ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۲، شماره ۳ (۱۳۹۶)، صص. ۶۰-۵۱

http://www.ui.ac.ir
یافتهها نشریه علمی-ترویجی دانشگاه اصفهان
http://math-sci.iranjournals.ir

مروری بر تابع هیلبرت یک ایده‌ال

سید شهاب ارکیان و امیر مافی*

چکیده. در این مقاله، نتایج اثبات شده در طول پنجاه سال گذشته در ارتباط با ضرایب هیلبرت $e_\circ(I)$ و $e_۱(I)$ مربوط به ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیهٔ I از یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی $(R,\mathfrak{m})$ و رابطهٔ آن با عمق حلقهٔ مدرج وابستهٔ $\operatorname{gr}(I)$ را بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

تئوری توابع هیلبرت تقریبا ۱۰۰ سال پیش، از یکی مقالات دیوید هیلبرت سرچشمه گرفت [۴]. او در این رساله ثابت کرد اگر I یک ایده‌ال همگن از حلقهٔ $\mathbb{C}[x_۱,\cdots,x_n]$ باشد، آنگاه $\dim_{\mathbb{C}} I_n$ با مقادیر یک چند جمله‌ای برحسب n، برای $n \gg \circ$، برابر است. در اینجا I_n مجموعهٔ چند جمله‌ای‌های همگن از درجهٔ n است. در سال ۱۹۵۱ پیر ساموئل نشان داد که اگر $\mathbb{C}$ را به یک حلقهٔ موضعی آرتینی تغییر دهیم نتیجه هیلبرت درست است [۲۰]. همچنین وی ثابت کرد که اگر $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی و I یک ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیهٔ آن باشد، آنگاه $H_I(n)=\lambda(R/I^n)$ برای $n \gg \circ$، یک چند جمله‌ای برحسب n مانند $P_I(n)$ است که در آن $\lambda(R/I^n)$ طول R/I^n است. یعنی یک چندجمله‌ای مانند $P_I(n)\in Q[x]$ چنان موجود است که برای nهای به‌اندازه کافی بزرگ، $H_I(n)=P_I(n)$. هدف ما مطالعهٔ تابع $H_I(n)$ است. برخی از مؤلفین $H_I(n)$ را تابع هیلبرت-ساموئلِ I نامیده‌اند. ما از آن با نام تابع هیلبرت I یاد می‌کنیم.

فرض کنید K یک میدان و $R=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_i$ یک حلقهٔ جابجایی نوتری مدرج چنان باشد که $R_\circ = R$. اگر $R=K[R_۱]$، یعنی K-جبر R توسط $R_۱$ تولید شود، R را حلقهٔ مدرج استاندارد گوییم. همچنین اگر R به عنوان $K[R_۱]$- مدول، باتولید متناهی باشد، R را مدرج شبه-استاندارد گوییم. به عنوان مثال، حلقهٔ چند جمله‌ای معمولی یک حلقه مدرج استاندارد است که در این صورت موضعی نیز خواهد بود. در سراسر این بحث حلقهٔ چند جمله‌ای معمولی را با S و حلقهٔ چند جمله‌ای صوری را با A نشان می‌دهیم. همچنین در تمامی این نوشتار ـبجز مواردی که قید شودـ $(R,\mathfrak{m})$، را یک حلقهٔ جابجایی موضعی نوتری از بعد d و I را به‌عنوان یک ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیهٔ R در نظر می‌گیریم. چندجمله‌ای $P_I(n)$ را می‌توان به فرم استاندارد ضرایب دوجمله‌ای به‌صورت زیر نوشت:

$$P_I(n)=e_\circ(I)\binom{n+d-۱}{d}-e_۱(I)\binom{n+d-۲}{d-۱}+\cdots+(-۱)^d e_d(I)$$

عبارات و کلمات کلیدی. چند جمله‌ای هیلبرت، تابع هیلبرت و عدد تقلیل.

نویسنده مسئول*

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۳/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۰/۰۱ .

اعداد صحیح $e_i(I)$ برای $i = \circ, \text{۱}, \cdots, d$ را ضرایب هیلبرت I می‌نامند. در باره ضریب جمله پیشرو $e_{\text{۱}}(I)$، چندگانگی[۱] I، نتایج خوبی به‌دست آمده است. ازجمله $e_\circ(I) = \lambda(R/J)$ که در آن J، یک تقلیل [۲] مینیمال I است و همچنین بستار صحیح I، $\bar{I}$، بزرگترین ایده‌ال R است که چندگانگی آن با چندگانگی I برابر است [۱۵]. به‌علاوه، بستار راتلیف-راش I، $\tilde{I}$، بزرگترین ایده‌ال R است که ضرایب هیلبرت آن با ضرایب هیلبرت I برابر است [۱۷]. اما در حالت کلی، اطلاعات زیادی در باره سایر ضرایب هیلبرت I نداریم.

