

آیا براور واقعاً چنین اعتقادی داشت؟

داگلاس بریجز

مترجمین: رضا ستوده و حمیدرضا گودرزی*

چکیده. نوشته حاضر، ترجمه مقاله زیر است:

Douglas S. Bridges, *Did Brouwer Really Believe That?*, 2007.

که در صفحه شخصی نویسنده آن به آدرس زیر، در دسترسی آزاد قرار گرفته است:

<http://www.dsbridges.com/miscellaneous-writings.html>

۱. مقدمه مترجمین

از ابتدای پیدایش تفکر ریاضی تاکنون، دیدگاه‌ها و نگرش‌های مختلف و گاه متفاوت در مورد فلسفه و ماهیت ریاضیات در بین متفکرین وجود داشته است. نخستین دیدگاه به لحاظ تاریخی، دیدگاه افلاطونی^۱ منسوب به افلاطون، فیلسوف بزرگ یونانی است. او و پیروانش معتقد بودند که ریاضی دارای ماهیتی اصیل و مستقل از ذهن انسان بوده و قبل از انسان در جهان وجود داشته و لذا کار یک ریاضی‌دان تنها کشف و نه خلق حقایق ریاضی است. دیدگاهی دیگر که نقطه مقابل دیدگاه افلاطونی است، صورت‌گرایی^۲ است که بزرگترین مدافع آن، دیوید هیلبرت^۳ ریاضی‌دان مشهور آلمانی است. صورت‌گرایان معتقد هستند که ریاضیات صرفاً قراردادهای ذهنی انسان است که روی کاغذ آورده می‌شود. شخص هیلبرت بر این عقیده اصرار داشت که فقط با استفاده از تعداد بسیار محدودی از مفاهیم اولیه، چند اصل بدیهی و تعدادی قرارداد منطقی می‌توان تمامی ریاضیات را ساخت و همه مسائل آن را حل کرد. هر چند که این باور و یا به تعبیر بهتر، آرزوی هیلبرت با اثبات قضیه ناتمامیت گودل^۴ ریاضی‌دان، منطق‌دان و فیلسوف اتریشی که نشان داد در هر دستگاه رسمی متشکل از علائم و قراردادهای مسائل حل‌ناپذیری وجود دارند، فرو ریخت؛ اما این دیدگاه تا عصر حاضر همچنان فراگیرترین دیدگاه در ریاضیات محسوب می‌شود. گسترش وسیع و سریع ریاضیات محض در زمینه‌های مختلف و کسب نتایج بسیار مجرد و انتزاعی از دست‌آوردهای این نوع نگاه به ریاضی است.

شهودگرایی^۵ دیدگاهی دیگر و نسبتاً جدید در ریاضی است که در حدود یکصد سال پیش توسط براور^۶ ریاضی‌دان، فیلسوف و عارف هلندی مطرح شد. از نظر یک شهودگرا، ریاضیات آفرینشی ذهنی توسط انسان است که به وسیله ذهن انسان

عبارات و کلمات کلیدی. براور، شهودگرایی، اصل طرد شق میانی، فلسفه ریاضی.

دبیر تخصصی رابط: سعید اعظم

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۸/۲۲

DOI: <http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.106277.1247>

¹Platonism ²Formalism ³David Hilbert ⁴Kurt Godel ⁵Intuitionism ⁶L. E. J. Brouwer

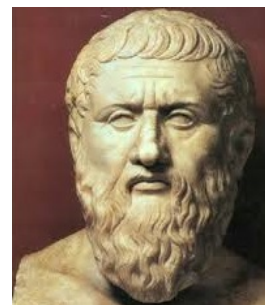
و یا یک ماشین محاسبه‌گر قابل درک و ارزش‌گذاری باشد. منظور از ارزش‌گذاری این است که در مورد هر گزاره‌ای بتوان به طور قطع تصمیم گرفت که آن گزاره درست است یا نه؟ از این رو شهودگراها از طرح یا تعمیم مفاهیم بسیار مجرد که قابلیت درک نداشته باشند، پرهیز می‌کنند. از آن‌جا که مورد اخیر اختلافی بسیار عمیق بین صورت‌گرایان و شهودگرایان ایجاد می‌کند و با توجه به هم عصر بودن دو سردمدار بزرگ این دو دیدگاه یعنی براور و هیلبرت، متأسفانه درگیری‌های شدیدی بین این دو ریاضی‌دان برجسته روی داد که می‌توان آن را یکی از تلخ‌ترین وقایع تاریخ ریاضیات به حساب آورد.



