

حدس‌های زیبا در نظریه گراف**

آدریان باندی

مترجمان: سعید علیخانی*، سمیه جهری و علی نوروزی

چکیده. به طور قطع، هر آنچه که در ریاضیات مطرح می‌شود الزاماً زیبا نیست. اما با باور به این‌که زیبایی در بطن بهترین قسمت‌های ریاضی قرار دارد، تلاش می‌کنیم تا برخی از بهترین حدس‌های مربوط به نظریه‌ی گراف را گردآوری کنیم که با ملاک‌های مختلف زیبایی جور در بیایند.

۱- حدس زیبا چیست؟

الگوهای ریاضی‌دان باید مانند الگوهای یک شاعر و یا یک نقاش زیبا باشد. ایده‌ها باید همانند رنگ‌ها یا کلمات در طرحی موزون با هم هماهنگی داشته باشند. زیبایی اولین آزمون است. در این دنیا جایی برای ریاضیات زشت وجود ندارد.

برای عده‌ی کثیری از ریاضی‌دانان یکی از جذابیت‌های اصلی نظام ریاضی زیبایی ذاتی ساختاری و همچنین رابطه‌ی شگفت‌انگیز میان این ساختارهاست. بدین لحاظ ریاضیات را می‌توان با موسیقی و یا دقیق‌تر با معماری مقایسه کرد. با این وجود، ریاضیات جدا از این نظام‌هاست چرا که در ریاضیات اعلی‌حس‌های غریزی، مطلق و دقیق وجود دارد. در واقع، بسیاری از کسانی که با ریاضیات سر و کار دارند آن را به عنوان یک فعالیت مبتکرانه و مکتشفانه می‌پندارند. پال اردوش^۲ (اگرچه به نوبه‌ی خود ملحد بود) نیز با دیدگاه بالا موافق بود. دیدگاه او در این مورد در بخشی از کتاب نگهداری شده نزد S.F.^۳ آمده است؛ در این کتاب زیباترین اثبات‌های تمامی قضیه‌ها جمع‌آوری شده است (رساله‌ی زیبای نوشته شده توسط ایگنر^۴ و زیگلر^۵ را ببینید). در مجموع، بدون تردید ریاضیات به همان اندازه که یک فعالیت علمی است، جست و جویی برای زیبایی نیز هست و با این نگرش، ریاضیات کوششی است برای رسیدن به کمال، تلاشی است برای توصیف یک دنیای ایده‌آل، و یا حتی هستی ایده‌آل.

به طور قطع، هر آنچه که در ریاضیات مطرح می‌شود الزاماً زیبا نیست. اما با باور به این‌که زیبایی در بطن بهترین قسمت‌های ریاضی قرار دارد، تلاش کردیم تا برخی از بهترین حدس‌های مربوط به نظریه‌ی گراف را گردآوری کنیم که

عبارات و کلمات کلیدی. گراف، حدس، زیبا.

*نویسنده مسئول: سعید علیخانی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۴/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۱/۱۹

**این مقاله ترجمه مقاله با مشخصات زیر است:

A. Bondy, Beautiful conjectures in graph theory, *European Journal of Combinatorics*, 37 (2014) 4–23.

¹G. H. Hardy ²P. Erdős ³Supreme Fascist — God, in the idiosyncratic language of Erdős, borne of a lifetime of observation and experience. ⁴Aigner ⁵Ziegler

با ملاک‌های مختلف زیبایی جور در بیایند. البته حدس‌های انتخاب شده، همانند معیارهای زیبایی‌شناسی کاملاً دلخواه بوده است. همچنین، کاملاً روشن است که این مجموعه به هیچ وجه کامل نیست؛ زیرا ممکن است برخی از حدس‌ها را سهواً حذف کرده و یا نادیده گرفته باشیم. در این جا هدف ما، باز کردن بحث و تمرکز بر روی این جنبه‌های ضروری ریاضیات است.

مراجع

[1] M. Aigner and G. Ziegler, *Proofs from the Book*, Including illustrations by Karl H. Hofmann. Third edition. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

۲- برخی ملاک‌های زیبایی‌شناسی در ریاضیات

ریاضیات، با نگاهی درست، هم در بردارنده‌ی حقیقت است و هم زیبایی؛ زیبایی سرد و ساده‌ی یک تندیس.

”برتراند راسل^۶“

ملاک‌های ما برای انتخاب حدس‌ها، موارد زیر بوده‌اند که هر کدام از آن‌ها شمایی از یک بحث کلی را نشان می‌دهد.

- سادگی: کوتاهی، بیان ساده و قابل فهم به کمک مفاهیم پایه‌ای.
 - شگفتی: ارتباط میان مفاهیم به ظاهر متفاوت.
 - کلیت: معتبر بودن برای طیف گسترده‌ای از موضوع‌ها.
 - مرکزیت: ارتباط تنگاتنگ با تعدادی از قضیه‌ها و یا حدس‌های موجود.
 - قدمت: حداقل بیست سال مطرح شده باشد.
 - زاینده‌گی: تلاش برای حل حدس باید منجر به مفاهیم جدید یا تکنیک‌های اثبات جدید شده باشد.
- به طور طبیعی، می‌توان این ملاک‌های زیبایی را برای قضیه‌ها نیز به کار برد؛ با این تفاوت که باید بندهای زاینده‌گی و قدمت را با بندهای زیر عوض کرد:

- زاینده‌گی: تعمیم‌ها و یا بسط‌های جالب از آن الهام شده باشد.
 - صحت: یک قضیه‌ی زیبا باید درست باشد.
- همچنین می‌توان ملاک‌های مشابه زیر را برای زیبایی اثبات‌ها در نظر گرفت:
- ظرافت: ترکیبی از سادگی و شگفتی.
 - ابتکار و خلاقیت: استفاده‌ی خلاقانه از تکنیک‌های استاندارد.
 - اصالت: معرفی تکنیک‌های جدید اثبات.
 - زاینده‌گی: الهام‌بخش اثبات‌های جدید برای قضیه‌های موجود باشد و یا منجر به تکنیک‌های جدید اثبات شود.
 - صحت: یک اثبات زیبا (ترجیحاً) باید درست باشد.

یک اثبات ظریف و زیبا، اثباتی است که به سادگی به ذهن خطور نکند، همانند یک مسأله‌ی ظریف و زیبای شطرنج: در ظاهر باید مهم‌ل به نظر برسد.

”کلاود برگ^۷“

^۶Bertrand Russell ^۷Claude Berge



شکل ۱: کلاود برگ

۳- گردایه‌ای از حدس‌های زیبا

در ادامه فهرست انتخابی ما از حدس‌های زیبا در نظریه گراف، که بر اساس محتوا دسته بندی شده، بدون هیچ ترتیب خاصی مطرح می‌شوند. هر مطلب همراه با توضیحی مختصر است و به هر حدس رتبه‌ای (از صفر ستاره تا سه ستاره) بنا بر ملاک‌های گفته شده، داده‌ایم. جدا از ملاک قدمت (یک ستاره برای هر بیست سال) این رتبه‌بندی‌ها کاملاً آزادانه صورت گرفته و قابل بازبینی هستند. در آخر هر بخش، یک یا دو نتیجه اصلی هر حدس به همراه چند مرجع برای مطالعه بیشتر ذکر شده که این مراجع به ترتیب زمانی مرتب شده‌اند. این مراجع برای ارجاع مستقیم خواننده به بحث مربوطه تهیه شده‌اند. توضیحاتی که در اول هر بخش آمده است، صرفاً برای کامل‌تر شدن مطلب بوده و برای کسی که با نظریه‌ی گراف آشنایی دارد کاملاً واضح هستند. همچنین برخی از تعاریف هم صرفاً برای کامل بودن مطلب ارائه شده، بقیه‌ی تعاریف را نیز می‌توان در هر کتاب پایه‌ای نظریه‌ی گراف مانند "کتاب نظریه گراف باندی و مورتی"^۸ یافت.