حلقهٔ مدرج وابستهٔ I به‌صورت $\mathrm{gr}(I) = \bigoplus_{n=\circ}^{\infty} I^n/I^{n+\text{۱}}$ تعریف می‌شود. هدف از این نوشتار بیان یک‌سری نتایج دربارهٔ ارتباط عمق $\mathrm{gr}(I)$ و روابط خطی بین ضرایب هیلبرت $e_\circ(I)$و $e_{\text{۱}}(I)$ است. به‌عنوان مثال اگر عمق $\mathrm{gr}(I)$، $d-\text{۱}$ باشد، همهٔ ضرایب هیلبرت I مثبت است [۱۱]. برای بیان تکنیک‌ها و نتایجی در این زمینه، به‌عنوان مثال دو قضیه از هوکابا [۳] و مارلی [۴] را بیان کرده‌ایم. این قضایا، به عنوان حالت‌های خاصّی از نتایج ثابت شده در یک دوره پنجاه ساله، به‌سرعت به‌دست می‌آیند. برای این قضایا و نتایج آنها برهان‌های ساده‌ای در [۲۴] ارائه شده است.

در بخش دوم، رابطهٔ عمق $\mathrm{gr}(I)$ و ضرایب هیلبرت I را بررسی می‌کنیم. به‌عنوان مثال، در این بخش نامعادلهٔ مهم $\lambda(R/I) \geq e_\circ(I) - e_{\text{۱}}(I)$ و شرط برقراری تساوی را در آن بررسی کرده‌ایم. در بخش سوم، قضایایی درباره چند جمله‌ای‌های هیلبرت در حلقه‌های موضعی کوهن-مکالی بیان می‌کنیم. نتایج بخش چهارم شامل چند نامساوی درباره ضرایب هیلبرت بالاتر یک ایده‌ال مانند $e_{\text{۳}}, e_{\text{۲}}$ است. در بخش پنجم یک بررسی دقیق از نظریه‌ی عناصر و دنباله‌های سطحی [۵] را می‌آوریم. این نظریه را، در کتاب‌های مدرن جبر جابجایی نمی‌توان یافت. برای حصول نتیجهٔ مناسب، گزاره‌های مفیدی را از کتاب‌های [۱۲] ، [۹] و همچنین چندین مقاله در این زمینه، جمع‌آوری کرده‌ایم. خواننده را دعوت می‌کنیم برای تکمیل اطلاعاتش در این زمینه به [۲] مراجعه کند.

۲. رابطهٔ عمق $\mathrm{gr}(I)$ و ضرایب هیلبرت I

در این بخش ارتباط عمق $\mathrm{gr}(I)$ و ضرایب هیلبرتِ ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه مانند I از حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی $(R, \mathfrak{m})$ را بررسی می‌کنیم. شاید یکی از اولین کارها در این زمینه، مقالهٔ نورثکات باشد [۱۴]. برای کسب اطلاعات بیشتر [۲۱] را ببینید.

قضیه ۱.۲. (نورثکات، ۱۹۶۰). فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی چنان باشد که $R/\mathfrak{m}$ نامتناهی است. همچنین فرض کنید I یک ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه از R باشد. در اینصورت

(۱) $\lambda(R/I) \geq e_\circ(I) - e_{\text{۱}}(I)$؛

(۲) $e_{\text{۱}}(I) \geq \circ$، و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر I توسط d عنصر منظم تولید شود. در این حالت $e_i(I) = \circ$ برای $i = \text{۱}, \text{۲}, \cdots, d$ و $\mathrm{gr}(I)$ با یک حلقه چند جمله‌ای با d متغیر روی R/I یکریخت است.

از قضیهٔ نورثکات می‌توان نتیجه گرفت که یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی مانند $(R, \mathfrak{m})$، منظم است اگر و تنها اگر $e_\circ(\mathfrak{m}) = \text{۱}$. در قضیهٔ ۴.۲، هونیکه [۸] و اویشی [۱۶] شرایطی را به‌دست آورده‌اند که تحت آن شرایط تساوی $\lambda(R/I) = e_\circ(I) - e_{\text{۱}}(I)$ برقرار است. قبل از آن تعریف تقلیل یک ایده‌ال را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۲.۲ (تقلیل ایده‌ال). فرض کنید J, I دو ایده‌ال از حلقه R و $J \subseteq I$ باشد. گوییم J یک تقلیل I است هرگاه برای هر $n \gg \circ$، $JI^n = I^{n+\text{۱}}$، که در آن $I^{\text{۱}} = I$ و برای هر $n > \text{۱}$، $I^{n+\text{۱}} = I.I^n$. اگر تحت رابطه شمول، J کوچکترین تقلیل I باشد، J را تقلیل مینیمال I گوییم. عدد تقلیل ایده‌ال I نسبت به J ، $r_J(I)$ ، کوچکترین عدد طبیعی n است که $JI^n = I^{n+\text{۱}}$. در چنین حالتی برای هر $k \geq \circ$، $J^k I^n = I^{n+\text{۱}}$. عدد تقلیل $r(I)$ کوچکترین عدد $r_J(I)$ است که در آن ایده‌ال J تقلیل مینیمال I است.

---
[1]multiplicity [2]reduction [3]Huckaba [4]Marley [5]superficial

مفهوم تقلیل یک ایده‌ال نخستین بار توسط نورثکات و ریس در [۱۵] معرفی شد. فرض کنید R یک حلقه نوتری و I یک ایده‌ال باشد. جبر ریس ایده‌ال I، به صورت R–جبر $R[It] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n$ تعریف شده است که در آن t یک متغیر است. فرض کنید J ایده‌ال دیگری از R مشمول در I باشد. در اینصورت J یک تقلیل I است اگر و تنها اگر $R[It]$ یک $R[Jt]$–مدول متناهی باشد [۲۴]. در نتیجه با فرض $K \subseteq J \subseteq I$، K تقلیل I است اگر و تنها اگر K یک تقلیل J و J یک تقلیل I باشد. همچنین در حلقهٔ موضعی $(R, \mathfrak{m})$ ایده‌ال J یک تقلیل ایده‌ال I است هرگاه $J \subseteq I$ و $J + \mathfrak{m}I$ یک تقلیل I باشد. یکی از قضایای مهم در این ارتباط قضیهٔ ریس در [۱۸] است .

