن به ترتیب خط چین‌های آبی و بخش‌های قرمز به علاوه آبی است، برابر خواهد شد. حال با استفاده از این دو لم و زبان تصویری باین، اثبات خیام را ادامه می‌دهیم.

۷. سازه ی خیام

در نمایش خیام، برای ساختن پاره خطی که جواب چند جمله‌ای به صورت «یک مکعب و مربع‌ها و لبه‌هایی که معادل یک عدد هستند»، جهت‌ها ادغام شده است و علاوه بر آن درستی اثبات را نیز بررسی می‌کند. برای راحتی کار، سازه خیام را در سه بخش و سه شکل بررسی کرده‌ایم (صفحه ۱۴۲–۱۴۱ از مرجع ۱۵ را ببینید).



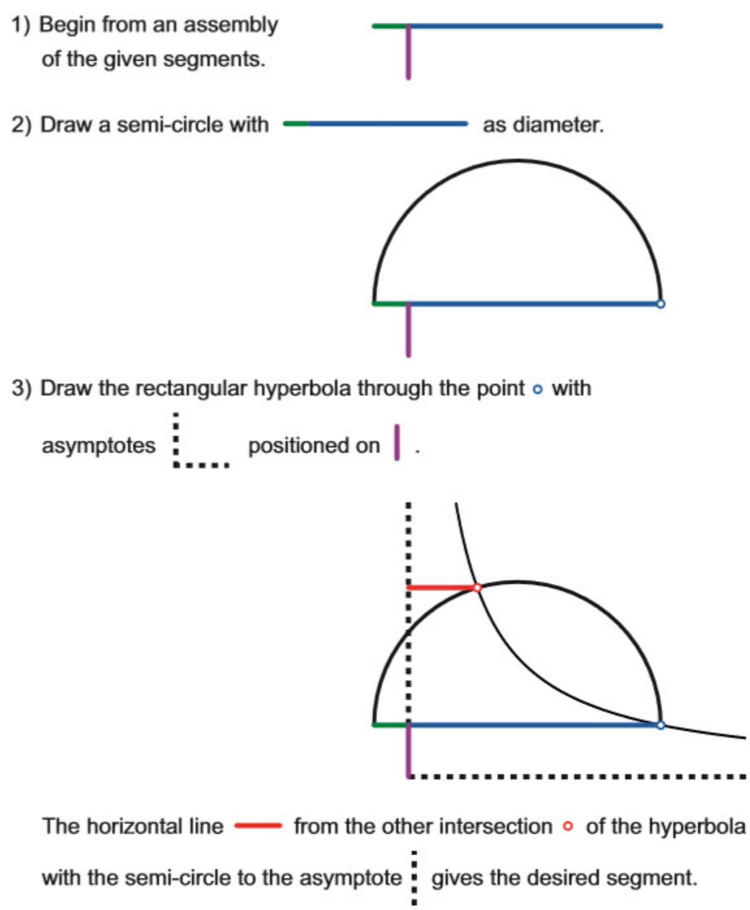
شکل ۵. طبق گزاره ۴ کتاب دوم آپولونیوس یک نقطه و یک مجانب برای رسم هذلولی کافی است. نقطه قرمز دومین محل برخورد نیم دایره و هذلولی است. و خط افقی که این نقطه را به مجانب عمودی (خط بنفش) وصل می‌کند در واقع جواب مسئله است.

این بخش در نگاه اول شاید مهم به نظر نرسد اما ممکن است برای خواننده این سوال مطرح شود که چطور نمودار ۳–۸ دقیقا در معادله $x^{۳} + \frac{۸}{۱۶}x^{۲} + \frac{۹}{۱۶}x = \frac{۳۳}{۱۶}$ صدق می‌کند. همانطور که قبلا در شکل ۳ اشاره کردیم یک پاره خط، یک مساحت و یک حجم از مسئله معلوم است (به زبان جبری امروزی این سه مقدار، ضرائب چند جمله‌ای هستند). خطوط سبز، بنفش و آبی هریک با مقدارهای معلوم داده شده متناظر هستند. مشابه شکل شماره ۶ این خطوط را کنارهم قرار دهید. سپس نیم دایره‌ای بسازید که قطر آن حاصل جمع خط سبز و آبی باشد. در نتیجه خط بنفش مجانب هذلولی خواهد بود که از نقطه آبی واقع در انتهای نیم دایره می‌گذرد (صفحه ۱۵۷–۵۶ از مرجع ۸ را ببینید).