براور



هیلبرت



افلاطون

تجربه بشری نشان داده که هر وقت که یک نظریه یا دیدگاه جدید در حال تولد و شکل‌گیری است، به دلایل مختلف و از جمله به خاطر عدم درک صحیح آن، از سوی منتقدین مورد حمله قرار می‌گیرد. چنین وضعیتی در مورد دیدگاه شهودگرای براور هم وجود داشته و گاهی باورهای نادرست به آن نسبت داده می‌شود. در مقاله حاضر، داگلاس بریجز^۷ که خود یک محقق و پژوهش‌گر برجسته و مدافع دیدگاه شهودی و در حال حاضر استاد بازنشسته دانشگاه کانتربری^۸ نیوزیلند است، با بهانه قرار دادن مطلبی انتقادی که در یکی از کتاب‌های مطرح ریاضی در مورد این دیدگاه نوشته شده، سعی می‌کند با ارائه توضیحاتی، به بعضی ابهامات و اتهامات در مورد ریاضیات شهودگرا و شخص براور پاسخ دهد. لازم به ذکر است که توضیحات آمده در پاورقی‌ها توسط مترجمین اضافه شده است.

۲. آیا براور واقعاً چنین اعتقادی داشت؟

پاورقی صفحه ۲۷۹ از [۱۲] مایه تأسف و در واقع به لحاظ تاریخی غلط است که به یک کتاب جالب توجه، لطمه وارد کرده است. در آن پاورقی، نویسنده این‌طور مطرح می‌کند که:

”... بعدها در ادامه مسیر حرفه‌ایش، او (براور) بزرگترین طرفدار مکتبی موسوم به فلسفه شهودی ریاضی شد که نه تنها استفاده از اصل انتخاب^۱ را منع می‌کند، بلکه این اصل که یک گزاره یا درست است یا غلط را رد می‌کند (و لذا اجازه استفاده از روش برهان خلف را نمی‌دهد). اتخاذ چنین موضعی عواقب فاجعه‌باری به دنبال دارد. به عنوان نمونه، یک شهودگرا نباید وجود عدد گنگ را بپذیرد! در واقع در واپسین سال‌های عمر، براور قضیه نقطه ثابت خود^۲ را به عنوان یک قضیه نمی‌دید.“

این مطلب شامل چند باور غلط قدیمی ولی همچنان رایج درباره براور است. باورهای غلطی که تمایل به رواج این افسانه دارند که شهودگرایی به نوعی، مبتنی بر رد اختیاری اصول کلاسیک است و در نتیجه برای یک شهودگرا این امکان وجود ندارد که قضایا را به همان ژرفایی که با روش‌های استاندارد اثبات شده است، اثبات کند.

^۱ اصل انتخاب (Axiom of Choice) معادل‌های متعددی دارد. صورت ساده‌ای از این اصل به این صورت است: اگر بی‌نهایت مجموعه ناتهی داشته باشیم، می‌توانیم از هر مجموعه فقط یک عضو را انتخاب کنیم.

^۲ بر طبق این قضیه، هر تابع پیوسته $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ یک نقطه ثابت دارد. یعنی $x \in [a, b]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x) = x$.