قضیه ۳.۲. (ریس، ۱۹۶۱). فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن–مکالی، I یک ایده‌ال $\mathfrak{m}$–اولیه شامل ایده‌ال J باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) J یک تقلیل I است.

(۲) $I \subseteq \overline{J}$.

(۳) $e_0(I) = e_0(J)$.

قضیه ۴.۲. (هونیکه، اویشی، ۱۹۸۷). فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن–مکالی از بعد d با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. در اینصورت $\lambda(R/I) = e_0(I) - e_1(I)$ اگر و تنها اگر برای هر تقلیل مینیمال J از I، $JI = I^2$. به‌علاوه در این حالت $\mathrm{gr}(I)$ کوهن–مکالی است، $e_i(I) = 0$ برای $i = 2, \cdots, d$ و برای هر $n \geq 0$،

$$H_I(n) = P_I(n) = e_0(I)\binom{n+d-1}{d} - e_1(I)\binom{n+d-2}{d-1}.$$

چون برای هر تقلیل مینیمال J از I، $e_0(I) = \lambda(R/J)$، می‌توان قضیهٔ هونیکه–اویشی را به این صورت بازگو کرد که $e_1(I) = \lambda(I/J)$ اگر و تنها اگر $JI = I^2$. هوکابا [۸] و هوکابا–مارلی [۷] قضیهٔ هونیکه–اویشی را به صورت زیر تعمیم داده‌اند.

قضیه ۵.۲. (هوکابا، ۱۹۹۶) فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن–مکالی از بعد d با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. فرض کنید J تقلیل مینیمال I باشد. در اینصورت
$e_1(I) \leq \Sigma_{n\geq 1}\lambda(I^n/JI^{n-1})$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\operatorname{depth}\mathrm{gr}(I) \geq d-1$.

هوکابا و مارلی یک محک برای بررسی کوهن–مکالی بودن $\mathrm{gr}(I)$ از روی $e_1(I)$ به‌صورت زیر ارائه کرده‌اند [۷].

قضیه ۶.۲. (هوکابا–مارلی، ۱۹۹۷). فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن–مکالی از بعد d با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. فرض کنید J یک تقلیل مینیمال ایده‌ال $\mathfrak{m}$–اولیه I باشد. در اینصورت $e_1(I) \geq \Sigma_{n\geq 1}\lambda(I^n/J \cap I^{n-1})$ اگر و تنها اگر $\mathrm{gr}(I)$ کوهن–مکالی باشد.

در [۲۴]، ورما این دو قضیهٔ را به‌صورت ساده‌تری به کمک استقرا روی d اثبات کرده است. حال ارتباط $\operatorname{depth}\mathrm{gr}(I)$ و ضرایب هیلبرت را بررسی می‌کنیم. نقطهٔ شروع این بحث نامساوی آبیانکار است [۱]. فرض کنید I یک ایده‌ال از حلقهٔ موضعی $(R, \mathfrak{m})$ باشد. تعداد عناصر مولد مینیمال I را با $\mu(I)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۷.۲. (آبیانکار، ۱۹۶۷). فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن–مکالی از بعد d باشد. در اینصورت

$$e_0(\mathfrak{m}) \geq \mu(\mathfrak{m}) - d + 1.$$

سالی [6] نیز در یک سری از مقالات خود، به بررسی تاثیر شرایط خاصی روی عمق $\mathrm{gr}(I)$ پرداخته است.

[6] J. Sally

قضیه ۸.۲. (سالی، ۱۹۷۷). فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی از بعد d با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. فرض کنید J یک تقلیل مینیمال $\mathfrak{m}$ باشد. در اینصورت R چندگانگی مینیمال دارد اگر و تنها اگر $J\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{۲}$. در این حالت $\mathrm{gr}(\mathfrak{m})$ کوهن-مکالی است و برای هر $n \geq ۰$،

$$H_{\mathfrak{m}}(n) = P_{\mathfrak{m}}(n) = e_۰(\mathfrak{m})\binom{n+d-۱}{d} - e_۱(\mathfrak{m})\binom{n+d-۲}{d-۱}$$

در ادامه، مفهوم مهم مدول‌های سالی را که اولین بار توسط وَسکان‌سیلوس در [۲۲] مطرح شده است، بررسی می‌کنیم. فرض کنید R یک حلقهٔ نوتری، I یک ایده‌ال و J یک تقلیل I باشد. مدول سالیِ I نسبت به J، $S_J(I)$، به‌وسیلهٔ رشته دقیق

$$۰ \longrightarrow IR[Jt] \longrightarrow IR[It] \longrightarrow S_J(I) := I^{n+۱}/I^nJ \longrightarrow ۰$$

تعریف می‌شود. برخی از خواص مدول سالی را می‌توانید در [۲۲] ببینید.

قضیه ۹.۲. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی از بعد d با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. فرض کنید J یک تقلیل مینیمال ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه I باشد. در اینصورت

(۱) اگر $S_J(I) \neq ۰$، آنگاه ارتفاع [۷] همه ایده‌ال‌های اول وابستهٔ I، یک است. به‌ویژه بعد $R[Jt]$- مدولِ $S_J(I)$، d است.

