

مطالعه مساله برج هانوی و تعمیم آن

بهزاد کفاش

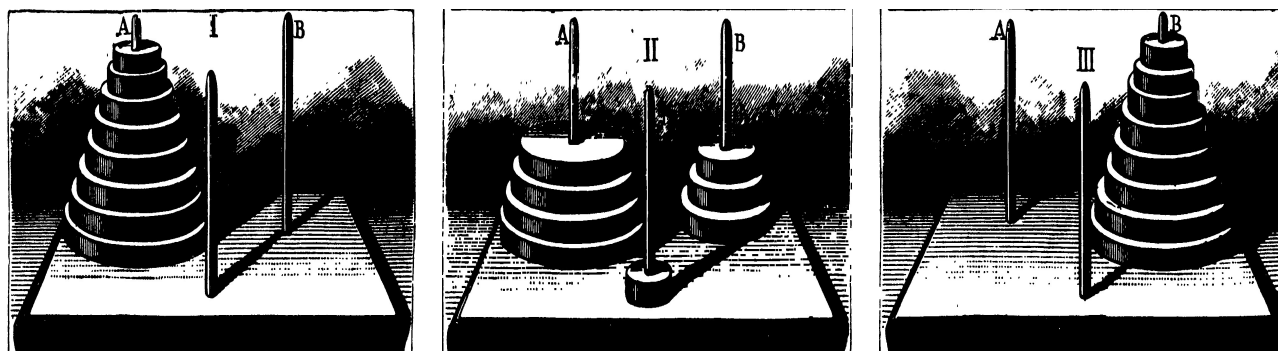
چکیده. مساله برج هانوی، یک مساله با ریشه‌ی تاریخی است و لوکا، ریاضی‌دان فرانسوی، آن را تنظیم کرده است. در این مقاله، مساله مشهور برج هانوی و تعمیم آن را بیان نموده و حل بهینه‌ی آن‌ها را به روش بازگشتی و بر اساس نظریه گراف بررسی می‌نماییم. نشان داده می‌شود که گراف حاصل از حل مساله برج هانوی با رسم گراف متناظر با آن، فراکتال سرپینسکی است.

۱. مقدمه

بیشتر ریاضی‌دانان با مساله برج هانوی آشنایی دارند. این مساله اغلب به عنوان یک تمرین مقدماتی در کتاب‌های ریاضیات گسسته بیان شده است [۱، ۴]. همچنین این مساله، یکی از مسائل معروف دنیای برنامه نویسی کامپیوتر که جزو قدیمی‌ترین آن‌ها هم به شمار می‌رود، نیز می‌باشد [۴، ۵]. البته پس از مساله مشهور برج هانوی مسایل بسیار دیگری در این زمینه مطرح و بررسی گردیده است [۱-۷]. مساله برج هانوی ریشه تاریخی دارد و لوکا، ریاضی‌دان فرانسوی، آن را در سال ۱۸۸۳ تنظیم کرده است [۸]. بنا بر یک افسانه، در یک معبد هندی سه میله از جنس الماس وجود داشته است، در یکی از این میله‌ها ۶۴ دیسک قرار داشت به نحوی که یک مخروط ناقص درست شده بود. کاهنان معبد، که روز و شب جای خود را عوض می‌کردند، پی‌درپی دیسک‌های طلا را به کمک میله دوم، از میله اول به میله سوم منتقل می‌کردند (شکل ۱ را ببینید). کاهنان برای انجام این کار از دو قانون پیروی می‌کردند:

- (۱) هر بار بیش از یک دیسک را نمی‌توان جابه‌جا کرد.
- (۲) دیسکی که جابه‌جا می‌شود باید روی میله خالی یا روی دیسک بزرگ‌تر قرار گیرد، و هرگز دیسک بزرگ‌تر روی دیسک کوچک‌تر قرار نمی‌گیرد.

آن‌ها بر این باور بودند که اگر بتوان تمام دیسک‌ها را به میله سوم منتقل کنند، عمر دنیا به پایان خواهد رسید [۴، ۹، ۱۰]. سوالی که مطرح می‌شود این است که اگر کاهنان معبد با حداکثر کارایی انجام وظیفه کنند، عمر جهان از ابتدای آفرینش تا پایان آن چقدر طول می‌کشد؟



شکل ۱: وضعیت ابتدایی، یکی از وضعیت‌های میانی و وضعیت نهایی

۱.۱. طرح چند مساله.