^۷ Douglas S. Bridges ^۸ Canterbury University

ابتدا این جمله را که شهودگرایی "نه تنها استفاده از اصل انتخاب را منع می‌کند، بلکه این اصل که یک گزاره یا درست است یا غلط را رد می‌کند." در نظر بگیرید. ممانعت از انتخاب ارزش‌های درستی توسط شهودگرا ناشی از این فرضیه اساسی شهودگرایی است که: اشیای ریاضی مخلوقات ذهنی هستند و لذا فقط و فقط زمانی می‌توان گفت وجود دارند که مصادیقی در دنیای خارج داشته باشند. به عبارت دیگر برای شهودگرا، "وجود" به معنای "ساختنی بودن" است. از این مطلب بلافاصله نتیجه می‌شود که او مجاز به استفاده از برهان خلف برای اثبات وجود یک شیء نیست. به عنوان مثال، نشان دادن این که فرض عدم وجود جواب برای یک معادله به تناقض می‌انجامد، به خودی خود نشان نمی‌دهد که چگونه می‌توان آن جواب را ساخت. با این وجود، شهودگرا از استفاده از برهان خلف منع نمی‌شود. حتی برای او هم اثبات این که یک گزاره معین S غلط است، شامل این است که نشان دهد که فرض S منجر به تناقضی شبیه " $0 = 1$ " می‌شود. اما اگر S یک گزاره وجودی به شکل

$$(۱) \quad \exists x \in A : P(x),$$

باشد، هرچند که چنین اثباتی، نتیجه

$$(۲) \quad \neg(\exists x \in A : P(x)),$$

را به دست می‌دهد، اما گذر شهودی از (۲) به (۱) کار بیشتری طلبیده و در اکثر موارد، غیرممکن است. این ما را به مسأله طبیعی (و واقعاً عمیق) ارزش‌های درستی دوگانه (درست و غلط)^۹ رهنمون می‌کند. برای یک شهودگرا صحبت کردن از "درستی" یک گزاره معنای چندانی ندارد، مگر و تا زمانی که آن گزاره اثبات شده باشد. این بدان معنی نیست که او "این اصل که یک گزاره یا درست است یا غلط را رد می‌کند." بلکه به جای آن، نگران مفهوم معنادار "اثبات پذیری" است. توجه کنید برای یک شهودگرا، "اثبات" به معنای "اثبات در یک دستگاه رسمی با استفاده از قوانین و اصول" نیست، بلکه به معنی یک ساخت ذهنی از نوع دلخواه است. لذا "اثبات پذیری" یک مفهوم رسمی نیست. لازم است به دو نکته دیگر در ارتباط با مفهوم درستی اشاره شود. اولاً حتی برای اکثر طرفداران افراطی افلاطون، این که هر گزاره‌ای یک ارزش درستی دارد، یک "اعتقاد" است و نه یک "اصل". اصول همان گزاره‌هایی هستند که نظریه‌های ریاضی بر اساس آن‌ها ساخته می‌شوند و نه دستگاه‌های اعتقادی. ثانیاً با اینکه ریاضی‌دانان به راحتی کلماتی نظیر "درست" و "غلط" را به گونه‌ای استفاده می‌کنند، انگار که این کلمات معانی روشن فلسفی دارند، گمان من این است که تعداد بسیار کمی از ریاضی‌دانان کلاسیک، به غیر از طرفداران افلاطون، ایده روشنی از منظورشان از این کلمات دارند. یک شهودگرا حداقل درک قوی از مفهوم "اثبات پذیری" دارد.

اتفاقاً در ریاضیات شهودی موضوع بر زمین نهادن اصول و سپس کسب نتایج از آن‌ها نیست، بلکه نتیجه‌گیری مبتنی بر خواص اساسی اعداد طبیعی است که به صورت شهودی درک شده است. همان‌طور که بیشاپ^{۱۰} می‌نویسد:

"اولین دغدغه ریاضیات، عدد است که منظور از آن، اعداد صحیح مثبت است. ما آن‌گونه درکی از اعداد داریم که کانت^{۱۱} از فضا داشت. اعداد صحیح مثبت و علم حساب آن‌ها، با استفاده از هوش بسیار طبیعی ما پنداشته شده‌اند و ما به طور کلی به وسیله هوش بسیار طبیعی‌مان فریفته شده‌ایم. توسعه اعداد صحیح مثبت از مفهوم اولیه یکه، مفهوم الحاق یکه و فرآیند استقرار ریاضی یک اعتقاد کامل را به همراه دارد. به قول کرونکر^{۱۲}، اعداد صحیح مثبت به وسیله خدا آفریده شده‌اند.

