

درک شهودی از ریشه‌های توابع با نقشه‌ی رنگی

کیانا ایزدیار

چکیده. یافتن ریشه‌های یک معادله‌ی چندجمله‌ای، در تمامی علوم ریشه دارد و باعث پیوند ریاضی با سایر علوم گردیده است. برای توابع مختلط مقدار با استفاده از قضیه‌ی اساسی جبر، راهی به ظاهر آسان را برای یافتن ریشه‌های توابع، می‌توان تصور کرد، اما آیا درک ماهیت ریشه‌های مختلط یک معادله برای عموم مردم و متخصصین در رشته‌های دیگر آسان است؟ یافتن مقادیر و ریشه‌های یک تابع مختلط مقدار از دیدگاه نقشه‌ای رنگی، می‌تواند باعث درک سریع و آسان این مهم و هم چنین مشاهده‌ی پیوند زیبایی آن با سایر علوم از جمله نجوم را مشاهده کرد. در این مقاله به طور خلاصه ولی در عین حال غنی به شرح این موضوع می‌پردازیم. لازم به ذکر است، نقشه‌های رنگی ترسیم شده در این مقاله با استفاده از نرم افزار *MATLAB* می‌باشند.

۱. مقدمه

به احتمال قوی اولین بار در اواخر سال ۱۹۸۰ میلادی، شیوه‌ی چرخ رنگی^۱ [۳] توسط لری گرون^۲ و هانس‌لند مارک^۳ برای تصویرسازی توابع استفاده شد. در سال ۱۹۹۷، داگ آرنولد^۴ از شبکه‌های رنگی برای تصویرسازی توابع استفاده نمود و در سال ۱۹۹۸، فرنک فاریس^۵ [۲] از تکنیک «دامنه‌ی رنگی»^۶ که روشی برای تصویرسازی توابع مختلط مقدار است را بیان کرد. روش استفاده از رنگ‌های پیوسته برای نمایش نقاط درون یک نقشه یا تصویر توسط جرج ابدو^۷ و پال گادری^۸ [۵] در سال ۱۹۹۹ مورد توجه قرار گرفت. در نقشه‌های جغرافیایی، به وضوح استفاده از رنگ‌ها را برای شفاف سازی مناطق درون نقشه‌ها می‌بینیم، اما نگاه به این روش و استفاده از آن در ریاضی کمی متفاوت است و دارای مفاهیمی قابل توجه می‌باشد. آیا نقشه‌ی رنگی یک تابع صرفاً تصویری رنگارنگ و بی‌مفهوم ریاضی است؟ آیا می‌توان از این روش برای درک مفاهیم ریاضی به گونه‌ای ساده‌تر استفاده کرد؟

۲. طرح‌های رنگی

اگر به رنگ‌ها به عنوان کمیتی سه‌بعدی نگاه کنیم، در زندگی روزمره در وسایل تصویری رنگی مانند تلوزیون، از سه نوع پارامتر بندی برای رنگ‌ها استفاده می‌شود [۶]:

RGB (۱)

CMY (۲)

HSV^۹ یا HLS^{۱۰} (۳)

عبارات و کلمات کلیدی. نقشه رنگی، دامنه رنگی توابع.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۲/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۲۰

¹ color wheel ² Lary Grone,reference4 ³ Hansland Mark ⁴ Doug Arnold ⁵ Frank Farris ⁶ domain coloring ⁷ George Abdo
⁸ Paul Godfrey ⁹ Hue, Saturation, Value ¹⁰ Hue, Light, Saturation

در مفاهیم ریاضی از پارامتربندی نوع سوم، برای تصویرسازی توابع مختلط مقدار استفاده می‌شود. اگر آن را HSV در نظر بگیریم، به ترتیب H معادل زاویه‌ی قرار گرفتن رنگ‌ها در چرخ رنگی، S میزان خلوص رنگ که از ۰ تا ۱ یا ۰ تا ۱۰۰ متغیر است (اگر S=0 باشد؛ یعنی، رنگ سیاه یا سفید است و اگر S=1، ۱۰۰ باشد رنگی کاملاً خالص و بدون ترکیب با سفید را به ما می‌دهد). V مقدار تیرگی و روشنی رنگ می‌باشد که مشابهاً از ۰ تا ۱ متغیر است (V=0 معادل با رنگ سیاه، نه رنگ دارد و نه خلوص رنگ). حال اگر معیار را HLS قرار دهیم، تنها تفاوت جابجایی L با V خواهد بود. H و S به ترتیب بیانگر رنگ و خلوص رنگ خواهند بود.