(۲) فرض کنید $S = S_J(I) = \bigoplus_{n=۰}^{\infty} S_n$. در اینصورت برای هر $n \gg ۰$،

$$H_I(n) = e_۰(I)\binom{n+d-۱}{d} + (\lambda(R/I) - e_۰(I))\binom{n+d-۲}{d-۱} - \lambda(S_{n-۱})$$

از این‌رو اگر $S \neq ۰$ آنگاه $\lambda(S_n)$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه $d-۱$ است. فرض کنید s_i، برای $i = ۰, ۱, \cdots, d-۱$، ضرایب هیلبرت S باشد. در اینصورت

$$e_۱(I) = e_۰(I) - \lambda(R/I) + s_۰،\quad \text{و برای}\quad ۱ \leq i \quad e_{i+۱}(I) = s_i.$$

در قضیهٔ ۱۰.۲، وازپینتو ارتباط بین مدول سالی و عمق $\mathrm{gr}(I)$ را بررسی کرده است [۲۳].

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی از بعد d با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. فرض کنید J یک تقلیل مینیمال ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه I باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $s_۰ = \Sigma_{n=۰}^{r_J(I)} \lambda(I^{n+۱}/JI^n)$.

(۲) S کوهن-مکالی است.

(۳) $\mathrm{depth}\, \mathrm{gr}(I) \geq d-۱$.

۳. توابع هیلبرت در حلقه‌های موضعی کوهن-مکالی یک-بعدی

در این بخش فرض می‌کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی یک-بعدی با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. فرض کنید I یک ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه باشد. تابع هیلبرت I، تابع $H_I(n) = \lambda(R/I^n)$ است. چند جمله‌ای هیلبرت I، $P_I(n)$ از درجه یک است. ما آن را به صورت $P_I(n) = e_۰n - e_۱$ می‌نویسیم. عدد اصل‌موضوعی [۸] ایده‌ال I به‌صورت

$$n(I) = \min\{k \in \mathbb{Z} | \quad H_I(k+۱) = P_I(k+۱)\}$$

[۷] height [۸] postulation

تعریف شده است. فرض کنید $F(I) = R[It]/\mathfrak{m}R[It] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/\mathfrak{m}I^n$. بعد کرول $F(I)$ را با $\ell(I)$ نشان می‌دهیم. چون $\dim R = 1 = \operatorname{height}(I)$، $\ell(I) = 1$. همچنین چون $R/\mathfrak{m}$ نامتناهی است، $a \in I$ چنان موجود است که (a) یک تقلیل I است.

قضیه ۱.۳. (نورثکات، ۱۹۶۰). فرض کنید I یک ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه از حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی یک-بعدی $(R, \mathfrak{m})$ با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. فرض کنید (a) یک تقلیل I باشد. در اینصورت

(۱) برای هر $n \geq 0$

$$P_I(n+1) - H_I(n+1) \geq P_I(n) - H_I(n) \tag{1}$$

(۲) $e_0 - e_1 \leq \lambda(R/I)$.

(۳) $e_1 \geq 0$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر I ایده‌ال اصلی پارامتری باشد.

در واقع، نورثکات در قضیهٔ ۱.۳ با تغییر ایده‌ال اصلی به یک سیستم پارامتری، گزاره های دوم و سوم را برای هر حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی از بعد d اثبات می‌کند. وی این کار را از طریق استفاده از عناصر سطحی و با کاهش به بعد یک انجام می‌دهد. سوالی که اکنون ممکن است مطرح شود این است که، اگر در قضیهٔ ۱.۳ فرض کنیم بعد R، برابر ۲ باشد، آیا بازهم می‌توان درستی تساوی ۱ را نتیجه گرفت؟ متأسفانه همان طورکه مثال ۲.۳ نشان می‌دهد، پاسخ این پرسش منفی است.

مثال ۲.۳. فرض کنید K یک میدان، x, y دو متغیر و $S = K[x, y]$ حلقه چندجمله‌ای روی میدان K و همچنین $I = (x^7, x^2y^5, x^5y^2, y^7)$ باشد. در اینصورت

$$P_I(n) = 49\binom{n+1}{2} - 21n + 4.$$

همچنین $H_I(1) = 33, H_I(2) = 111, H_I(3) = 237$ و $H_I(4) = 410$. از اینرو

$$\begin{aligned} P_I(0) - H_I(0) &= 4 \\ P_I(1) - H_I(1) &= -1 \\ P_I(2) - H_I(2) &= -2 \\ P_I(3) - H_I(3) &= -2 \\ P_I(4) - H_I(4) &= 0. \end{aligned}$$

به نظر می‌رسد ارتباط ساده‌ای بین مقادیر $P_I(n) - H_I(n)$ وجود نداشته باشد. توجه داشته باشید که محاسبات مربوط به مثال ۲.۳ توسط نرم‌افزار مکالی [۹] انجام شده است. به‌وسیله این نرم‌افزار می‌توان توابع هیلبرت یک ایده‌ال همگن در یک حلقه مدرج را به‌دست آورد و به‌این ترتیب می‌توان چند جمله‌ای هیلبرت آن را نیز محاسبه کرد. توجه داشته باشید با وجود اینکه تابع هیلبرت مثال ۴.۳ رفتار خوبی ندارد، اما $e_2(I) = 4 \geq 0$. بنابراین ممکن است انتظار داشته باشید که همواره $e_2(I)$ نامنفی باشد، حتی اگر گزاره «برای هر n، $P_I(n) - H_I(n) \geq 0$» درست نباشد. ناریتا اولین فردی بود که در [۱۳] این موضوع را در قالب قضیهٔ زیر اثبات کرد.