... هر چیزی خودش را به عدد مربوط می‌کند و همه گزاره‌های ریاضی در نهایت این حقیقت را بازگو می‌کنند که اگر با اعداد صحیح مثبت، محاسبات معینی را انجام دهیم، نتایج معینی به دست خواهیم آورد. ... حتی اغلب گزاره‌های مجرد ریاضی، یک مبنای محاسباتی دارند."

⁹ True and False ¹⁰ Errett Bishop ¹¹ Immanuel Kant ¹² Leopold Kronecker

در مورد وضعیت اصل انتخاب (AC) در شهودگرایی، دوباره باید اشتباه در این باور یا نتیجه‌گیری که شهودگرایی به نوعی مبتنی بر رد اصل انتخاب است را مورد تأکید قرار دهیم. همان‌طور که در بالا اشاره کردم، مبنای شهودگرایی مفهوم مثبت وجود ساختنی است نه مفهوم منفی رد یک اصل کلاسیک یا نظایر آن. اگر شما به طور جدی دیدگاه برآور را مد نظر قرار دهید که “وجود” به معنی “ساخت‌پذیری” است و در نتیجه با پرهیز از هر نوع تصور درباره ارزش‌های درستی دوگانه، فوراً متوجه می‌شوید که قانون طرد شق میانی^۳ (حالت سومی وجود ندارد) به عنوان یک وسیله در اثبات شهودی نمی‌تواند پذیرفته شود. در واقع حتی نوع محدود شده این قانون هم غیرساختنی است:

LPO : برای هر دنباله دودویی^۴ $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ، یا برای هر n ، $x_n = 0$ یا در غیر این صورت n ای وجود دارد که $x_n = 1$. یا به صورت نمادین،

$$(3) \quad \forall x \in 2^{\mathbb{N}} (\forall n (x(n) = 0) \vee \exists n (x(n) = 1)).$$

طبق تفسیر استاندارد شهودگرایانه برآور-هیتینگ^{۱۳} - کولموگروف^{۱۴} از رابط‌ها و سور‌ها (صفحات ۷ و ۸ از [۴])، یک اثبات سازنده برای (۳) باید شامل الگوریتمی باشد که روی هر دنباله دودویی x که اعمال شود، بتواند تصمیم بگیرد که یا همه جملات آن دنباله صفر هستند و یا این‌که n ای وجود دارد (که الگوریتم باید آن را محاسبه کند) که $x_n = 1$. اندکی تأمل هر ریاضی‌دانی را متقاعد می‌کند که چنین الگوریتمی هیچ وقت نمی‌تواند وجود داشته باشد.

بنابراین LPO و در نتیجه قانون طرد شق میانی نمی‌تواند از طرف یک شهودگرا پذیرفته شود. تأملی مشابه، ما را متقاعد می‌کند که AC هم به لحاظ شهودی به درد نخور است. این نتیجه در پی شک دیاکونسکو^{۱۵} ([۹]) و گودمن^{۱۶} و مایهیل^{۱۷} ([۱۱]) به دست آمد که نشان دادند که AC مستلزم قانون طرد شق میانی است.