۴- بازسازی گراف

یک زیرگراف رأس-حذفی یک گراف، زیرگرافی است که از حذف کردن یک رأس به دست می‌آید. گراف H را یک بازسازی گراف G گویند هرگاه $V(H) = V(G)$ و برای هر $v \in V(G)$ داشته باشیم $H - v \cong G - v$. یک گراف توسط زیرگراف‌های رأس-حذفی خود قابل بازسازی است اگر هر بازسازی آن با گراف یکرخت باشد. به طور مشابه، قابلیت بازسازی توسط زیرگراف‌های یال-حذفی نیز تعریف می‌شود. حدس بازسازی هنگام بررسی فضاهاى متریک به وسیله‌ی اولام^۹ و دانشجوی دکترایش کلی^{۱۰} مطرح شد. ثابت شده که جمع‌آوری میزان اطلاعاتی که زیرگراف‌های رأس-حذفی به ما می‌دهند کار بسیار دشواری است. روش‌های شمارش بسیار مفید واقع شده‌اند، تقارن‌های گراف نیز در این بحث استفاده می‌شوند. در وهله اول، مسئله‌ی زیرگراف‌های یال-حذفی تقریباً واضح به نظر می‌رسد اما ثابت شده که ورود به این حیطه نیز به همان اندازه دشوار و پیچیده است. از سوی دیگر، همان‌گونه که گرینول^{۱۱} نشان داد، مسئله‌ی اخیر (به طور رسمی) سخت‌تر از حدس بازسازی نبوده و در واقع، در این زمینه پیشرفت‌هایی نیز صورت گرفته است. نتیجه: یا باید به دنبال یک مثال نقض برای حدس بازسازی رأس-حذفی بود و یا باید نسخه‌ی یال-حذفی را اثبات کرد.

^۸J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics 244, Springer, 2008. ^۹S. M. Ulam ^{۱۰}P. J. Kelly

^{۱۱}D. L. Greenwell

هشدار: نسخه‌ی رأسی برای گراف‌های جهت‌دار و هر دو نسخه‌ی یالی و رأسی برای گراف‌های نامتناهی نادرست هستند. هالین^{۱۲} مشابه حدس بازسازی را برای گراف‌های نامتناهی تعمیم داده است. یک مسأله جذاب دیگر (و شاید ساده‌تر) حدس بازسازی سوئیچینگ (تعویضی) است که توسط استنلی^{۱۳} مطرح شده است. حدس بازسازی: هر گراف ساده با حداقل سه رأس توسط زیرگراف‌های رأس-حذفی‌اش قابل بازسازی است.

”کلی و اولام، ۱۹۴۲“

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**		***		***	*

• این حدس برای گراف‌های جهت‌دار نادرست است: خانواده‌های نامتناهی از تورنمنت‌های غیر قابل بازسازی وجود دارند.

”استاکمیر^{۱۴}، ۱۹۷۷“

حدس بازسازی یالی: هر گراف ساده با حداقل چهار یال توسط زیرگراف‌های یال-حذفی‌اش قابل بازسازی است.

”هراری^{۱۵}، ۱۹۶۴“

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***		***		**	*

• این حدس برای گراف‌های با n رأس که بیشتر از $n \log n$ یال دارند درست است.

”مولر^{۱۶}، ۱۹۷۷“

حدس بازسازی هالین: هر بازسازی یک گراف نامتناهی با یک زیرگراف القایی از آن گراف یکرخت است.

”هالین، ۱۹۷۰“

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**		***		*	

سوئیچ کردن یک رأس گراف ساده به این معنی است که مجموعه‌ی همسایه‌ها و غیرهمسایه‌های آن را با هم عوض کنیم. به گرافی که با این عمل به دست آید، گراف رأس-سوئیچینگ (رأس-تعویضی) گفته می‌شود. (برای مثال عمل سوئیچینگ روی هر رأس گراف تهی چهار رأسی، گراف ستاره $K_{1,3}$ را نتیجه می‌دهد.



شکل ۲: فرانک هراری

¹²R. Halin ¹³R.P. Stanley ¹⁴P. J. Stockmeyer ¹⁵F. Harary ¹⁶V. Müller

حدس بازسازی سوئیچینگ (تعویضی): هر گراف ساده با پنج یا بیشتر از پنج رأس توسط گراف‌های رأس-سوئیچینگ خود قابل بازسازی است.

”استنلی، ۱۹۸۵“

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**	*	***		*	*

• این حدس برای گراف‌های n رأسی که در آن‌ها $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ درست است. ”استنلی، ۱۹۸۵“

مراجع

- [1] P. J. Kelly, *On Isometric Transformations*, Ph. D. thesis, University of Wisconsin, 1942.
- [2] S. M. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*, Wiley (Interscience), New York, 1960 pp. 29.
- [3] F. Harary, *On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs*, Theory of Graphs and its Applications (Proc. Sympos. Smolenice, 1963, ed. M. Fiedler.), Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague, 1964, 47–52; reprinted by Academic Press, New York.
- [4] C. Thomassen, Counterexamples to the Edge Reconstruction Conjecture for infinite graphs, *Discrete Math.*, **19** (1977) 293–295.
- [5] R. P. Stanley, Reconstruction from vertex-switching, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **38** (1985) 132–138.
- [6] M. N. Ellingham, Recent progress in edge reconstruction, *Congressus Numerantium*, **62** (1988) 3–20.
- [7] J. A. Bondy, *A graph reconstructor's manual*, in Surveys in Combinatorics. Proc. 13th. British Combinatorial Conf., London Math. Soc. Lecture Notes Series 166 (ed. A. D. Keedwell), Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [8] L. Babai, *Automorphism groups*, isomorphism, reconstruction. Chapter 27 of the Handbook of Combinatorics (R. L. Graham, M. Grtschel and L. Lovsz, eds.), North-Holland–Elsevier, 1995 1447–1540.
- [9] J. Lauri and R. Scapellato, Topics in Graph Automorphisms and Reconstruction, *London Math. Soc. Student Texts*, **54** Cambridge University Press, 2003.

۵- تجزیه‌های گراف‌ها

یک تجزیه از گراف، خانواده‌ای از زیرگراف‌هاست که مجموعه‌های یالی آن‌ها، مجموعه‌ی یالی گراف را افزای می‌کنند. تجزیه‌های گراف در بسیاری از زمینه‌های ترکیبیات ظاهر می‌شوند. برای مثال می‌توان به سیستم‌های سه‌گانه‌ی اشتاینر^{۱۷} اشاره کرد که تجزیه‌ای از گراف کامل به مثلث‌ها است. هر سه حدس زیر در یک سال مطرح شده‌اند، این سه حدس درباره‌ی تجزیه به مسیرها و مدارها بوده که شاید جزو پایه‌ای‌ترین زیرگراف‌ها (همراه با تطابق‌ها و درخت‌ها) به شمار می‌آیند. گراف‌هایی که درجه‌ی هر رأس آن‌ها فرد است و همچنین گراف‌های کامل از مرتبه فرد، مقدار کران روی تعداد مسیرها در حدس گالای^{۱۸} را اختیار می‌کنند. حدس هاجوز^{۱۹} به سادگی، نسخه تعمیم یافته‌ی قضیه‌ی وبلن^{۲۰} است که می‌گوید: هر گرافی را که درجه‌ی رأس‌هایش زوج باشد می‌توان به مدارها تجزیه کرد. با فرض درستی حدس هاجوز، گراف‌های کامل از مرتبه فرد قابل تجزیه به مدارها هستند. حدس کلی به طور مستقیم به این مطلب اشاره دارد که گراف‌های کامل از مرتبه فرد قابل تجزیه به مدارهای هامیلتونی هستند.

حدس گالای: هر گراف ساده‌ی همبند با n رأس را می‌توان حداکثر به $\frac{1}{2}(n+1)$ مسیر تجزیه کرد.