[9] Macaulay

قضیه ۳.۳. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی شبه منظم از بعد ۲ و I یک ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه باشد. در اینصورت $e_۲(I) \geq ۰$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر I در معادله زیر برای عددی صحیح مانند r و عناصر پارامتری $\omega_۱, \omega_۲ \in I$ صدق کند:

$$I^{۲r} = I^r\omega_۱^r + I^r\omega_۲^r.$$

به هر صورت، ممکن است این امر نوعی ناهنجاری تلقی شود و همیشه هر اثبات برای آن با استفاده از یک تکنیک خاص، فاقد عمومیت به نظر می رسد. در مثال زیر می‌بینیم $e_۳(I) \geq ۰$. این امر نشان می‌دهد که نمی‌توان انتظار داشت این امر درباره همه ضرایب هیلبرت درست باشد.

مثال ۴.۳. فرض کنید K یک میدان، $A = K[[x,y,z]]$ ، x, y, z سه متغیر و $I = (x^۳, y^۳, z^۳, x^۲y, xy^۲, yz^۲, xyz)$. مجدداً می‌توان با استفاده از نرم‌افزار مکالی چند جمله‌ای هیلبرت I را به صورت زیر به‌دست آورد.

$$P_I(n) = ۲۷\binom{n+۲}{۳} - ۱۸\binom{n+۱}{۲} + ۴n + ۱.$$

بنابراین $e_۳(I) = -۱$.

قضیه ۵.۳. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی و $J := (a)$ یک تقلیل ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه I باشد. در اینصورت $e_۰ - e_۱ = \lambda(R/I)$ اگر و تنها اگر $aI = I^۲$، [۲۴].

قضیهٔ زیرضمن ارائه یک تساوی برای محاسبه $e_۱$، یک کران پایین برای آن، معرفی کرده، شرط برقراری تساوی را در آن بیان می‌کند.

قضیه ۶.۳. (هوکابا-مارلی). فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی و $J := (a)$ یک تقلیل ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه I باشد. در اینصورت

(۱) $e_۱(I) = \Sigma_{n\geq ۱}\lambda(I^n/JI^{n-۱}) \geq \Sigma_{n\geq ۱}\lambda(I^n/J\cap I^n)$.

(۲) $e_۱(I) = \Sigma_{n\geq ۱}\lambda(I^n/J\cap I^n)$ اگر و تنها اگر $\mathrm{gr}(I)$ کوهن-مکالی باشد.

برای این قضیه یک برهان متفاوت نیز توسط رُسی در [۱۹] ارائه شده است.

مثال ۷.۳. فرض کنید K یک میدان، t یک متغیر، $A = K[[t^۳, t^۴, t^۵]]$ و $\mathfrak{m} = (t^۳, t^۴, t^۵)$ باشد. واضح است که $t^۳\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^۲$. چون A کوهن-مکالی است، $e_۰(\mathfrak{m}) = e_۰(t^۳) = \lambda(A/t^۳A) = ۳$. از روابط $t^۳\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^۲$ و $e_۰ - e_۱ = \lambda(A/\mathfrak{m}) = ۱$، نتیجه می‌گیریم $e_۱(\mathfrak{m}) = ۲$. بنابراین $P_\mathfrak{m}(n) = ۳n - ۲$، برای هر $n \geq ۲$.

۴. نتایجی برای ضرایب هیلبرت بالاتر

هدف ما در این بخش معرفی کران‌هایی برای ضرایب هیلبرت بالاتر یک ایده‌ال مانند $e_۲, e_۳$ است. در ابتدا، مشابه آنچه در قضیهٔ ۶.۳ برای $e_۱(I)$ مشاهده شد، رُسی و همکاران در [۳] یک کران بالا برای $e_۲(I)$ به‌صورت زیر ارائه کرده‌اند.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی از بعد d و J یک تقلیل ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه I باشد. دراینصورت $e_۲(I) \leq \Sigma_{n\geq ۱} n\lambda(I^{n+۱}/JI^n)$. به‌علاوه تساوی به‌ازای یک تقلیل مینیمالِ I مانند J برقرار است اگر و تنها اگر $\operatorname{depth} \mathrm{gr}(I) \geq d-۱$.

هوکابا و هونیکه در [۶] مثال زیر را آورده‌اند که در آن کران بالای معرفی شده در قضیهٔ قبل برای $e_۲(I)$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲.۴. فرض کنید K یک میدان با مشخصه‌ای غیر از ۳، x, y, z متغیر و $A = K[[x, y, z]]$ باشد. لذا $\dim A = d = ۳$. فرض کنید $I = N + \mathfrak{m}^۵$، که در آن $\mathfrak{m}$ ایده‌ال ماکسیمال R و $N = (x^۴, x(y^۳ + z^۳), y(y^۳ + z^۳), z(y^۳ + z^۳))$ است. به سادگی دیده می‌شود که I یک ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه و نرمال است (همه توان‌های آن بطور صحیح بسته است)، که $\operatorname{depth} \operatorname{gr}(I) = d - ۱$. در اینصورت $P_I(t) = \dfrac{۳۱ + ۴۳t + t^۲ + t^۳}{(۱ - t)^۳}$، بنابراین $e_۲(I) = ۴$. به‌علاوه برای هر تقلیل مینیمالِ I مانند J داریم $\lambda(I^۲/JI) = ۲, \lambda(I^۳/JI^۲) = ۱$ و $I^۴ = JI^۳$.