حال به توضیحی درباره عواقب “فاجعه‌بار” دیدگاه شهودی می‌پردازیم. حمایت نویسنده [۱۲] از این مطلب که “یک شهودگرا نباید وجود عدد گنگی را بپذیرد” آشکارا نادرست است. گمان من بر این است که او عقاید برآور در مورد پیوستار^۵ را با عقاید فوق سازنده کرونگر اشتباه گرفته است. او نفر آخری بود که به اعداد گنگ باور نداشت؛ همان‌طور که از اظهار نظرش به لیندمان^{۱۸} برداشت می‌شود:

”به خاطر چه چیزی، پژوهشهای عالی شما π را در نظر می‌گیرد؟ وقتی اعداد گنگ وجود ندارند، چرا باید چنین مسائلی را مطالعه کنیم؟“

درک برآور از مفهوم پیوستار، قطعاً $\sqrt{2}$ ، π ، e و تعداد ناشمارا از اعداد گنگ را می‌پذیرد. شاید نویسنده [۱۲] دچار این باور نه چندان غیر معمول شده است که در هر بسط سازنده‌ای، خط حقیقی شماراست. این درست است که به عنوان نمونه، مجموعه اعداد حقیقی بازگشتی، به صورت خارجی شمارش‌پذیر است اما به صورت بازگشتی شمارش‌پذیر - یعنی شمارش‌پذیر طبق چارچوب بازگشتی - نیست. در هر نظریه سازنده معقولی، خط حقیقی به صورت نامتناهی ناشماراست. به عنوان نمونه فصل ۲ از [۴] را ببینید.

استفاده از کلماتی شبیه “فاجعه‌بار” برای توصیف عواقب استفاده از منطق شهودی، به شکل خطرناکی احساسی و یک قضاوت ارزشی است. برای رعایت انصاف با این نویسنده، تمامی سی و پنج سال گذشته من همواره متوجه شدم که خیلی از ریاضی‌دانانی که چیزی از آنالیز عمیقی که به وسیله بیشاپ در سال‌های ۱۹۶۰ انجام شده، نمی‌دانند، بر باور هیلبرت (که در دوران جدید نیز به وسیله بورباکی^۶ ادامه دارد) اصرار می‌ورزند که:

^۳ بر اساس این اصل در ریاضیات کلاسیک، اگر P گزاره‌ای منطقی باشد، $P \vee \neg P$ همواره درست است.

^۴ Binary Sequence، دنباله‌ای که اعضای آن فقط صفر یا یک باشد.

^۵ Continuum، فرض پیوستار در ریاضیات فرضی است درباره اندازه مجموعه‌های نامتناهی. این فرض می‌گوید: هیچ مجموعه‌ای وجود ندارد که اندازه‌اش بین اندازه مجموعه اعداد طبیعی و اندازه مجموعه اعداد حقیقی باشد.

^۶ Nicolas Bourbaki، نام مستعار گروهی از ریاضی‌دانان عمدتاً فرانسوی.

”منع کردن یک ریاضی‌دان از استفاده از اصل طرد شق میانی، مانند منع کردن یک منجم از استفاده از تلسکوپش و یا منع کردن یک مشت‌زن از استفاده از مشت‌هایش است.“

کافی است کتاب بیشاپ [۲] یا نسخه تجدید نظر شده و تعمیم یافته آن [۳] برگ زده شود تا بتوان ادعا کرد که: در آنجا شما یک تعمیم کاملاً سازنده از آنالیز حقیقی، مختلط و تابعی؛ انتگرال‌گیری مجرد و نظریه اندازه؛ قضیه طیفی و حساب تابعی برای عملگرهای خودالحاق در یک فضای هیلبرت؛ اندازه‌ها و دوگان در گروه‌های آبلی موضعاً فشرده و مبانی نظریه جبر باناخ از جمله نظریه گلفاند برای $C(X)$ را خواهید یافت. در سی و نه سالی که کتاب بیشاپ قفسه‌ها را لمس کرده و به خصوص در بیست و دو سالی که کتاب [۳] بیرون آمده، پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در خیلی از مباحث در آنالیز، جبر و توپولوژی سازنده صورت گرفته است. بعضی از ابعاد این پیشرفت را می‌توان در کتابی که به تازگی توسط بریجز و ویتا^{۱۹} [۴] به چاپ رسیده، یافت.