مساله ۱.۱. (مساله مشهور برج هانوی [۴، ۱]):

یک تخته با سه میله عمودی و n دیسک با قطرهای متمایز در اختیار داریم. دیسک‌ها به ترتیب طول قطرشان روی یک میله قرار دارند. مساله این است که می‌خواهیم این دیسک‌ها را به یکی از میله‌های خالی منتقل کنیم. در این انتقال تنها مجاز هستیم هر بار یک دیسک را از یک میله به میله دیگر منتقل کنیم به طوری که، روی هیچ میله‌ای یک دیسک روی دیسک دیگر با قطر کوچک تر قرار نگیرد. حداقل تعداد حرکت انتقال دیسک‌ها را حساب کنید؟

مساله ۲.۱. (تعمیم مساله برج هانوی [۲، ۱]):

فرض کنید $2n$ دیسک با قطرهای d_1 تا d_{2n} داریم به طوری که

$$d_1 < d_2 < \dots < d_{2n}$$

سه میله موجود است که دیسک‌های با قطر d_{2i-1} روی یکی و دیسک‌ها با قطر d_{2i} روی دیگری قرار دارد (برای $1 \leq i \leq n$). چند حرکت، نظیر حرکت در انتقال دیسک‌های برج هانوی لازم است تا تمام دیسک‌ها به میله خالی منتقل شوند؟

مساله ۳.۱. (تعمیم مساله برج هانوی [۴، ۱]):

فرض کنید، n دیسک با شعاع‌های متفاوت روی میله‌ی شماره یک برج هانوی قرار دارد. می‌خواهیم این دیسک‌ها را به میله‌ی سه منتقل کنیم، اما مجاز نیستیم دیسکی را مستقیماً از یک به سه یا از سه به یک منتقل نماییم. بلکه این انتقال باید از طریق میله‌ی دو صورت گیرد. حداقل تعداد حرکت انتقال دیسک‌ها را حساب کنید؟

مساله ۴.۱. (مساله برج هانوی مضاعف [۴، ۱]):

فرض کنید، $2n$ دیسک با n شعاع مختلف یعنی از هر دیسک دو عدد موجود می‌باشد. اگر دیسک‌ها با شعاع یکسان قابل تمیز نباشند حداقل تعداد حرکت انتقال این $2n$ دیسک از یک میله به میله دیگر به کمک میله سوم را حساب کنید؟

مساله ۵.۱. (مساله برج هانوی با ۴ میله [۴]):

فرض کنید، مساله برج هانوی به جای ۳ میله دارای ۴ میله باشد. n دیسک به ترتیب طول قطرشان روی یک میله قرار دارند. حداقل چند حرکت، نظیر حرکت در انتقال دیسک‌های برج هانوی لازم است تا تمام دیسک‌ها از یک میله به میله دیگر با استفاده از دو میله میانی، منتقل شوند؟

مساله ۶.۱. (مساله برج هانوی با m میله [۴]):

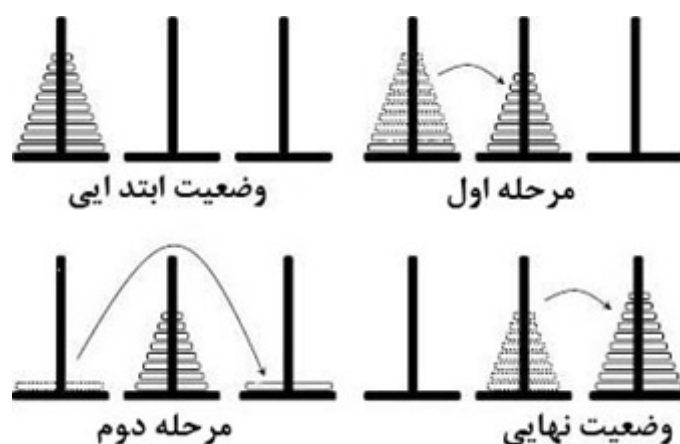
یک تخته با m میله عمودی و n دیسک با قطرهای متمایز در اختیار داریم. دیسک‌ها به ترتیب طول قطرشان روی یک میله قرار دارند. حداقل چند حرکت، نظیر حرکت در انتقال دیسک‌های برج هانوی لازم است تا تمام دیسک‌ها از یک میله به میله دیگر با استفاده از $m - 2$ میله میانی، منتقل شوند؟