”گالای، ۱۹۶۸“

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***		***	*	*	**

¹⁷Steiner ¹⁸T. Gallai ¹⁹G. Hajós ²⁰Veblen



شکل ۳: تیر گالای

- این حدس برای گراف‌هایی که درجه‌ی هر رأس آن‌ها فرد است درست است. “لواش^{۲۱}، ۱۹۶۸”
- هر گراف ساده‌ی همبند با n رأس را می‌توان حداکثر به $\frac{2}{3}n$ مسیر تجزیه کرد. “دونالد^{۲۲}، ۱۹۸۰”
- یک گراف زوج است اگر درجه‌ی هر رأس آن زوج باشد.
- حدس هاجوز: هر گراف ساده‌ی زوج با n رأس را می‌توان حداکثر به $\frac{1}{2}(n-1)$ مدار تجزیه کرد. “هاجوز، ۱۹۶۸”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***		*	*	*	**

- این حدس برای گراف‌های مسطح درست است. “جیانگ^{۲۳}، ۱۹۸۴”
- این حدس برای گراف‌های با ماکزیمم درجه چهار درست است. “فوارون و کویدر^{۲۴}، ۱۹۸۸”
- حدس کلی: هر تورنمنت منتظم را می‌توان به دورهای هامیلتونی جهت‌دار تجزیه کرد. “کلی، ۱۹۶۸”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	***	*	*	*	*

- ادعا شده که این حدس برای تورنمنت‌های بسیار بزرگ درست است. “هاگکیست^{۲۵}، منتشر نشده”

مراجع

- [1] L. Lovász, *On covering of graphs*, in Theory of Graphs (P. Erdős and G. Katona and eds.), Academic Press, New York, 1968, 231–236.
- [2] J. W. Moon, *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968, p. 7.
- [3] A. Donald, An upper bound for the path number of a graph, *J. Graph Theory*, **4** (1980) 189–201.
- [4] T. Jiang, Hajós conjecture is true for planar graphs, *J. China Univ. Sci. Tech.*, **14** (1984) 585–592.
- [5] O. Favaron and M. Kouider, Path partitions and cycle partitions of eulerian graphs of maximum degree 4, *Studia Sci. Math. Hungarica*, **23** (1988) 237–244.

²¹L. Lovász ²²A. Donald ²³T. Jiang ²⁴O. Favaron and M. Kouider ²⁵R. Häggkvist

۶- پوشش‌های دوتایی گراف‌ها

یک پوشش دوتایی برای یک گراف، خانواده‌ای از زیرگراف‌هاست که با هم هر یال را دقیقاً دو بار پوشش می‌دهند. پوشش‌های چهارتایی و شش‌تایی نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. انگیزه‌های متفاوتی برای مطالعه‌ی پوشش‌های دوتایی وجود دارد. در ابتدا باید توجه کرد که مفهوم پوشش یک گراف راهی برای درک و ساده‌تر کردن مسئله تجزیه گراف‌هاست. طبیعی است بررسی کنیم که اگر یک گراف تجزیه (برای نمونه به مدارها یا تطابق‌های کامل) نداشته باشد آیا یک پوشش دوتایی دارد. در مورد مدارها این طرز فکر ما را مستقیماً به سمت حدس پوشش دوتایی مداری و تعمیم آن یعنی حدس پوشش دوتایی مداری کوچک و در حالت تطابق کامل ما را به سمت حدس پوشش دوتایی تطابق کامل هدایت می‌کند. سیمور^{۲۶} به این بحث از زاویه‌ای کاملاً متفاوت توجه کرده است؛ وی به حدس پوشش دوتایی مداری به صورت یک حالت خاص و جذاب از یک حدس کلی‌تر برای پوشش مداری گراف‌ها نگریسته است. قبل از او نیز تات^{۲۷} (منتشر نشده) و شکرز^{۲۸} در خلال کار بر روی نشانیدن گراف‌ها این حدس را برای گراف‌های مکعبی بیان کرده بودند. حدس پوشش دوتایی دوری ریشه در رنگ‌آمیزی وجهی نقشه‌ها دارد. در واقع این مطلب از حدسی به نظر حل نشدنی درباره‌ی نشانیدن گراف‌ها، که توسط آرکدیکن^{۲۹} و جاگر^{۳۰} به طور مستقل مطرح شده، نتیجه می‌شود. حدس پوشش دوتایی مداری: هر گراف ۲- یال همبند یک پوشش دوتایی از مدارها دارد. “شکرز، ۱۹۷۳ و سیمور، ۱۹۷۹”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	**	***	***	*	***

• در صورت نادرست بودن این حدس، گراف مینیمال مورد نظر (به عنوان مثال نقض) باید دارای کم‌ری حداقل به طول ده باشد.

حدس پوشش دوتایی مداری کوچک: هر گراف ساده‌ی ۲- یال همبند n رأسی، یک پوشش دوتایی با حداکثر $n - 1$ مدار دارد. “گودین^{۳۱}، ۱۹۸۸”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	**	***	**		*

• این حدس برای گراف‌هایی که برخی از رئوس آن‌ها با همه‌ی رئوس دیگر مجاور باشد درست است.

“لی^{۳۲}، ۱۹۹۰”

حدس پوشش دوتایی دوری: هر گراف ۲- یال همبند، یک پوشش دوتایی توسط حداکثر پنج زیرگراف زوج دارد. “پریسمان^{۳۳}، ۱۹۸۱”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	***	***	**	*	*

• این حدس برای گراف‌های ۴- یال همبند درست است. “کیل‌پاتریک^{۳۴}، ۱۹۷۵ و جاگر، ۱۹۷۶”

حدس نشانیدن قوی: هر گراف ۲- یال همبند را می‌توان بر روی برخی سطح‌های جهت‌دار به گونه‌ای نشانید که نقشه‌ی حاصل پنج- وجه رنگ‌پذیر باشد. “آرکدیکن، ۱۹۸۴ و جاگر، ۱۹۸۵”

²⁶P. D. Seymour ²⁷W. T. Tutte ²⁸G. Szekeres ²⁹D. Archdeacon ³⁰F. Jaeger ³¹L. A. Goddyn ³²H. Li ³³M. Preissmann

³⁴P. A. Kilpatrick

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زایندهگی
**	**	***	***	*	

حدس پوشش دوتایی تطابق: هر گراف مکعبی ۲- یال همبند یک پوشش دوتایی از شش تطابق کامل دارد.
 ”فولکرسن^{۳۵}، ۱۹۷۱“

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زایندهگی
***	*	**	*	*	*

• هر گراف مکعبی ۲- یال همبند دقیقاً یک چندپوشش از تطابق‌های کامل دارد. ”ادموندز^{۳۶}، ۱۹۶۵“



شکل ۴: پال سیمور و میرام پرسمان

فرمول‌بندی مجدد:

حدس پوشش چهارتایی دوری: هر گراف ۲- یال همبند یک پوشش چهارتایی از شش زیرگراف زوج دارد.
 ”جاگر، ۱۹۸۵“

• هر گراف ۲- یال همبند یک پوشش چهارتایی از هفت زیرگراف زوج دارد.

”برمند^{۳۷}، جاکسن^{۳۸}، جاگر، ۱۹۸۳“

• هر گراف ۲- یال همبند یک پوشش شش‌تایی از ده زیرگراف زوج دارد. ”فان^{۳۹}، ۱۹۹۲“

مراجع

- [1] J. Edmonds, Maximum matching and a polyhedron with (0,1) vertices, *J. Res. Nat. Bur. Standards Ser. B.*, **8** (1965) 125–130.
- [2] D. R. Fulkerson, Blocking and antiblocking pairs of polyhedra, *Math. Programming*, **1** (1971) 168–194.
- [3] G. Szekeres, Polyhedral decompositions of cubic graphs, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **8** (1973) 367–387.
- [4] P. D. Seymour, *Sums of circuits*, in Graph Theory and Related Topics (J. A. Bondy, U. S. R. Murty and eds.), Academic Press, New York, 1979 341–355.
- [5] M. Preissmann, *Sur les colorations des arêtes des graphes cubiques*, Thèse de doctorat de 3ème cycle, Université de Grenoble, 1981.
- [6] J. C. Bermond, B. Jackson and F. Jaeger, Shortest coverings of graphs with cycles, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **35** (1983) 297–308.
- [7] D. Archdeacon, Face colorings of embedded graphs, *J. Graph Theory*, **8** (1984) 387–398.
- [8] F. Jaeger, *A survey of the cycle double cover conjecture*, in Cycles in Graphs (B. R. Alspach and C. D. Godsil and eds.), Ann. Discrete Math., **27**, North-Holland, Amsterdam, 1985 1–12.