۸. برهان خیام

اثبات شکل ۷ و ۸ با معرفی دو مستطیل شکل ۶ آغاز می‌شود که ما را به استفاده از این دو مستطیل بلافاصله به لم هذلولی شکل ۴ ارجاع می‌دهد. فعلا ادامه ی اثبات را بدون استفاده از زبان تصویری پی می‌گیریم. در اثبات خیام چهار تغییر بعد اتفاق می افتد [۴].

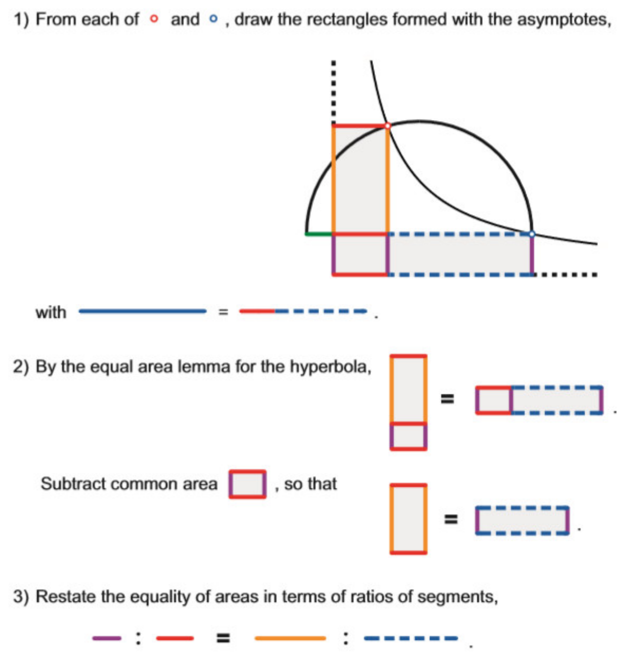
 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.78166.1194



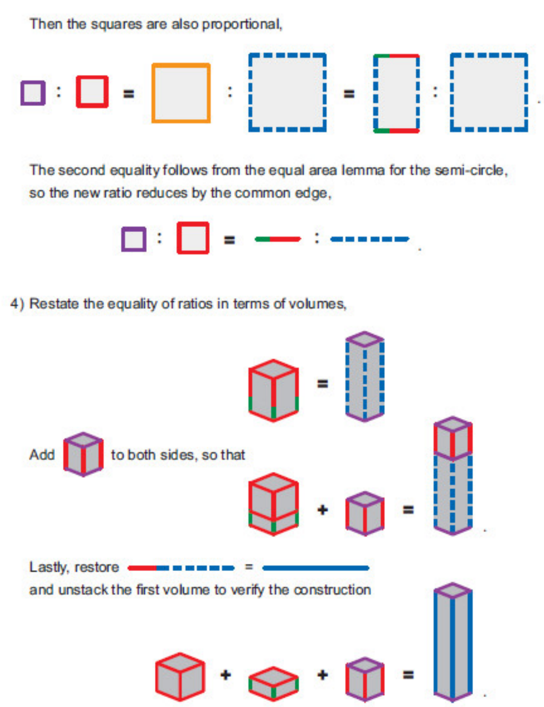
شکل ۶. حل هندسی معادلات درجه سوم توسط خیام. همانطور که در شکل ۳ گفته شده، اندازه خطوط بنفش، آبی و قرمز داده شده است. پاره خطی که نقطه برخورد نیم دایره را به مجانب وصل می‌کند جواب مسئله است.