قضیهٔ ۳.۴ با ویژگی عمق حلقه مدرج ایده‌الی که دومین ضریب هیلبرت آن به اندازه کافی به کران بالای معرفی شده در قضیهٔ ۱.۴ نزدیک است، سروکار دارد.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی از بعد $d \geq ۱$ و J یک تقلیل ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه I باشد. به‌علاوه فرض کنید یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $e_۲ \geq \Sigma_{n \geq ۱} n\lambda(I^{n+۱}/JI^n) - ۲$؛

(۲) ایده‌ال I به‌طور صحیح بسته است و $e_۲ \geq \Sigma_{n \geq ۱} n\lambda(I^{n+۱}/JI^n) - ۴$،

در اینصورت $\operatorname{depth} \operatorname{gr}(I) \geq d - ۲$ [۳].

ایتو در [۱۰] نشان داد که برای هر ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیهٔ نرمال مانند I، $e_۳(I) \geq ۰$. البته مثال زیر نشان می‌دهد که حکم ایتو در حالت کلی درست نیست.

مثال ۴.۴. فرض کنید K یک میدان x, y, zو w متغیر و $A = K[[x, y, z, w]]$ باشد. در اینصورت R یک حلقه منظم موضعی و دارای بعد چهار است. فرض کنید $R = A/(w^۳)$. واضح است که R یک حلقه کوهن -مکالی موضعی و دارای بعد سه است. فرض کنید $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$و $\overline{w}$ به ترتیب تصویر x, y, z و w در R باشد. در اینصورت $\mathfrak{m} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w})R$ یک ایده‌ال ماکسیمال R است. فرض کنید $I = (\overline{x}, \overline{y}^۲, \overline{z}^۲, \overline{y}.\overline{w}, \overline{z}.\overline{w})R$. ناریتا در [۱۳] نشان داده است که $e_۳(I) < ۰$.

مارلی نیز در [۱۱] یک ایده‌ال مانند I از حلقه چند جمله‌ای با سه متغیر را ارائه نموده است که $e_۳(I) \geq ۰$. رُسی و همکاران در [۳] به وسیله قضیهٔ ۵.۴ و با فرضیات کمتر، نتیجهٔ ایتو را بهبود بخشیده‌اند.

قضیه ۵.۴. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی از بعد ۳ با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. فرض کنید I یک ایده‌ال $\mathfrak{m}$-اولیه از R چنان باشد که برای عددی مانند $q \geq n(I)$، I^q به‌طور صحیح بسته باشد، که در آن I^q در ۲.۲ تعریف شده است. در اینصورت $e_۳(I) \geq ۰$.

تبصره ۶.۴. توجه داریم که در حالتی‌که بعد حلقه سه باشد، برای هر $n \geq ۲$، $e_۲(I^n)$ مثبت است. به‌ویژه $r(I^n) \leq ۲$.

۵. عناصر سطحی و چند جمله‌ای‌های هیلبرت

در این بخش، ابتدا به معرفی نظریه عناصر و دنباله های سطحی می‌پردازیم. سپس گزاره‌هایی را درباره عناصر و دنباله‌های سطحی بیان می‌کنیم. وجود یک عنصر سطحی ایده‌الی مانند I ، این امکان را فراهم می‌کند که بین ضرایب هیلبرت I و $I/(a)$ ارتباط برقرار کنیم. در نتیجه ابتدا می‌توان ضرایب هیلبرت را برای بعد یک بررسی کرده، سپس این اطلاعات را به ابعاد بالاتر گسترش داد.

تعریف ۱.۵. فرض کنید I یک ایده‌ال از حلقهٔ موضعی $(R, \mathfrak{m})$ باشد. عنصر $x \in R$ را یک عنصر سطحی از مرتبه s برای I گوییم هرگاه $x \in I^s$ و عدد صحیح c چنان وجود داشته باشند که برای هر $n > c$، $(I^n : Rx) \cap I^c = I^{n-c}$.

ابتدا وجود عناصر سطحی یک ایده‌آل را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۲.۵. فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقهٔ موضعی $(R,\mathfrak{m})$ باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر برقرار است.

(۱) اگر I پوچ توان باشد آنگاه هر عنصر I سطحی است.

(۲) اگر I پوچ توان نباشد آنگاه یک عنصر سطحی I مانند a موجود است که $a \in I \setminus I^{2}$.

قضیه ۳.۵. فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقهٔ موضعی $(R,\mathfrak{m})$، $a \in I \setminus I^{2}$ و $\overline{a} = a + I^{2}$ باشد. در اینصورت a یک عنصر سطحی I است اگر و تنها اگر برای هر $n \gg 0$، نگاشت ضربی $\overline{a} : I^{n}/I^{n+1} \longrightarrow I^{n+1}/I^{n+2}$ یک‌به‌یک باشد.