³⁵R. D. Fulkerson ³⁶J. Edmonds ³⁷J. C. Bermond ³⁸B. Jackson ³⁹G. Fan

- [9] J. A. Bondy, *Small cycle double covers of graphs*, in *Cycles and Rays* (G. Hahn, G. Sabidussi, R. Woodrow and eds.), NATO ASI Ser. C, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990 21–40.
- [10] H. Li, Perfect path double covers in every simple graph, *J. Graph Theory*, **14** (1990) 645–650.
- [11] G. Fan, Integer flows and cycle covers, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **54** (1992) 113–122.
- [12] C. Q. Zhang, *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1997.

۷- جریان‌های صحیح در گراف‌ها

یک k -جریان (هیچ جا صفر) روی یک گراف جهت‌دار، تخصیص یک عدد صحیح ناصفر میان دو عدد $(k-1)$ و $k-1$ به هر کمان است به طوری که در هر رأس، حاصل جمع مقادیر کمان‌های ورودی و خروجی مساوی باشند. گوئیم یک گراف یک k -جریان دارد اگر برخی (بنابراین هر) جهت‌دهی‌ها به گراف این چنین جریانی داشته باشند. مفهوم جریان عدد صحیح در کارهای تات مطرح شد، او مشاهده کرد وقتی گرافی بر روی یک سطح نشانده شود، یک رنگ‌آمیزی وجهی برای آن نقشه، متناظر با جریانی صحیح روی گراف است. وی سه حدس مشهور را فرمول‌بندی کرد که منجر به تعمیم سه قضیه بسیار مهم در مورد گراف‌های مسطح شده است که این سه قضیه عبارتند از: قضیه پنج-رنگ، قضیه چهار-رنگ (در آن زمان به صورت حدس بوده است) و قضیه سه-رنگ گروتز.^{۴۰} حدس پنج-جریان: هر گراف ۲-یال همبند یک ۵-جریان دارد. “تات، ۱۹۵۴”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	***	***	***	**	***

- هر گراف ۲-یال همبند یک ۶-جریان دارد. “سیمور، ۱۹۸۱”
- . مینور یک گراف، گرافی است که از حذف کردن رأس، حذف کردن یال و انقباض یال در گراف اصلی به دست می‌آید. حدس چهار-جریان: هر گراف ۲-یال همبند فاقد مینور پترسن، یک ۴-جریان دارد. “تات، ۱۹۶۶”



شکل ۵: ویلیام تات

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	***	**	**	**	*

⁴⁰Grötzsch

- هر گراف مکعبی ۲- یال همبند فاقد مینور پترسن، یک ۴- جریان دارد.
”رابرت سن^{۴۱}، سیمور، توماس^{۴۲}، منتشر نشده“

”تات، ۱۹۷۲“

حدس سه- جریان: هر گراف ۴- یال همبند یک ۳- جریان دارد.

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده
***	***	**	**	*	

”جاگر، ۱۹۷۶“

- هر گراف ۴- یال همبند یک ۴- جریان دارد.

صورت ضعیف تر:

حدس سه- جریان ضعیف: عدد صحیحی مانند k وجود دارد به طوری که هر گراف k - یال همبند یک ۳- جریان دارد.
”جاگر، ۱۹۷۶“

مراجع

- [1] W. T. Tutte, A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canadian J. Math.*, **6** (1954) 80–91.
- [2] P. D. Seymour, Nowhere-zero 6-flows, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **30** (1979) 130–135.
- [3] F. Jaeger, *Nowhere-zero flow problems*, in Selected Topics in Graph Theory, L. W. Beineke, R. J. Wilson and eds., Academic Press, 1988 71–95.
- [4] P. D. Seymour, *Nowhere-zero flows*, in Handbook of Combinatorics, (R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász and eds.), North-Holland, 1995 289–299.
- [5] C. Q. Zhang, *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1997.



شکل ۶: به ترتیب از چپ، پال اردوش، لازلو لواش و نوگا آلون

۸- رنگ آمیزی رأسی گراف ها

مفهوم رنگ آمیزی در نظریه گراف نیز مطرح شده و سؤالات بسیاری را می توان در قالب مسائل رنگ آمیزی فرمول بندی کرد. تعداد زیادی از این سؤالات در کتاب ”مسائل رنگ آمیزی گراف“ نوشته ی جنسن^{۴۳} و تافت^{۴۴} مورد بحث قرار گرفته اند. ما در این جا خود را به تعدادی از این حدس ها محدود می کنیم که ساده و مشهور هستند. دو حدس اول به تفصیل در مقاله ای توسط رومرو^{۴۵} و سانچز-آروئو^{۴۶} بحث شده اند که این مقاله در شماره ۳۷ مجله مربوط به چاپ مقاله اصلی این متن موجود است.^{۴۷} ما در این جا فقط آن ها را بیان و بر اساس ملاک های زیبایی درجه بندی می کنیم. دوتای دیگر حدس های مشهور و قدیمی هستند.

⁴¹N. Robertson ⁴²R. Thomas ⁴³T. Jensen ⁴⁴B. Toft ⁴⁵D. Romero ⁴⁶A. Sánchez-Arroyo ⁴⁷European Journal of Combinatorics, Vol. 37

هشدار: اثبات حدس هادویگر^{۴۸} غیربديهی است. اگر $k = 4$ باشد، همان قضیه‌ی چهار-رنگ نتیجه می‌شود. از سوی دیگر، ایده اثبات این حدس، به فرض درستی برای گراف‌هایی با عدد پایداری دو (از این رو عدد رنگی بزرگ) تنظیم می‌شود.

حدس اردوش-فابر-لواش: هر گرافی را که بتوان به k گراف کامل با رأس تجزیه کرد، k -رنگ پذیر است. "اردوش، فابر^{۴۹}، لواش، ۱۹۷۲"

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
*	**	*		*	*

حدس آلن-ساکس-سیمور: هر گرافی را که بتوان به $k-1$ گراف دوبخشی کامل تجزیه کرد، k -رنگ پذیر است. "آلن^{۵۰}، ساکس^{۵۱}، سیمور، ۱۹۹۴"

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**	*	***	*		

• این حدس برای گراف‌های کامل درست است. "گراهام^{۵۲}، پالک^{۵۳}، ۱۹۷۱ و تیوربرگ^{۵۴}، ۱۹۸۲"

حدس هادویگر: گرافی که K_{k+1} - مینور نداشته باشد، k -رنگ پذیر است. "هادویگر، ۱۹۴۳"

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**	*	***	**	***	**

• این حدس برای $k \leq 5$ درست است. "اپل^{۵۵}، هاکن^{۵۶}، ۱۹۷۷ و رابرتسن^{۵۷}، سیمور، توماس، ۱۹۹۳"

• گراف فاقد K_{k+1} - مینور را می‌توان با حداکثر $ck\sqrt{\log k}$ رنگ، رنگ آمیزی کرد که در آن c عددی ثابت است. "کاستوشکا^{۵۸}، ۱۹۸۲، توماسون^{۵۹}، ۱۹۸۴"

ضرب ضعیف گراف‌های G و H را با $G \times H$ نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی رأس‌های این گراف $V(G) \times V(H)$ و مجموعه‌ی یال‌های آن $\{(u, u'), (v, v') : (u, v) \in E(G), (u', v') \in E(H)\}$ می‌باشد.