۳. روش‌های رنگ آمیزی برای نقشه‌ی رنگی یک تابع مختلط مقدار

با توجه به قضیه‌ی اساسی جبر، می‌دانیم که تمامی توابع مختلط مقدار روی میدان اعداد مختلط دارای ریشه خواهند بود. اگر معادله‌ی

$$P_n(z) = 0,$$

را که در آن $P_n(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌باشد را داشته باشیم، می‌دانیم که این چندجمله‌ای حداکثر دارای n ریشه (ریشه‌های متمایز، تکراری، قطب (ریشه‌های مخرج)) می‌باشد [۷].

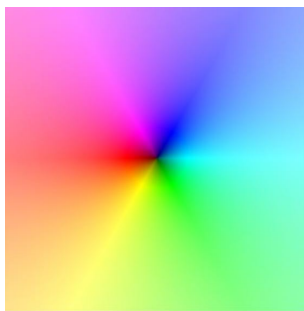
برای تصویرسازی توابع مختلط مقدار می‌توانیم از سه روشی که در ادامه ذکر می‌شود، به عنوان مرجع استفاده نمود: (۱) در این روش مطابق شکل پایین، مرکز رنگ مشکی، ۱- رنگ قرمز و ۱ رنگ سبز-آبی را به خود اختصاص داده‌اند. نقاط در بی‌نهایت رنگ سفید را به خود می‌گیرند:

$$H = \pi + \arg z,$$

$$L = (1 - 2^{-|z|}) \times 100,$$

$$S = 100.$$

در این نوع رنگ آمیزی، قطب‌ها به رنگ مشکی خواهند بود.



شکل ۱: رنگ آمیزی نوع اول

توجه داشته باشید که نحوه‌ی خواندن این نقشه‌های رنگی به این صورت است که وقتی نمودار رنگی تابعی را رسم می‌کنیم، حول ریشه یا ریشه‌های آن تابع چرخ رنگی شکل بالا می‌چرخد. به تعداد چرخش، آن تکرار را برای آن ریشه در نظر خواهیم گرفت. قطب‌ها در این نوع رنگ آمیزی به رنگ سفید خواهند بود. این نحوه‌ی خواندن نقشه‌های رنگی توابع برای تمامی حالت‌ها، با توجه به رنگ آمیزی آن‌ها، صادق است.

(۲) در روش دوم مرکز نقشه‌ی رنگی را سفید، ۱+ برای رنگ قرمز، ۱- رنگ سبز-آبی و نقاط در بی‌نهایت به رنگ مشکی می‌باشند:

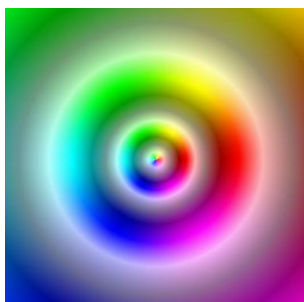
$$H = \arg z,$$

$$L = 2^{-|z|} \times 100,$$

$$S = 100.$$

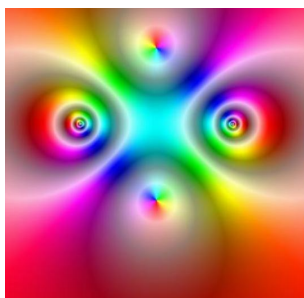
در این نوع رنگ آمیزی قطب‌ها به رنگ مشکی خواهند بود.

(۳) رنگ قرمز نشان دهنده‌ی زاویه‌ی ۰ یا ۳۶۰ درجه، رنگ سبز ۱۲۰ درجه و رنگ آبی ۲۴۰ درجه می‌باشد. در علوم جغرافیایی از نوعی رنگ آمیزی به نام COTOURLINE [۸] استفاده می‌شود که در آن نقاط، هم سطح و دارای یک ارتفاع ملاک رنگ آمیزی نقشه می‌باشند. در روش رنگ آمیزی نوع سوم برای توابع مختلط مقدار، ملاک رنگ آمیزی در مقدار و اشباع است؛ یعنی، اعداد مختلط با اندازه‌ی برابر در یک سطح و تراز رنگی قرار می‌گیرند. مطابق این رنگ آمیزی، شکل رنگی تابع $f(z) = z$ را در زیر مشاهده می‌کنید:



شکل ۲: نقشه‌ی رنگی تابع $f(z) = z$ با استفاده از روش دوم رنگی آمیزی

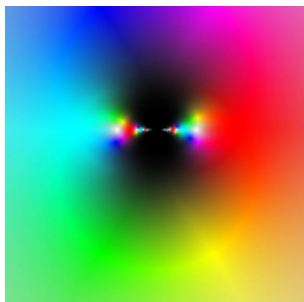
با توجه به روش سوم رنگ آمیزی نقشه‌ی رنگی تابع $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$ را رسم کرده‌ایم. با توجه به شکل (۳)، نحوه‌ی خواندن نقشه‌های رنگی که ذکر کردیم، سر و چانه، ریشه‌های ساده (ریشه‌های صورت)، چشم‌ها، ریشه‌های مخرج (قطب‌ها) می‌باشند.