دنباله‌های سطحی و تقلیل‌ها

تعریف ۴.۵. فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقهٔ موضعی $(R,\mathfrak{m})$ باشد. دنباله $x_{1}, x_{2}, \cdots, x_{s} \in I$ را یک دنباله سطحی I گوییم هرگاه برای $i = 1, 2, \cdots s$، $\overline{x_i} := x_i + (x_1, ..., x_{i-1})$ یک عنصر سطحی $I/(x_1, ..., x_{i-1})$ باشد.

به‌استقرا بر روی s و به کمک لم آرتین–ریس [10] می‌توان گزاره زیر را برای دنباله های سطحی به‌دست آورد.

گزاره ۵.۵. فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقهٔ موضعی $(R,\mathfrak{m})$ و $x_{1}, x_{2}, \cdots, x_{s}$ یک دنباله سطحی I باشد. در اینصورت برای هر $n \gg 0$، $I^{n} \cap (x_1, ..., x_s) = (x_1, ..., x_s)I^{n-1}$.

قضیه ۶.۵. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی از بعد d و I یک ایده‌آل R $\mathfrak{m}$–اولیه باشد. فرض کنید $a \in R$ را یک عنصر سطحی I باشد. در اینصورت $\dim R/aR = d - 1$. به‌علاوه اگر $d = 1$، آنگاه (a) یک تقلیل I است.

قضیهٔ ۷.۵، ارتباط مفاهیم تقلیل مینیمال یک ایده‌آل و دنباله سطحی را نشان می‌دهد.

قضیه ۷.۵. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی از بعد d و I یک ایده‌آل R باشد. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_d$ یک دنباله سطحی I باشد. در اینصورت $J = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ یک تقلیل مینیمال I است [۲۴].

همچنین، ورما تلاش کرده است عکس قضیهٔ ۷.۵ را اثبات کند. می‌توان نتیجه تلاش او را در قضیهٔ ۸.۵ دید [۲۴].

قضیه ۸.۵. عناصر سطحی و چند جمله‌ای‌های هیلبرت $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی کوهن–مکالی از بعد d با میدان خارج‌قسمتی نامتناهی باشد. فرض کنید J یک تقلیل ایده‌آل $\mathfrak{m}$–اولیه I باشد. در اینصورت J می‌تواند توسط یک دنباله سطحی I تولید شود.

عناصر سطحی و چند جمله‌ای‌های هیلبرت

فرض کنید I یک ایده‌آل $\mathfrak{m}$–اولیه از حلقهٔ موضعی $(R,\mathfrak{m})$ باشد. فرض کنید R دارای میدان خارج قسمتی نامتناهی باشد و $\dim R = d$. در قضیهٔ ۶.۵ دیدیم که اگر a یک عنصر سطحی I باشد، آنگاه $\dim R/aR = d - 1$. در این قسمت ارتباط بین ضرایب هیلبرت I و I/aR را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ یک تابع عددی باشد. عملگر تفاضلی Δ را به صورت $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$ تعریف می‌کنیم. در قضیهٔ ۹.۵ ملاحظه می‌کنیم که دنباله‌های سطحی ابزار استقرایی مناسبی برای مطالعه ضرایب هیلبرت هستند.

قضیه ۹.۵. فرض کنید I یک ایده‌آل $\mathfrak{m}$–اولیه از حلقهٔ موضعی d بعدی $(R,\mathfrak{m})$ باشد. فرض کنید a یک عنصر سطحی I، $\overline{R} = R/(a)$ و $\overline{I} = I/(a)$ باشد. در اینصورت

(۱) $P_{I}(n) = \Delta P_{I}(n) + \lambda(0 : a)$. از اینرو $\dim R/(a) = d - 1$.

[10] Artin-Rees Lemma

(۲) برای $i = \circ, \text{۱}, \ldots, d - \text{۲}$، $e_i(\bar{I}) = e_i(I)$ و $e_{d-\text{۱}}(\bar{I}) = e_{d-\text{۱}}(I) + \lambda(\circ : a)$.

برای مشاهده برهان، ([۲۴] ، قضیهٔ ۵-۱۳) را ببینید.

مثال ۱۰.۵. فرض کنید K یک میدان، x, y, z, w متغیر، $S = K[x, y, z, w]$ حلقه چندجمله‌ای روی میدان K، $R = S/(w^{\text{۳}})$ و $I = (x, y^{\text{۲}}, z^{\text{۲}}, yw, zw)$ باشد. در اینصورت $P_I(t) = \dfrac{\text{۶} + \text{۳}t + \text{۴}t^{\text{۲}} - t^{\text{۳}}}{(\text{۱} - t)^{\text{۳}}}$. بنابراین $e_\circ(I) = \text{۱۲}$ ، $e_\text{۱}(I) = \text{۸}, e_\text{۲}(I) = \text{۱}, e_\text{۳}(I) = -\text{۱}$. همچنین $\operatorname{depth} \operatorname{gr}(I) = \text{۱}$ و $n(I) = \circ$.

مثال ۱۱.۵. فرض کنید K یک میدان، x, y دو متغیر و $S = K[x, y]$ حلقهٔ چندجمله‌ای روی میدان K، $I = (x^{\text{۵}}, y^{\text{۵}}, x^{\text{۴}}y, x^{\text{۲}}y^{\text{۳}})$ باشد. در اینصورت $P_I(t) = \dfrac{\text{۱۹} + \text{۳}t + \text{۳}t^{\text{۲}} - t^{\text{۳}} + t^{\text{۴}}}{(\text{۱} - t)^{\text{۲}}}$. همچنین $\operatorname{depth} \operatorname{gr}(I) = \circ$ و $n(I) = \text{۲}$.