حدس هدتنیمی: عدد رنگی رأسی حاصل ضرب ضعیف دو گراف برابر است با کوچکترین عدد رنگی آن‌ها، به عبارت دیگر: $\chi(G \times H) = \min\{\chi(G), \chi(H)\}$ "هدتنیمی^{۶۰}، ۱۹۶۶"

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**	**	*	*	**	*

• $\chi(G \times H) \leq \min\{\chi(G), \chi(H)\}$ "هدتنیمی، ۱۹۶۶"

• اگر $\min\{\chi(G), \chi(H)\} \leq 4$ ، حدس درست است. "الزهر^{۶۱}، ساور^{۶۲}، ۱۹۸۵"

مراجع

- [1] H. Hadwiger, Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe, *Vierteljschr. Naturforsch. Gesellsch. Zürich*, **88** (1943) 133–142.
- [2] S. Hedetniemi, *Homomorphisms of graphs and automata*, Technical Report 03105-44-T, University of Michigan, 1966.
- [3] R. L. Graham and H. O. Pollak, On the addressing problem for loop switching, *Bell System Tech. J.*, **50** (1971) 2495–2519.
- [4] K. Appel and W. Haken, A solution of the four-color map problem, *Sci. Amer.*, **237** (1977) 108–121.
- [5] H. Tverberg, On the decomposition of K_n into complete bipartite graphs, *J. Graph Theory*, **6** (1982) 493–494.

⁴⁸H. Hadwiger ⁴⁹V. Faber ⁵⁰N. Alon ⁵¹M. Saks ⁵²R. L. Graham ⁵³H. O. Pollak ⁵⁴H. Tverberg ⁵⁵K. Appel ⁵⁶W. Haken ⁵⁷N. Robertson ⁵⁸A. V. Kostochka ⁵⁹A. Thomason ⁶⁰S. Hedetniemi ⁶¹M. El-Zahar ⁶²N. Sauer

- [6] M. El-Zahar and N. Sauer, The chromatic number of the product of two 4-chromatic graphs is 4, *Combinatorica*, **5** (1985) 121–126.
- [7] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Hadwiger's conjecture for K_6 -free graphs, *Combinatorica*, **13** (1993) 279–361.
- [8] T. R. Jensen and B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley Interscience, 1995.
- [9] B. Toft, A survey of Hadwiger's Conjecture, in *Surveys in Graph Theory* (G. Chartrand and M. S. Jacobson, eds.), *Congressus Numerantium*, **115** (1996) 249–283.
- [10] X. Zhu, A survey on Hedetniemi's conjecture, *Taiwanese J. Math.*, **12** (1998), 1–24.
- [11] N. Sauer, Hedetniemi's conjecture — a survey, *Discrete Math.*, **229** (2001), 261–292.
- [12] A. Thomason, The extremal function for complete minors, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **81** (2001) 318–338.
- [13] D. Romero and A. Sánchez-Arroyo, *Advances on the Erdős–Faber–Lovász Conjecture*, this volume.

۹- رنگ آمیزی یالی گرافها

یک گراف k -لیست رنگ پذیر است هرگاه بتوان به رئوس آن لیست های k -رنگی اختصاص داد. هر رنگ از هر لیست را می توان طوری انتخاب کرد که یک رنگ آمیزی رأسی سره برای گراف حاصل شود. به طور مشابه، k -لیست رنگ پذیری یالی نیز تعریف می گردد.

رنگ آمیزی لیستی و رنگ آمیزی یالی لیستی در دهه ی ۱۹۷۰ توسط چند نویسنده مطرح شدند. در ابتدا تصور می شد که رنگ آمیزی k -لیستی حداقل به سادگی k -رنگ آمیزی باشد، اما تأملی کوتاه آشکار می کند که عکس این مطلب صحیح است. در واقع گراف های دوبخشی کامل بزرگ که ۲-رنگ پذیر هستند، فقط برای k های بزرگ k -رنگ پذیرند. از سوی دیگر طبق یک حدس باور بر این است که رنگ آمیزی یالی لیستی سخت تر از رنگ آمیزی یالی نیست. حدس رنگ آمیزی یالی لیستی: هر گراف ساده ی k -یال رنگ پذیر، یک گراف k -لیست یال رنگ پذیر است.

”ویزینگ^{۶۳}، ۱۹۷۵“

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده گی
**	***	***	*	*	**

- این حدس برای گراف های دوبخشی (چندبخشی) درست است.
- هر گراف ساده ی k -رنگ پذیر یالی $(k + O(k))$ -لیست یال رنگ پذیر است.

”گالوین^{۶۴}، ۱۹۹۵“

”کاهن^{۶۵}، ۱۹۹۶“

مراجع

- [1] B. Bollobás and A. J. Harris, List colourings of graphs, *Graphs Combin.*, **1** (1985) 115–127.
- [2] F. Galvin, The list chromatic index of a bipartite multigraph, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **63** (1995) 153–158.
- [3] J. Kahn, Asymptotically good list-colorings, *J. Combin. Theory Ser. A.*, **73** (1996) 1–59.

۱۰- رنگ آمیزی کلی گرافها

رنگ آمیزی کلی (سره) یک گراف، تخصیص رنگ ها به رئوس و یال های آن است به طوری که هیچ دو رأس مجاور، هیچ دو یال مجاور و هیچ رأس و یال واقع بر آن رنگ یکسان نداشته باشند.

برای گراف ساده با ماکزیمم درجه ی Δ ، قضیه ی بروکس تضمین می کند که یک رنگ آمیزی رأسی حداکثر $\Delta + 1$ رنگی است و قضیه ی ویزینگ تضمین می کند که یک رنگ آمیزی یالی این گراف حداکثر با $\Delta + 1$ رنگ امکان پذیر است. رنگ آمیزی هم زمان یال و رأس بسیار پیچیده تر است. حدس رنگ آمیزی کلی ادعا می کند که تنها یک رنگ اضافی نیاز است تا به چنین رنگ آمیزی دست یابیم.

⁶³V. G. Vizing ⁶⁴F. Galvin ⁶⁵J. Kahn

حدس رنگ‌آمیزی کلی: هر گراف ساده با ماکزیمم درجه‌ی Δ ، یک رنگ‌آمیزی کلی با $2 + \Delta$ رنگ دارد.
 ”بهزاد، ۱۹۶۵ و ویزینگ، ۱۹۶۵“

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**	***	***	*	**	*

• هر گراف ساده با ماکزیمم درجه‌ی Δ ، برای Δ ‌های به اندازه کافی بزرگ، یک رنگ‌آمیزی کلی با $10^{26} + \Delta$ رنگ دارد.
 ”ملوی ^{۶۶} و رید ^{۶۷}، ۱۹۹۸“

مراجع

- [1] M. Behzad, *Graphs and their Chromatic Numbers*, Ph. D. thesis, Michigan State University, 1965.
- [2] V. G. Vizing, Some unsolved problems in graph theory, *Russian Math. Surveys*, **23** (1968) 125–141.
- [3] M. Molloy and B. Reed, A bound on the total chromatic number, *Combinatorica*, **18** (1998) 241–280.

۱۱- مدارها در گراف‌های جهت‌دار

در ادامه فرض شده که گراف‌های جهت‌دار طوقه و کمان چندگانه ندارند. یک قفس، کوچکترین گراف منظم با درجه و کمر داده شده است. منظور از کمر، طول کوتاه‌ترین مدار (دور) در گراف می‌باشد. مشابه همین مطلب، قفس جهت‌دار برای گراف‌های جهت‌دار تعریف می‌شود. در این حالت شرط منظم بودن به تساوی درجات ورودی و خروجی تبدیل شده و همچنین کمر نیز طول کوچک‌ترین مدار (دور) جهت‌دار تعریف می‌شود.

اطلاعات زیادی در مورد قفس‌ها و اطلاعات کمی در مورد قفس‌های جهت‌دار موجود است. بهزاد، کرتاند ^{۶۸} و وال ^{۶۹} حدس زدند گراف‌های جهت‌دار مرتبه‌ی ۱ (به هنگ d) که رئوس آن‌ها را بتوان در یک ترتیب دوری به گونه‌ای مرتب کرد که هر رأس به d رأس بعدی احاطه داشته باشد، قفس‌های جهت‌دار هستند. یک حدس قوی‌تر که در آن شرط درجه‌ی ورودی برداشته شده توسط کاستا ^{۷۰} و هاگوییست ^{۷۱} مطرح شده است. این حدس‌ها هنوز حتی برای گراف‌های جهت‌دار با کمر جهت‌دار چهار نیز حل نشده‌اند. نقطه‌ی قوت دیگر حدس مطرح شده این است که حدس همسایه‌ی دوم سیمور حالت خاصی از حدس بهزاد-کرتاند-وال است.