دو نکته دیگر را مطرح می‌کنم. نکته اول درباره جمله نویسنده [۱۲] درباره برآور و قضیه نقطه ثابت او (FPT) است. برآور FPT را، آنگونه که معمولاً بیان می‌شود، به لحاظ شهودی غیرمعتبر (ولی نه غلط) می‌دانسته است. حاضرم شرط ببندم که او حتی یک ”مثال نقض برآوری“ داشت تا نشان دهد که شکل متعارف FTP به صورت سازنده مستلزم نسخه محدودی از قانون طرد شق میانی است. با این حال، برآور می‌دانست که قضیه او در حالت شهودی به این صورت درست است: برای هر نگاشت پیوسته f از دیسک یک‌به‌یک بسته D در $\mathbb{R}^2$ به روی خودش و هر $\epsilon > 0$ ، $x \in D$ وجود دارد به طوری که $\|f(x) - x\| < \epsilon$.

(نسخه ون دالن^{۲۰} از سخنرانی‌های برآور در سال ۱۹۲۷ [۶] یا مقاله برآور [۷] را ببینید.) در منطق شهودی و در حالت کلی، این بهترین کاری است که می‌توانیم انجام دهیم. با این وجود اگر نسخه ضعیف‌تر ”قضیه فن^{۲۱}“ برآور را بپذیریم، در این صورت می‌توانیم به طور شهودی ثابت کنیم که:

فرض کنید f یک نگاشت پیوسته از دیسک یک‌به‌یک بسته D در $\mathbb{R}^2$ به روی خودش باشد به طوری که حداکثر یک نقطه ثابت داشته باشد؛ به این معنی که برای هر دو عضو مجزای $x, y \in D$ ، $\|f(x) - x\| > 0$ یا $\|f(y) - y\| > 0$ ؛ در این صورت f یک نقطه ثابت (منحصر به فرد) در D دارد.

این نتیجه‌ای از یک نتیجه کلی‌تر در [۱] است. توجه کنید که این نسخه FPT به صورت کلاسیک (و نه شهودی) معادل با نسخه معمول آن است: زیرا با فرض این که تابع پیوسته $f: D \rightarrow D$ هیچ نقطه ثابتی نداشته باشد، می‌توان گفت که حداکثر یکی دارد و لذا با توجه به نسخه اخیر شهودی FPT، منحصر به فرد است.

نکته دوم من در ارتباط با اولین بند از گفته‌های نویسنده [۱۲] است که در ابتدای این مطالب در گیومه آورده شده است. این درست است که برآور بخش پایانی و طولانی‌تر مسیر حرفه‌ای خود را به عنوان ”بزرگترین طرفدار“ شهودگرایی گذراند، اما نباید فراموش کرد که او مسیر حرفه‌ای خود را یک‌صد سال پیش با انتشار رساله دکترایش [۵] شروع کرد که اولین اعلان و عرضه عقاید شهودگرایانه‌اش بود. به صلاح‌دید استاد راهنمای دکترایش، او چند سال بعد را صرف کسب اعتبار در ریاضیات سنتی، به عنوان پیشگام یک زمینه نسبتاً جدید در توپولوژی، کرد. لذا آن دفاع او از شهودگرایی باید با توانایی بالای تشخیص ریاضی او همراه بوده باشد.

لذا مایه تأسف است که با ادامه تصورات غلط (و در بعضی موارد، مغرضانه) رایج درباره ریاضیات سازنده – شهودی، نویسنده [۱۲] اظهاراتی را در پاورقی خود درباره برآور مطرح می‌کند. شاید چیزی که در اینجا نوشته‌ام او را ترغیب کند که درباره این اظهارات در ویرایش بعدی کتابی که با احترام فراوان، استثنایی و ارزشمند است، بازنگری کند.

^{۱۹} Fan Theorem، شرحی از این قضیه منطقی را می‌توان در [۸] دید.