۹. نتیجه گیری

حل هندسی معادلات درجه ۳ شاید برای چشم‌های مدرن عجیب و تازه باشد اما مطالعه‌ی معادلات درجه سوم و در واقع بخش اعظم جبر قرون وسطی با انگیزه هندسی آغاز شده است. دانش آموزان امروزی احتمالا روی اثبات هندسی بدون علائم جبری تسلط چندانی ندارند. هرچند این سبک نوشتاری بینش ارزشمندی به فرد داده و او را با جنبه‌های تاریخی ریاضی آشنا می‌کند. با استفاده از سبکی نگارشی مشابه زبان تصویری بایرن که از برچسب گذاری و اثبات‌های چگال خبری نیست و بیشتر روی رنگ و فضا تاکید دارد، می‌توان راه حل هندسی خیام را اثبات کرد. به علاوه اثبات خیام در واقع پیوند مطالعات عهد عتیق در مورد مقاطع مخروطی، تناسب و دو برابر کردن مکعب با جبر اسلامی است. در فرهنگ ریاضی توان‌های x با ابعاد هندسی متناظرند و حل معادلات درجه سوم کار برجسته ایست. اگرچه خیام با سازه‌های، خود راه حل هندسی برای همه معادلات درجه سوم ابداع کرد اما به خوبی می‌دانست که حل جبری این معادلات همچنان با مشکل مواجه است. که این مشکل نیز در اواسط قرن ۱۶ توسط کاردانو حل شد.



شکل ۷. دلیل خیام در شیوه ی الیور بایرن بخش ۱ از ۲



شکل ۸. دلیل خیام در شیوه ی اولیور بایرن، بخش ۲ از ۲

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.78166.1194

مراجع

[1] G. Alexanderson, review of The First Six Books of Euclid, edited by W. Oechslin, MAA Re-views, (2010), http://www.maa.org/publications/maa-reviews/the-first-six-books-of-the-elements-of-euclid.

[2] O. Byrne, *The Doctrine of Proportion Clearly Developed, on a Comprehensive, Original, and Very Easy System; or, the Fifth Book of Euclid Simplified*, J. Williams, London, 1841.

[3] O. Byrne, *The First Six Books of The Elements of Euclid in which Coloured Diagrams and Symbols are Used Instead of Letters for the Greater Ease of Learners*, William Pickering, London, 1847.

[4] A. De Morgan, *A Budget of Paradoxes*, Second edition, Edited and reprinted with the author's additions from the Athenaeum by D. E. Smith, Open Court, Chicago, 1915.

[5] J. Fauvel and J. Gray, *The History of Mathematics: A Reader*, The Open Univ., London, 1987.

[6] *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, **2**, Edited by T. L. Heath, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1908.

[7] *Apollonius of Perga, Conics*, Edited by T. L. Heath, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1896.

[8] —, Conics, Translated by R. C. Taliaferro, Classics of the St. John's Program, Annapolis, 1939.

[9] S. Heller, *Forms and functions*, New York, Times Sunday Book Review August 22, 2010.

[10] *The Algebra of Omar Khayyam*, Edited by D. S. Kasir, Bureau of Publications, Teachers College, Columbia Univ., New York, 1931.

[11] V. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley, Boston, 2009.

[12] The First Six Books of The Elements of Euclid in which Coloured Diagrams and Symbols are Used Instead of Letters for the Greater Ease of Learners, Edited W. Oechslin. Taschen, K¨oln, 2010.

[13] —, Reprint edition, Taschen, K¨oln, 2013.

[14] R. McLean, *Victorian Book Design and Colour Printing*, Univ. of California Press, Berkeley, 1972.

[15] R. Rashed and B. Vahabzadeh, *Omar Khayyam, the Mathematician*, Bibliotheca Persica Press, New York, 2000.

[16] D. Smith, *Civil Engineering Heritage: London and the Thames Valley*, Thomas Telford, London, 2001.

[17] E. R. Tufte, *The Visual Display of Quantitative Information*, Graphics Press, Cheshire, CT, 2001.

اکبر طیبی
قم، دانشگاه قم، دانشکده علوم، گروه ریاضی
akbar.tayebi@gmail.com

اکبر طیبی متولد ۱۳۵۸ در شهر تبریز است. در سال‌های ۸۰، ۸۲ و ۸۶ به‌ترتیب دوره‌های کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری خود را در دانشگاه‌های تبریز، علم و صنعت ایران و صنعتی امیرکبیر به اتمام رساند. وی هم‌اکنون دانشیار دانشگاه قم می‌باشد.

سید احمد فقیهی قم، دانشگاه قم، دانشکده علوم، گروه ریاضی
faghihiahmad@yahoo.com

سید احمد فقیهی متولد ۱۳۵۰ در شهر اصفهان است. در سال‌های ۷۴، ۷۷ و ۸۶ به تر تیب دوره های کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری خود را در دانشگاه‌های اصفهان، تربیت مدرس و اصفهان به اتمام رساند. در حال حاضر ایشان استادیار دانشگاه قم می‌باشد.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.78166.1194