یکی دیگر از مسئله‌های باز مرتبط که قدمت زیادی دارد، حدس آدام ^{۷۲} در مورد تعداد مدارهای جهت‌دار است. حدس بهزاد-کرتاند-وال: یک قفس جهت‌دار با کمر g و درجات ورودی-خروجی d ، دقیقاً $1 + d(g - 1)$ رأس دارد. ”بهزاد، کرتاند، وال، ۱۹۷۰“

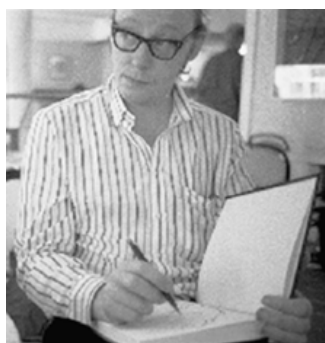
سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**		*	*	*	**

• این حدس برای قفس‌های جهت‌دار رأس انتقالی درست است. ”همیداون ^{۷۳}، ۱۹۸۷“

حدس کاستا-هاگوییست: یک گراف جهت‌دار با کمر g ، که درجه‌ی خروجی هر رأس آن d است حداقل $1 + d(g - 1)$ رأس دارد. ”کاستا، هاگوییست، ۱۹۷۸“

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**		***	**	*	**

⁶⁶M. Molloy ⁶⁷B. Reed ⁶⁸G. Chartrand ⁶⁹C. E. Wall ⁷⁰L. Caccetta ⁷¹R. Häggkvist ⁷²Adám ⁷³Y. O. Hamidoune



شکل ۷: رونالد هاگوییست

- این حدس برای $d \leq 5$ درست است.
- یک گراف جهت‌دار با کمر حداقل چهار که درجه‌ی خروجی هر رأس آن d است، بیشتر از $(3 + \sqrt{7})d/2$ رأس دارد.
- “هوانگ^{۷۴}، رید، ۱۹۸۷”
- “شن^{۷۵}، ۱۹۹۸”
- همسایه‌ی خارجی دوم یک رأس مانند v در یک گراف جهت‌دار رأسی است که فاصله‌اش از v برابر دو است.
- حدس همسایه‌ی دوم: هر گراف جهت‌دار بدون مدارهای به طول دو، رأسی دارد که حداقل به تعداد همسایه‌های خارجی دوم، همسایه‌های خارجی (اول) دارد.
- “سیمور، ۱۹۹۵”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**	**	***	**		*

- این حدس برای تورنمنت‌ها درست است.
- “فیشر^{۷۶}، ۱۹۹۶، هاویت^{۷۷} و توماسه^{۷۸}، ۲۰۰۰”
- برخی رأس‌ها حداقل $6572/5$ برابر تعداد همسایه‌های خارجی دوم، همسایه خارجی دارند.
- “چن^{۷۹}، شن، یاستر^{۸۰}، ۲۰۰۳”
- حدس آدام: هر گراف جهت‌دار با حداقل یک مدار جهت‌دار، یک کمان دارد که با برعکس کردن جهت آن تعداد مدارهای جهت‌دار آن کاهش می‌یابد.
- “آدام، ۱۹۶۴”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	*	***	*	**	

- این حدس برای گراف‌های جهت‌دار با کمان‌های چندگانه نادرست است.
- “گرینبرگ^{۸۱}، ۱۹۸۷، توماسن^{۸۲}، ۱۹۸۷”

مراجع

- [1] A. Adám, Problem 2, in Theory of Graphs and its Applications (M. Fiedler, ed.), Czech. Acad. Sci. Publ., 1964 pp.157.
- [2] M. Behzad, G. Chartrand and C. E. Wall, On minimal regular digraphs with given girth, *Fund. Math.*, **69** (1970) 227–231.
- [3] L. Caccetta and R. Häggkvist, On minimal digraphs with given girth, *Congressus Numerantium*, **21** (1978) 181–187.
- [4] Ja. Grinberg, Examples of non-Adám multigraphs, *Latvian Math. Yearbook*, **31** (1987) 128–138 (in Russian).

⁷⁴C. T. Hoàng ⁷⁵J. Shen ⁷⁶D. C. Fisher ⁷⁷F. Havet ⁷⁸S. Thomassé ⁷⁹G. Chen ⁸⁰R. Yuster ⁸¹È. Grinberg ⁸²C. Thomassen

- [5] Y. O. Hamidoune, A note on minimal directed graphs with given girth, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **43** (1987) 343–34.
- [6] C. T. Hoàng and B. Reed, A note on short cycles in digraphs, *Discrete Math.*, **66** (1987) 103–107.
- [7] C. Thomassen, Counterexamples to Adam’s conjecture on arc reversals in directed graphs, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **42** (1987) 128–130.
- [8] N. Dean and B. J. Latka, Squaring the tournament — an open problem, *Congressus Numerantium*, **109** (1995) 73–80.
- [9] D. C. Fisher, Squaring a tournament: a proof of Dean’s conjecture, *J. Graph Theory*, **23** (1996) 43–48.
- [10] F. Havet and S. Thomassé, Median orders of tournaments: a tool for the second neighborhood problem and Sumner’s conjecture, *J. Graph Theory*, **35** (2000) 244–256.
- [11] J. Shen, On the Caccetta–Häggkvist Conjecture, *Graphs Combin.*, **18** (2002) 645–654.
- [12] G. Chen, J. Shen and R. Yuster, Second neighborhood vs. first neighborhood in digraphs, *Annals of Combinatorics*, **7** (2003) 15–20.
- [13] B. D. Sullivan, *A summary of results and problems related to the Caccetta–Häggkvist conjecture*, preprint, Princeton University, 2006.

۱۲ - مسیرهای طولانی در گراف‌های جهت‌دار

در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰ گالای و روی^{۸۳} به طور مستقل یک رابطه تنگاتنگ میان عدد رنگی یک گراف جهت‌دار و طول بزرگترین مسیر جهت‌دار موجود در آن پیدا کردند. تقریباً در همان زمان، رابطه‌ی مشابه‌ای توسط گالای و میلگرام^{۸۴} بین عدد پایداری و پوشش‌های رأسی به وسیله مسیرهای جهت‌دار کشف شد. حدس لابورد^{۸۵} - پایان^{۸۶} - ژونگ^{۸۷} ارتباط بیشتری بین مجموعه‌های پایدار و طولانی‌ترین مسیرها را به عنوان اصل موضوع می‌پذیرد. این حدس حالت قوی‌تر قضیه‌ی گالای - روی است.

حدس لابورد - پایان - ژونگ: هر گراف جهت‌دار یک مجموعه‌ی پایدار دارد که تمام طولانی‌ترین مسیرهای جهت‌دار را طی می‌کند.

سادی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**	*	***	*	*	

- این حدس برای گراف‌های جهت‌دار با عدد پایداری دو درست است. “هاوت، ۲۰۰۴”
- هر گراف جهت‌دار با عدد پایداری دو، مسیری جهت‌دار که تمام مجموعه‌های پایدار ماکزیمم را قطع کند، ندارد. “هان^{۸۸}، جاک‌سن^{۸۹}، ۱۹۹۰”

مراجع

- [1] B. Roy, Nombre chromatique et plus longs chemins d’un graphe, *Rev. Française Automat. Informat. Rech. Opér.*, **1** (1967) 127–132.
- [2] T. Gallai, *On directed paths and circuits*, in Theory of Graphs (P. Erdős and G. Katona, eds.), Academic Press, New York, 1968 115–118.
- [3] T. Gallai and A. N. Milgram, Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei, *Acta Sci. Math. Szeged*, **21** (1960) 181–186.
- [4] G. Hahn and B. Jackson, A note concerning paths and independence number in digraphs, *Discrete Math.*, **82** (1990) 327–329.
- [5] F. Havet, Stable set meeting every longest path, *Discrete Math.*, **289** (2004) 169–173.
- [6] J. M. Laborde, C. Payan and N. H. Xuong, *Independent sets and longest directed paths in digraphs*, in Graphs and Other Combinatorial Topics (M. Fiedler and ed.), Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1983 173–177.