۲.۱. کاربردی در حوزه روانشناسی. اختلال نارسایی توجه و فزون‌کنشی یک اختلال عصب روان‌شناختی و مربوط به نارساکنش‌وری‌های اجرایی در کرتکس پیش‌پیشانی است. یکی از کنش‌های اجرایی مهم که در این افراد دچار آسیب می‌باشد، کنش اجرایی برنامه‌ریزی و سازماندهی است که یک فعالیت مهم و عالی مغز و وابسته به عملکرد کرتکس پیش‌پیشانی است و به وسیله‌ی آزمون‌هایی که یکی از آن‌ها آزمون برج هانوی می‌باشد، اندازه‌گیری می‌شود [۳]. همچنین، به‌منظور اندازه‌گیری توانایی برنامه‌ریزی و سازماندهی در حوزه‌ی عصب روان‌شناختی از ابزارهای مختلفی استفاده می‌شود که یکی از آن‌ها، آزمون برج هانوی است (همچنین مراجع [۱۱، ۱۲] را ببینید).

۲. راه حل بازگشتی مساله برج هانوی و ارائه فرمولی برای تعداد حرکت‌های مورد نیاز

۱.۲. مساله برج هانوی با سه میله. یک روش کارا برای حل این مساله، اندیشیدن به صورت بازگشتی است. فرض کنید که به شکلی توانسته باشید یک راه حل مناسب برای انتقال یک به یک دیسک‌ها یک برج $(n - 1)$ دیسکی، از یک میله به میله دیگر، با این شرط که دیسک بزرگ‌تر بر روی دیسک کوچک‌تر قرار نگیرد، پیدا کرده باشید. حال این سوال مطرح است که راه‌حل کارا برای انتقال یک به یک دیسک‌های برجی با n دیسک از یک میله به میله دیگر، با این شرط که دیسک بزرگ‌تر بر روی دیسک کوچک‌تر قرار نگیرد چگونه است؟ راه‌حل این مساله در شکل ۲ رسم شده است. مرحله‌ی اول، شامل انتقال $(n - 1)$ دیسک از میله‌ی ۱ به میله‌ی ۲ است. مرحله‌ی دوم، انتقال دیسک زیرین میله‌ی ۱ به میله‌ی ۳ است. در نهایت، در آخرین مرحله $(n - 1)$ دیسک از میله‌ی ۲ به میله‌ی ۳ انتقال می‌یابد. با توجه به جابه‌جایی‌هایی که برای حل مساله برج هانوی انجام داده شد، می‌توان یک رابطه بازگشتی بنا به مراحل سه‌گانه زیر برای حالتی که n دیسک دارد، استخراج نمود:

- (۱) ابتدا، $(n - 1)$ دیسک را از میله ۱ به میله ۲ انتقال می‌دهیم. برای راحتی کار، تعداد حرکت‌هایی را که برای جابه‌جایی $(n - 1)$ انجام می‌دهیم M می‌نامیم.
- (۲) سپس، دیسک ۱ را به میله ۳ انتقال می‌دهیم.
- (۳) در پایان، برای $(n - 1)$ دیسک باقیمانده در میله ۳، مانند مراحل آنچه در مراحل ۱ و ۲ گفته شد تکرار می‌کنیم.



شکل ۲: حرکات لازم برای حل معمای برج هانوی با سه میله

بنابراین تعداد حرکتهای که برای جابه‌جایی n دیسک از میله ۱ به میله ۳ نیاز است $2M + 1$ است، که M تعداد حرکتهای لازم برای جابه‌جایی $(n - 1)$ دیسک از میله ۱ به ۳ است. مشاهده می‌شود که مساله را به چندین مساله کوچک‌تر تقسیم کردیم به طوری که از حل این مساله‌های کوچک می‌توان اصل مساله را حل نمود. حال فرض کنید برای $n \geq 1$ ، a_n مساوی با حداقل تعداد انتقال‌های لازم برای جابه‌جایی n دیسک، از یک میله به میله دیگر است. در مرحله‌ی اول a_{n-1} انتقال لازم است. در مرحله‌ی دوم فقط یک عمل انتقال لازم است و در نهایت a_{n-1} انتقال دیگر نیاز است. بنابراین، رابطه‌ی بازگشتی برای حل این مساله به صورت زیر است:

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 2$$

لذا، رابطه‌ی بازگشتی برای دنباله‌ی $a_1, a_2, \dots$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

حال به دنبال ارایه یک رابطه غیر بازگشتی هستیم تا بتوان، قاعده‌ای کلی را برای حالتی که تعداد دیسک‌ها عددی بزرگ باشد، به دست آورد. به دین منظور با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی فوق، داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2a_{n-2} + 2^1 + 2^0 = 2^2(2a_{n-3} + 1) + 2^1 + 2^0 = \\ &= 2^3a_{n-3} + 2^2 + 2^1 + 2^0 = \dots = 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

با استفاده از این رابطه، تعداد جابه‌جایی‌ها با توجه به تعداد دیسک‌ها، در جدول ۱ به دست آمده است [۱۳]:

جدول ۱: تعداد حرکت‌های لازم برای حل مساله برج هانوی با توجه به تعداد دیسک‌ها

n	$2^n - 1$	n	$2^n - 1$	n	$2^n - 1$
۸	۲۵۵	۱۹	۵۲۴۲۸۷	۳۰	۱۰۷۳۷۴۱۸۲۳
۹	۵۱۱	۲۰	۱۰۴۸۵۷۵	۳۱	۲۱۴۷۴۸۳۶۴۷
۱۰	۱۰۲۷	۲۱	۲۰۹۷۱۵۱	۳۲	۴۲۹۴۹۶۷۲۹۵
۱۱	۲۰۴۷	۲۲	۴۱۹۴۳۰۳	۳۳	۸۵۸۹۹۳۴۵۹۱
۱۲	۴۰۹۵	۲۳	۸۳۸۸۶۰۷	۳۴	۱۷۱۷۹۸۶۹۱۸۳
۱۳	۸۱۹۱	۲۴	۱۶۷۷۷۲۱۵	۳۵	۳۴۳۵۹۷۳۸۳۶۷
۱۴	۱۶۳۸۳	۲۵	۳۳۵۵۴۴۳۱	۳۶	۶۸۷۱۹۴۷۶۷۳۵
۱۵	۳۲۷۶۷	۲۶	۶۷۱۰۸۸۶۳	۳۷	۱۳۷۴۳۸۹۵۳۴۷۱
۱۶	۶۵۶۳۵	۲۷	۱۳۴۲۱۷۷۲۷	۳۸	۲۷۴۸۷۷۹۰۶۹۴۳
۱۷	۱۳۱۰۷۱	۲۸	۲۶۸۴۳۵۴۵۵	۳۹	۵۴۹۷۵۵۸۱۳۸۸۷
۱۸	۲۶۲۱۴۳	۲۹	۵۳۶۸۷۰۹۱۱	۴۰	۱۰۹۹۵۵۱۷۱۷۷۱۷