^{۲۰} Dirk van Dalen ^{۲۱} Luminita S. Vita

۳. تشکر و قدردانی

وظیفه خود می‌دانیم از پروفیسور داگلاس بریجز که با رویی گشاده اجازه ترجمه مقاله خود به فارسی را به ما دادند، تشکر کنیم. همچنین از دکتر محمد اردشیر، استاد گرانقدر گروه ریاضی دانشگاه صنعتی شریف که با راهنمایی‌های ارزنده خود، انگیزه مطالعه و ترجمه این مقاله را در ما به وجود آوردند، صمیمانه قدردانی می‌کنیم.

مراجع

- [1] J. Berger, D. S. Bridges and P. M. Schuster, The fan theorem and unique existence of maxima, *J. Symbolic Logic*, **71** (2006) 713–720.
- [2] E. A. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [3] E. A. Bishop and D. S. Bridges, *Constructive Analysis*, Grundlehren der Math. Wiss., **279**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1985.
- [4] D. S. Bridges and L. S. Vita, *Techniques of Constructive Mathematics*, Universitext, Springer, New York, 2006.
- [5] L. E. J. Brouwer, *Over de Grondslagen der Wiskunde*, Doctoral dissertation, Maas & van Suchtelen, Amsterdam, 1907.
- [6] L. E. J. Brouwer, *Intuitionismus*, edited by D. van Dalen, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992.
- [7] L. E. J. Brouwer, An intuitionist correction of the fixed-point theorem on the sphere, *Proc. Royal Soc. London, Ser. A*, **213** (1952) 1-2.
- [8] D. van Dalen, *Mystic, Geometer, and Intuitionist: The Life of L. E. J. Brouwer*, 2 volumes, Oxford Univ. Press, 1999 **1** 2005 **2**.
- [9] R. Diaconescu, Axiom of choice and complementation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **51** (1975) 176–178.
- [10] M. A. E. Dummett, *Elements of Intuitionism*, 2nd ed., Oxford Logic Guides, **39**, Oxford University Press, New York, 2000.
- [11] N. D. Goodman and J. Myhill, Choice Implies Excluded Middle, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, **24** (1978) 461.
- [12] E. A. Ok, *Real Analysis with Economic Applications*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 2007.

رضا ستوده

یاسوج، خیابان دانشگاه، دانشگاه یاسوج، گروه ریاضی
reza.sotoudeh@yahoo.com



رضا ستوده متولد آذر ماه ۱۳۵۵ در شهر شیراز است. وی در سال ۱۳۷۴ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه سمنان و در سال ۱۳۷۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران در گرایش آنالیز شد. او پس از چندین سال تدریس در مدارس شیراز، در سال ۱۳۹۳ وارد دوره دکترای ریاضی محض دانشگاه یاسوج در گرایش آنالیز شد و در حال حاضر ضمن مطالعه و پژوهش در مورد آنالیز سازنده مبتنی بر منطق شهودی زیر نظر استاد راهنمای خود دکتر حمیدرضا گودرزی، به تدریس در مدارس شیراز هم مشغول است.

حمیدرضا گودرزی

یاسوج، خیابان دانشگاه، دانشگاه یاسوج، گروه ریاضی
goudarzi@mail.yu.ac.ir



حمیدرضا گودرزی متولد شهریور ماه ۱۳۴۹ در نور آباد ممسنی در استان فارس است. وی مدرک کارشناسی ریاضی محض خود را در سال ۱۳۷۱ از دانشگاه کرمان و کارشناسی ارشد خود را در سال ۱۳۷۵ از دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران در گرایش جبر کسب کرد. دوره دکترای خود را در گرایش آنالیز در سال ۱۳۸۹ در دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران و در طرحی مشترک با دانشگاه لاوال کانادا زیر نظر دکتر جواد مشرقی و دکتر سید منصور واعظ پور به پایان رساند و هم‌اکنون عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه یاسوج است. علاقه‌مندی‌های پژوهشی ایشان فضاهای احتمالاتی، نظریه نقطه ثابت و بهترین تقریب، نظریه تعادل در سیستم‌های دینامیکی، نظریه بازی و نقاط ثابت و ثابت تقریبی در آنالیز سازنده می‌باشد.