⁸³B. Roy ⁸⁴A. N. Milgram ⁸⁵J. M. Laborde ⁸⁶C. Payan ⁸⁷N. H. Xuong ⁸⁸G. Hahn ⁸⁹B. Jackson

۱۳- مدارهای طولانی در گراف‌ها

علاقه‌مندی به مدارهای طولانی ریشه در رابطه‌ی بین مدارهای هامیلتونی و مسأله‌ی چهار-رنگ دارد. اگرچه مسأله‌ی مدارهای طولانی به طور طبیعی در دیگر زمینه‌ها مانند مسأله‌ی "مار در جعبه" در نظریه‌ی رمزگذاری ظاهر می‌شود. شاید دیراک^{۹۰} اولین کسی بوده که به نوبه‌ی خود به مطالعه‌ی مدارهای طولانی در اوایل دهه ۱۹۵۰ پرداخته است. مسأله‌های بازی همانند حدس وتر توماسن^{۹۱} نشان می‌دهند که ما درک کامل و دقیقی از چنین مفاهیم پایه‌ای نداریم. در یک مدار، وتر یالی است که دو رأس نامتوالی را به هم وصل می‌کند. حدس وتر توماسن: هر طولانی‌ترین مدار در یک گراف ۳-همبند یک وتر دارد.

"توماسن، ۱۹۷۶"

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***		**	*	*	*

• این حدس برای گراف‌های دوبخشی درست است.

"توماسن، ۱۹۹۷"

حدس اسمیت: در یک گراف k -همبند، $k \geq 2$ ، هر دو طولانی‌ترین مدار حداقل k رأس مشترک دارند.

"اسمیت^{۹۲}، ۱۹۸۴"

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	*	***		*	

• این حدس برای $k \leq 6$ درست است.

"گروتسشل^{۹۳}، ۱۹۸۴"

• هر دو طولانی‌ترین مدار در یک گراف k -همبند حداقل $3\sqrt{k}$ رأس مشترک دارند.

"بابای^{۹۴}، ۱۹۷۹"

حدس بیرمله: گرافی که در آن هر دو مدار به طول بیشتر یا مساوی با k اشتراک داشته باشند، دارای یک مجموعه‌ی k -رأسی است که همه این چنین مدارهایی را قطع می‌کند.

"بیرمله^{۹۵}، ۲۰۰۲"

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
**		**	*		

• این حدس برای $k \leq 5$ درست است.

"لواش، ۱۹۶۵ و بیرمله، ۲۰۰۳"

• یک مجموعه شامل $3 + 2k$ رأس وجود دارد که تمام مدارها به طول حداقل k را قطع می‌کند.

"بیرمله، بانندی، رید، ۲۰۰۳"

۱۴- مدارهای هامیلتونی گراف‌ها

مدارهای هامیلتونی در ابتدا توسط هامیلتون در اواسط دهه‌ی ۱۸۵۰، در ارتباط با مسأله‌ای از نظریه‌ی گروه‌ها، و به طور مستقل توسط کرکمن^{۹۶} مطرح شد. اما انگیزه‌ی اصلی برای مطالعه آن‌ها از ارتباط این مدارها با مسأله‌ی چهار-رنگ، یعنی حدس تیت^{۹۷} ناشی شده است. حدس تیت بیان می‌کند که هر گراف مسطح مکعبی ۳-همبند یک چنین مداری دارد (این حدس ۶۶ سال بعد توسط تات رد شد). در این اواخر نیز مسائل دیگری مانند مسأله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد موجب علاقه‌مندی بیشتر به مطالعه مدارهای هامیلتونی شده‌اند. یک گراف فاقد پنجه^{۹۸} است اگر هیچ زیرگراف القایی یکریخت با $K_{1,3}$ نداشته باشد.

^{۹۰}G. A. Dirac ^{۹۱}C. Thomassen ^{۹۲}S. Smith ^{۹۳}M. Grötschel ^{۹۴}L. Babai ^{۹۵}E. Birmelé ^{۹۶}T. D. Kirkman ^{۹۷}P. G. Tait

^{۹۸}claw-free



شکل ۸: کارستن توماسن

حدس متیوس-سامنر: هر گراف فاقد پنجه ۴-همبند، هامیلتونی است. "متیوس^{۹۹}، سامنر^{۱۰۰}، ۱۹۸۴"

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده گی
**	*	*	*	*	*

حالت خاص: (در حقیقت معادل با نتیجه ریژاچک^{۱۰۱} (۱۹۹۷) است).
 گراف خطی $L(G)$ متناظر با گراف G به صورت زیر ساخته می شود:
 متناظر با هر یال G یک رأس در $L(G)$ در نظر گرفته می شود و دو رأس در $L(G)$ مجاورند هرگاه یال های نظیر آن ها در G در یک رأس مشترک داشته باشند. به گراف خطی گراف یالی نیز گفته می شود.
 حدس گراف خطی توماسن: هر گراف خطی ۴-همبند، هامیلتونی است.
 "توماسن، ۱۹۸۶"

- گراف های خطی ۴-یال همبند، هامیلتونی هستند.
 - هر گراف خطی ۷-همبند، هامیلتونی است.
- "توماسن، ۱۹۸۶"
 "ژان^{۱۰۲}، ۱۹۹۱"

مراجع

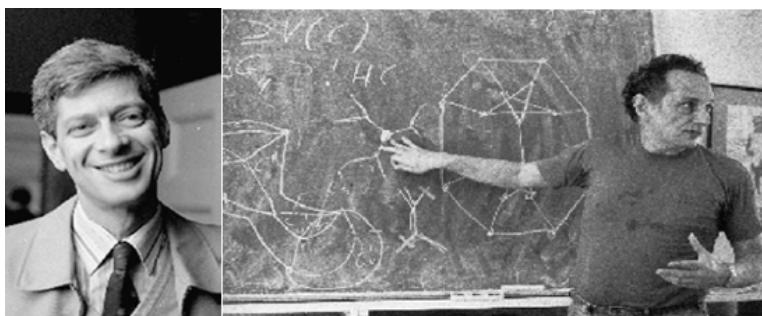
- [1] L. Lovász, On graphs not containing independent circuits (Hungarian), *Mat. Lapok*, **16** (1965) 289–299.
- [2] L. Babai, Long cycles in vertex transitive graphs, *J. Graph Theory*, **3** (1979) 301–304.
- [3] M. Grtschel, On intersections of longest cycles, in Graph Theory and Combinatorics (B. Bollobas and ed.), Academic Press, London, 1984 171–189.
- [4] M. Matthews and D. Sumner, Hamiltonian results in $K_{1,3}$ -free graphs, *J. Graph Theory*, **8** (1984) 139–146.
- [5] C. Thomassen, Reflections on graph theory, *J. Graph Theory*, **10** (1986) 309–324.
- [6] S. M. Zhan, On hamiltonian line graphs and connectivity, *Discrete Math.*, **89** (1991) 89–95.
- [7] Z. Ryjáček, On a closure concept in claw-free graphs, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **70** (1997) 217–224.
- [8] C. Thomassen, Chords of longest cycles in cubic graphs, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **71** (1997) 211–214.
- [9] E. Birmelé, *Thèse de doctorat*, Université Lyon 1, 2003.
- [10] E. Birmelé, J. A. Bondy and B. A. Reed, The Erdős–Pósa property for long circuits, *Combinatorica*, to appear.