مراجع

[1] S. Abhyankar, Local rings of high embedding dimension, *Amer. J. Math.*, **89** (1967) 1073–1077.

[2] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[3] A. Corso, C. Polini and M. E. Rossi, Depth of associated graded rings via Hilbert coefficients of ideals, *J. Pure Appl. Algebra*, **201** (2005) 126–141.

[4] D. Hilbert, Uber die Tbeorie der algebraiscben Formen, *Math. Ann.*, **36** (1890) 471–534.

[5] S. Huckaba, A d-dimensional extension of a lemma of Huneke's and formulas for Hilbert coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124** (1996) 1393–1401.

[6] S. Huckaba and C.Huneke, Normal ideals in regular rings, *J. Reine Angew. Math.*, **510** (1999) 63–82.

[7] S. Huckaba and T. Marley, Hilbert coefficients and the depths of associated graded rings, *J. London Math. Soc. (2)*, **56** (1997) 64–76.

[8] C. Huneke, Hilbert functions and symbolic powers, *Michigan Math. J.*, **34** (1987) 293–318.

[9] C. Huneke and I. Swanson, *Integral closure of ideals, rings and modules*, Cambridge University Press, 2006.

[10] S. Itoh, Coefficients of normal Hilbert polynomials, *J. Algebra*, **150** (1992) 101–117.

[11] T. Marley, The coefficients of the Hilbert polynomial and the reduction number of an ideal, *J. London Math. Soc.*, **40** (1989) 1–8.

[12] M. P. Murthy, *Commutative Algebra*, **12**, University of Chicago Lecture Notes, 1976.

[13] M. Narita, A note on the coefficients of the Hilbert characteristic functions in semi-regular local rings, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **59** (1963) 269–275.

[14] D. G. Northcott, A note on the coefficients of the abstract Hilbert function, *J. London Math. Soc.*, **35** (1960) 209–214.

[15] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **50** (1954) 145–158.

[16] A. Ooishi, Δ-genera and sectional genera of commutative rings, *Hiroshima Math. J.*, **17** (1987) 361–372.

[17] L. J. Ratliff and D. E. Rush, Two notes on reductions of ideals, *Indiana Univ. Math. J.*, **27** (1978) 929–934.

[18] D. Rees, A-Transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **57** (1961) 8–17.

[19] M. E. Rossi, A bound on the reduction number of a primary ideal, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128** (2000) 1325–1332.

[20] P. Samuel, La notion de multiplicite en algebre et en geometrie algebrique, *J. Math. Pures Appl.*, **30** (1951) 159–274.

[21] G. Valla, *Problems and results on Hilbert functions of graded algebras*, Six Lectures on Commutative Algebra, Edited by J. Elias, J. M. Giral, R. M. Miro'-Roig and S. Zarzuela, Birkh'auser Verlag, 1998.

[22] W. Vasconcelos, Hilbert functions, analytic spread and Koszul homology, *Contemp. Math.*, **159** (1994) 401–422.

[23] M. Vaz Pinto, Hilbert functions and Sally modules, *J. Algebra*, **192** (1996) 504–523.

[24] J. K. Verma, *Hilbert coefficients and depth of the associated graded ring of an ideal*, arXiv:0801.4866 [math.AC].

سید شهاب ارکیان
سنندج، میدان سهره‌وردی، دانشگاه فرهنگیان (پردیس شهید مدرس)
Shahab_Arkian@yahoo.com

سید شهاب ارکیان متولد دی‌ماه ۱۳۵۴ در شهر بیجار است. وی در سال ۱۳۷۸ از دانشگاه کردستان در رشتهٔ دبیری ریاضی فارغ‌التحصیل شده، در سال ۱۳۸۰ مدرک کارشناسی ارشد خود را در رشتهٔ ریاضی محض تحت راهنمایی پروفسور ذاکری از دانشگاه خوارزمی اخذ نمود. ارکیان در سال ۱۳۸۰ به عنوان دبیر ریاضی به استخدام آموزش و پرورش درآمد و در سال ۱۳۸۳ کار خود را به‌عنوان عضو هیئت علمی گروه ریاضی در دانشگاه فرهنگیان کردستان (مرکز تربیت معلم سابق) آغاز کرد. ارکیان در سال ۱۳۹۳ دوره دکتری خود را در دانشگاه کردستان و با راهنمایی دکتر مافی آغاز کرد.

امیر مافی
سنندج، خیابان پاسداران، دانشگاه کردستان، گروه ریاضی
A_Mafi@ipm.ir

امیر مافی متولد دی‌ماه ۱۳۵۳ در شهر سردشت آذربایجان غربی است. وی در سال ۱۳۸۴ دکتری خود را در رشتهٔ ریاضی محض از دانشگاه خوارزمی تحت راهنمایی پروفسور ذاکری اخذ نمود. مافی در سال ۱۳۸۴ به‌عنوان استادیار گروه ریاضی دانشگاه اراک استخدام شد و تا سال ۱۳۸۷ در آن دانشگاه به‌کار خود ادامه داد و از آن پس به استخدام گروه ریاضی دانشگاه کردستان درآمد. اکنون وی دانشیار گروه ریاضی دانشگاه کردستان می‌باشد.