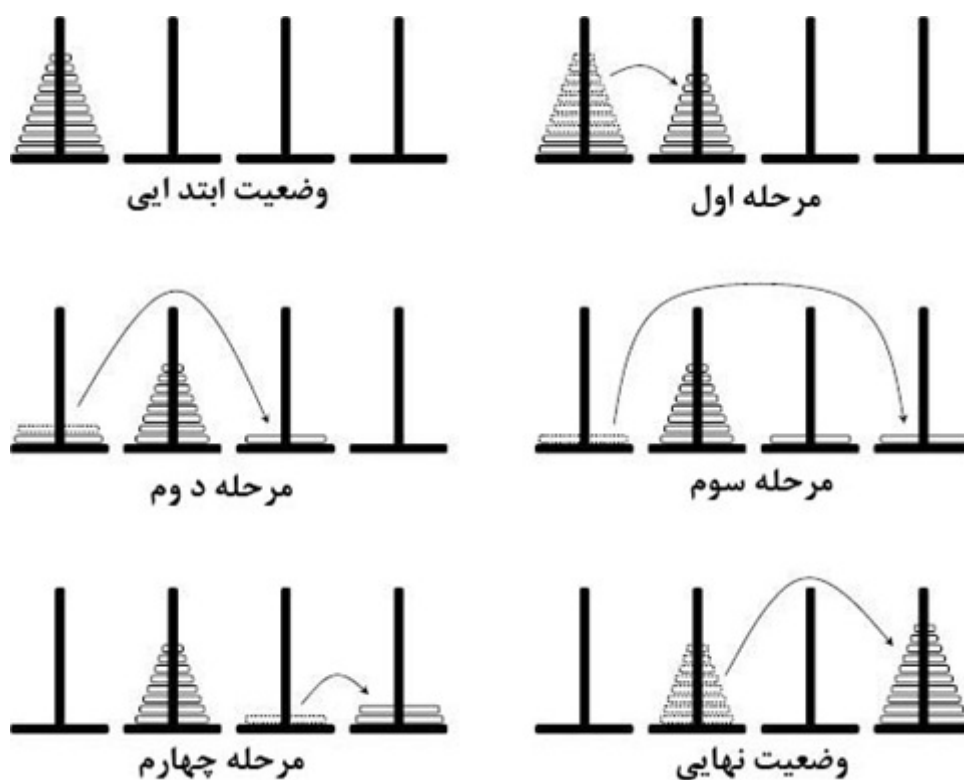
در نتیجه، در حالت کلی برای جابه‌جایی n دیسک از میله ۱ به میله ۳، به $2^n - 1$ حرکت نیاز است. با استفاده از این فرمول به راحتی متوجه می‌شویم که تعداد حرکاتی که کاهنان برای جابه‌جایی ۶۴ دیسک نیاز داشتند، برابر ۱۸،۴۴۶،۷۴۲،۰۷۳،۷۰۹،۵۵۱،۶۱۵ است که اگر فرض کنیم کاهنان در هر ثانیه یک دیسک جابه‌جا کنند، کار آنها بیش از ۵ میلیارد قرن طول می‌کشد [۵].

۲.۲. مساله برج هانوی با چهار میله. در این قسمت، فرض کنید که در برج هانوی به جای سه میله از چهار میله استفاده کرده باشیم [۱۴، ۱۵]. مشابه حالت قبل، در هر مرحله یک دیسک را می‌توان از یک میله به میله دیگر، به شرط آنکه بر روی دیسک کوچک‌تر قرار نگیرد، منتقل کرد. فرض کنید که s_n ، حداقل تعداد جابه‌جایی‌های لازم برای جابه‌جایی n دیسک، از یک میله به میله دیگر باشد. در مرحله‌ی اول s_{n-2} انتقال لازم است. در مرحله‌های دوم، سوم و چهارم همانطور که در شکل ۳ دیده می‌شود فقط یک عمل انتقال لازم است و در نهایت s_{n-2} انتقال دیگر نیاز است. بنابراین، رابطه‌ی بازگشتی برای حل این مساله به‌صورت زیر است:

$$s_n = s_{n-2} + 1 + 1 + 1 + s_{n-2} = 2s_{n-2} + 3, \quad n \geq 2$$

لذا، رابطه‌ی بازگشتی برای دنباله‌ی $a_1, a_2, \dots$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} s_1 = 1, \\ s_n = 2s_{n-2} + 3, & n \geq 2. \end{cases}$$



شکل ۳: حرکات لازم برای حل معمای برج هانوی با چهار

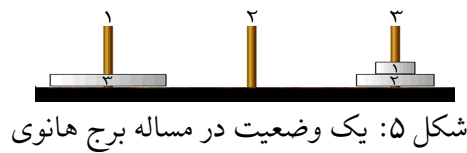
۳. رسم گراف برای حل مساله برج هانویی با سه میله

برجی با ۳ دیسک را در نظر بگیرید. هر یک از دیسک‌ها می‌توانند بر هر میله قرار گیرد و دقیقاً $3^3 = 27$ وضعیت متفاوت در این مساله وجود دارد. برای رسم گراف این مساله، ابتدا باید راهی برای نمایش همه‌ی وضعیت‌های ایجاد شده در یک مساله را معرفی کنیم، سپس حرکات مجاز بین آن‌ها را مشخص کرده و به ترسیم آن گراف بپردازیم [۱۵، ۱۶]. به این منظور سه دیسک را با ۱، ۲ و ۳ شماره گذاری می‌کنیم، به طوری که دیسک ۱ کوچک‌ترین و دیسک ۳ بزرگ‌ترین باشد، سپس میله‌ها را از چپ به راست با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ مانند شکل ۴ مشخص می‌کنیم: اگر بدانیم هر دیسک بر