⁹⁹M. Matthews ¹⁰⁰D. Sumner ¹⁰¹Ryjáček ¹⁰²S. M. Zhan

۱۵- مدارهای هامیلتونی چندگانه در گراف‌ها

یک قضیه‌ی کلاسیک از اسمیت می‌گوید که هر یال از یک گراف مکعبی در تعداد زوجی از مدارهای هامیلتونی قرار دارد. پس وقتی یک گراف مکعبی مدار هامیلتونی داشته باشد، الزاماً حداقل دو (در واقع حداقل سه) مدار هامیلتونی دارد. توماسون قضیه‌ی اسمیت را به تمام گراف‌های منتظم از درجه‌ی فرد (در واقع تمام گراف‌هایی که همه‌ی رأس‌های آن‌ها درجه فرد دارند) تعمیم داد. متناظر با تعمیم قضیه‌ی اسمیت که توماسون مطرح کرد، برای گراف‌های منتظم از درجه‌ی زوج نیز تعمیمی توسط شیهان^{۱۰۳} مطرح شده است.

قضیه‌ی اسمیت همچنین یک سؤال الگوریتمی خیلی جالب مطرح می‌کند. سؤال مورد نظر این است که وقتی یک مدار هامیلتونی داده شده، مدار هامیلتونی متمایز دیگری بیابید. اثبات وی بر پایه‌ی بحث شمارش بوده و ساختنی نیست. به نظر می‌رسد ارتباط ویژه‌ای بین ۴-همبندی و مدارهای هامیلتونی وجود دارد. می‌توان به قضیه‌ی تات اشاره کرد که می‌گوید گراف‌های مسطح ۴-همبند، هامیلتونی هستند. حدس متیوس و سام‌نر نیز درباره‌ی همین مطلب بدین صورت است: گراف‌های فاقد پنجه ۴-همبند، هامیلتونی هستند. همچنین قضیه‌ی توماسن می‌گوید که هر رأس در یک تورنمنت ۴-همبند به هر رأس دیگر توسط یک مسیر هامیلتونی جهت‌دار متصل است. حدس فلیشنر^{۱۰۴} در مورد مدارهای هامیلتونی دوم نیز نمونه‌ی دیگری از این مطلب است.



شکل ۹: جان شیهان و هربرت فلیشنر

حدس شیهان: هر گراف ۴-منتظم با مدار هامیلتونی، مدار هامیلتونی دوم دارد. “شیهان، ۱۹۷۵”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	**		*	*	**

- هر گراف ساده $(2k+1)$ -منتظم با مدار هامیلتونی، مدار هامیلتونی دوم دارد. “توماسون^{۱۰۵}، ۱۹۷۸”
- برای هر $k \geq 1$ ، هر گراف ساده $2k$ -منتظم با مدار هامیلتونی، مدار هامیلتونی دوم دارد.
- “هاکسل^{۱۰۶}، ۱۰۶، سیمون^{۱۰۷}، ورسترایت^{۱۰۸}، ۲۰۰۵”
- گراف‌های ساده با مینیمم درجه چهار که دقیقاً یک مدار هامیلتونی داشته باشند وجود دارند.

“فلیشنر، ۲۰۰۴”

مسأله کرویک-پلژاک: در یک گراف مکعبی یک مدار هامیلتونی داده شده است. مدار هامیلتونی دوم را (در زمان چندجمله‌ای) بیابید. “کرویک^{۱۰۹}، پلژاک^{۱۱۰}، ۱۹۸۸”

¹⁰³J. Sheehan ¹⁰⁴Fleischner ¹⁰⁵A. G. Thomason ¹⁰⁶P. Haxell ¹⁰⁷B. Seamone ¹⁰⁸J. Verstraëte ¹⁰⁹M. Chrobak ¹¹⁰S. Poljak

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	*	*	*		

حدس فلیشنر: هر گراف ۴-همبند با مدار هامیلتونی، مدار هامیلتونی دوم دارد. “فلیشنر، ۲۰۰۴”

سادگی	شگفتی	کلیت	مرکزیت	قدمت	زاینده‌گی
***	**	*	*		

• این حدس برای گراف‌های مسطح درست است. “تات، ۱۹۵۶”

مراجع

- [1] W. T. Tutte, On hamiltonian circuits, *J. London Math. Soc.*, **21** (1946) 98–101.
- [2] W. T. Tutte, A theorem on planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956) 99–116.
- [3] J. Sheehan, The multiplicity of Hamiltonian circuits in a graph, in *Recent Advances in Graph Theory* (M. Fiedler and ed.), Academia, Prague, 1975 447–480.
- [4] A. G. Thomason, Hamiltonian cycles and uniquely edge colourable graphs, *Ann. Discrete Math.*, **3** (1978) 259–268.
- [5] M. Chrobak and S. Poljak, On common edges in optimal solutions to traveling salesman and other optimization problems, *Discrete Appl. Math.*, **20** (1988) 101–111.
- [6] N. Alon, *Non-constructive proofs in combinatorics*, in *Proc. Internat. Congr. Math.*, Kyoto, 1990, Springer-Verlag, Tokyo, 1991 1421–1429.
- [7] H. Fleischner, Uniqueness of maximal dominating cycles in 3-regular and of Hamiltonian cycles in 4-regular graphs, *J. Graph Theory*, **18** (1994) 449–459.
- [8] C. Thomassen, On the number of hamiltonian cycles in bipartite graphs, *Combin. Probab. Comput.*, **5** (1996) 437–442.
- [9] C. Thomassen, Chords of longest cycles in cubic graphs, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **71** (1997) 211–214.
- [10] C. Thomassen, Independent dominating sets and a second Hamiltonian cycle in regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **72** (1998) 104–109.
- [11] H. Fleischner, Uniquely Hamiltonian graphs of minimum degree four, preprint, 2004.
- [12] P. Haxell, B. Seamone and J. Verstraëte, Independent dominating sets and hamiltonian cycles, preprint, 2005.

تشکر و قدردانی

در این جا لازم می‌دانیم از راهنمایی‌ها و پیشنهادات بسیار ارزنده داوران محترم که واقعاً با دقت نظر توصیف ناشدنی مقاله را مطالعه نموده بودند و نظراتشان باعث بهبود کیفیت مقاله گردید، سپاسگزاری نماییم.

سعید علیخانی

یزد، صفاییه، دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی

alikhani@yazd.ac.ir

سعید علیخانی، دانشیار گروه ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد است. تحقیقاتش در حوزه نظریه گراف و ترکیبیات جبری می‌باشد. از جمله کارهای پژوهشی او می‌توان به چندجمله‌ای‌های وابسته به گراف، برچسب‌گذاری‌های مختلف گراف و رنگ‌آمیزی گراف اشاره کرد. ایشان مقالات توصیفی در حوزه آموزش ریاضی و عمومی کردن ریاضی در نشریه‌های آموزش ریاضی، برهان، خبرنامه انجمن ریاضی ایران و اتحاد معلمان به رشته تحریر در آورده است. او مدیر مسئول و عضو هیات تحریریه نشریه ساختارهای جبری و کاربردهای آن که توسط دانشگاه یزد انتشار می‌یابد، نیز می‌باشند.

**سمیه جهری**

یزد، دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی

s.jahari@gmail.com

سمیه جهری دانش آموخته دوره دکتری ریاضی محض در دانشگاه یزد است که اردیبهشت ۱۳۹۵ از رساله خود با عنوان بررسی چندجمله‌ای‌های غالب و کلاس‌های D - هم‌ارزی برخی خانواده گراف‌ها تحت راهنمایی دکتر سعید علیخانی دفاع کرد. ایشان کارشناسی ارشد ریاضی محض را در سال ۱۳۸۹ از دانشگاه رازی کرمانشاه و کارشناسی ریاضی کاربردی خود را در سال ۱۳۸۷ از دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان اخذ کرده‌اند.

**علی نوروزی**

تهران، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم ریاضی

alinoroozics@gmail.com

علی نوروزی فارغ التحصیل دوره کارشناسی علوم کامپیوتر دانشگاه یزد و دانشجوی کارشناسی ارشد گروه علوم کامپیوتر و نظریه محاسبه دانشگاه تربیت مدرس تهران است.