شکل ۳: نمودار رنگی $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$

۴. درکی فیزیکی از نقاط تکین توابع در نقشه‌ی رنگی

در ریاضیات، نقطه‌ی تکین [۹]، نقطه‌ای است که در آن تابع، رفتار نامشخص و نامنظمی را از خود نشان می‌دهد. برای مثال، نمودار رنگی تابع $\sin \frac{1}{z}$ که مطابق روش دوم رنگ آمیزی شده است، به صورت شکل (۴) خواهد بود:



شکل ۴: نقشه‌ی رنگی $\sin \frac{1}{z}$

مشاهده می‌کنیم که تابع فوق در نقطه‌ی $z = 0$ رفتار مشخصی را از خود نشان نمی‌دهد (تکین اساسی است) و این حقیقت با نگاه به نقشه‌ی رنگی تابع نیز قابل مشاهده خواهد بود! رنگ‌ها، خلوص خود را از دست داده و چرخش رنگی را در این نقطه مشاهده نمی‌کنیم. در فیزیک و اخترفیزیک، مرکز سیاهچاله (انحنای فضا-زمان بی‌نهایت است، چگالی آن نقطه از فضا-زمان بی‌نهایت است)، نقطه‌ای دارای تکینگی است، که از نوع تکین منفرد یا تکین حلقوی می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

نکته‌ی جالب توجه این است که با نگاهی به شکل‌های سیاهچاله‌ها و مقایسه‌ی آن‌ها با نحوه‌ی رنگ آمیزی یک تابع که ذکر کردیم، می‌توان مشاهده نمود که این روش به صورت طبیعی نیز در جهان قابل مشاهده بوده و چه بسا ماهیتی طبیعی و زنده دارد! این معیارهای رنگ آمیزی می‌توانند حقیقی باشند و تنها جنبه‌ی تئوری نخواهند داشت. روش‌های رنگ آمیزی می‌توانند متنوع باشند و سه روش ذکر شده به دلیل پرکاربرد بودنشان مطرح شده‌اند. اما، برای رنگ آمیزی یک تابع، هر شخصی می‌تواند معیار رنگی خود را بیان کرده و اعداد مختلط را در نقشه‌ی رنگی خود با توجه به معیار رنگ آمیزی مبدأش، رنگ‌بندی کند.

مراجع

- [1] Digital Library of Mathematical Functions: Continuous Phase Mapping, <http://dlmf.nist.gov/help/vrml/aboutcolor#S2>, Retrieved 2016.
- [2] F. A. Farris, Visualizing complex-valued functions in the plane, *AMC*, **10** (1997).
- [3] D. J. Velleman, The fundamental theorem of algebra: A visual approach, *The Mathematical Intelligencer*, **37** (2015) 12-21.
- [4] E. Wegert, *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits*, Springer Basel, 2016 pp. 29.
- [5] G. Abdo, P. Godfrey, *Plotting functions of a complex variable: Table of Conformal Mappings Using Continuous Coloring*, 1999.
- [6] <http://w.american.edu/cas/mathstat/lcrone/colorsch.html>
- [7] R. Behari, H. Gupta, *Theory of Equations*, 1959.
- [8] Collins English Dictionary - Complete, Unabridged 2012 Digital Edition © William Collins Sons, Co. Ltd 1979, 1986 © Harper-Collins.

[۹] س. شهبانی، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ۲، چاپ ششم، (۱۳۹۳).

کیانا ایزدی‌ار

اهواز، اتوبان گلستان، دانشگاه شهید چمران، دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر
kiyana.izadyar@yahoo.com

کیانا ایزدی‌ار، متولد ۱۳۷۱ در شهر اهواز است. در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع کارشناسی در رشته‌ی ریاضیات و کاربردها شد و در سال ۱۳۹۵، در مقطع کارشناسی ارشد گرایش آموزش ریاضی، از دانشگاه شهید چمران فارغ التحصیل گشت.