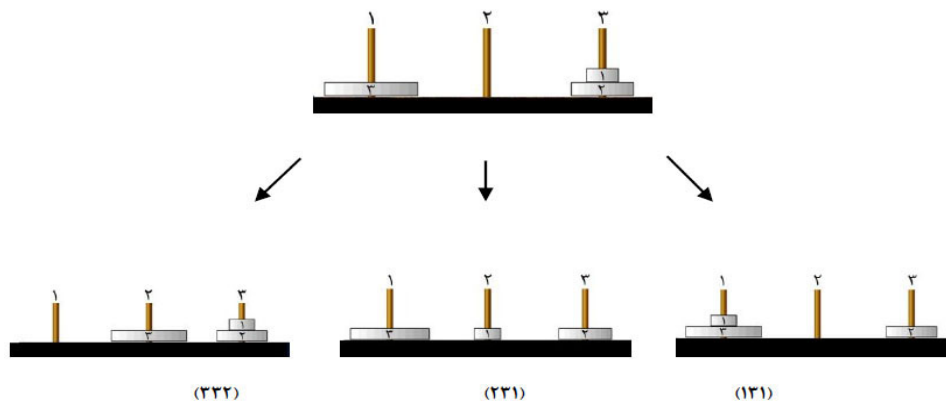


شکل ۴: وضعیتی که هر سه دیسک بر روی میله‌ی ۱ قرار دارند

کدام یک از سه میله واقع است، می‌توانیم هر وضعیت را با توجه به شماره‌های موجود بین میله‌ها و دیسک‌ها مشخص کنیم. برای توضیح فرض کنید وضعیت موجود در شکل ۵ برقرار باشد:



یعنی دیسک ۱ و ۲ بر میله‌ی شماره‌ی ۳ و دیسک ۳ بر میله‌ی ۱ قرار داشته باشند. باید توجه داشت که در میله‌ی ۳ باید دیسک ۲ زیر دیسک ۱ واقع باشد. این وضعیت را با (۳۳۱) نشان می‌دهیم. در واقع سه رقم مزبور به ترتیب (از چپ به راست) شماره‌ی میله‌های مربوط به دیسک‌های ۱، ۲ و ۳ را نمایش می‌دهند. سه حرکت قانونی که از وضعیت (۳۳۱) وجود دارد در شکل ۶ نشان داده شده است:



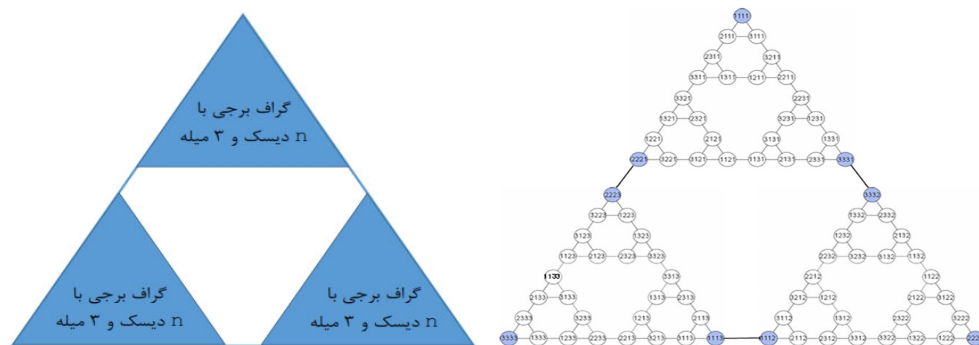
شکل ۶: وضعیت‌های مجاز برای شکل ۵

۱.۳. چگونه می‌توان از روی دنباله مربوط به یک وضعیت، حرکت‌های مجاز را تشخیص داد. از آنجا که کوچک‌ترین دیسک واقع بر یک میله، باید در بالاترین نقطه قرار گیرد، این امر باعث ظهور اولین شماره‌ی آن میله در دنباله‌ی مربوط می‌شود. اگر بخواهیم این دیسک را حرکت دهیم، باید آن را به بالاترین نقطه در میله‌ی دیگر قرار دهیم یعنی آن عدد را چنان تغییر دهیم، که باعث ظهور اولین شماره‌ی دیگر شود. به عنوان مثال وضعیت (۲۱۲) را در نظر بگیرید و فرض کنیم مایل به جابه‌جا کردن دیسک ۱ باشیم. این دیسک بر میله‌ی ۲ قرار دارد و باعث ظهور اولین ۲ در دنباله‌ی مربوطه شده است. فرض کنیم این اولین ۲ را به ۱ تغییر دهیم. در این صورت، این رقم (به طور بدیهی!) ظهور اولین رقم ۱ است؛ بنابراین، جابه‌جایی (۲۱۲) به (۱۱۲) مجاز است. همچنین جابه‌جایی (۲۱۲) به (۳۱۲) مجاز بوده و باعث ظهور ۳ در شروع دنباله است. می‌توان دیسک ۲ را نیز جابه‌جا کرد؛ زیرا اولین ظهور عدد ۱ در مرتبه‌ی دوم دنباله‌ی مربوطه است. اما نمی‌توان آن را به ۲ تغییر داد. زیرا ۲ قبلاً در مرتبه‌ی اول ظاهر شده است. اما تبدیل به ۳ قانونی است. بنابراین می‌توان (۲۱۲) را به (۲۳۲) تبدیل کرد، اما نمی‌توان آن را به (۲۲۲) تبدیل نمود؛ سرانجام دیسک ۳ را نمی‌توان حرکت داد، زیرا رقم سوم واقع در دنباله‌ی ۲ است و این اولین ظهور ۲ نیست. در یک جمع‌بندی کلی از مکان (۲۱۲) جابه‌جایی‌های قانونی به (۱۱۲)، (۳۱۲) و (۲۳۲) و تنها به این‌ها می‌توان انجام داد. با پیروی از قاعده‌های فوق می‌توان جمیع ۲۷ وضعیت و تمام حرکت‌های ممکن را در جدول ۲ فهرست کرد:

شکل ۷ نشان می‌دهد چه وضیتهایی قابل تبدیل به یکدیگر هستند. با مراجعه به گراف به دست آمده، مشخص می‌شود که چگونه می‌توان از یک مکان به مکان دیگر رفت و به راحتی می‌توان سریع‌ترین مسیر را تشخیص داد. مثلاً در انتقال همه‌ی دیسک‌ها از میله‌ی ۱ (یعنی مکان (۱۱۱)) به میله‌ی ۳ (یعنی مکان (۳۳۳)) باید در مسیر یال سمت راست حرکت نموده و جابه‌جایی‌های زیر را انجام دهیم:

$$(۱۱۱) \rightarrow (۳۱۱) \rightarrow (۳۲۱) \rightarrow (۲۲۱) \rightarrow (۲۲۳) \rightarrow (۱۲۳) \rightarrow (۱۳۳) \rightarrow (۳۳۳)$$

۲.۳. بررسی نمودار به دست آمده. نمودار به دست آمده، شامل سه کپی از نمودار کوچک‌تری است که برای تشکیل یک مثلث با سه پاره خط منفرد به یکدیگر وصل شده‌اند. در حقیقت نمودار برج هانوی با ۳ دیسک، ۳ کپی از یک نمودار ۲ دیسکی است که تشکیل یک مثلث داده است. به طور مشابه یک برج هانوی با ۴ دیسک شامل ۳ کپی از یک نمودار ۳ دیسکی است (شکل ۸ را ببینید). در حالت کلی می‌توان گفت که معمای برج هانوی دارای ساختار بازگشتی است. به این ترتیب که جواب هانوی $(n+1)$ - دیسکی را می‌توان از نمودار هانوی n - دیسکی ساخت. تقارن مثلی که ایجاد می‌شود به این علت است که قاعده‌ی مربوط در مورد میله‌های ۱، ۲ و ۳ دقیقاً به یک نحو به کار می‌روند (شکل ۸ را ببینید).

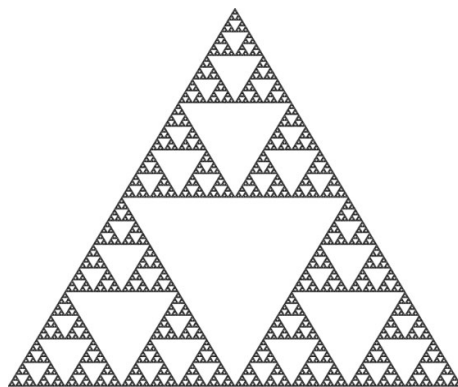


شکل ۸: نمودار بازگشتی مربوط به گراف برج هانوی با ۴ دیسک (سمت چپ) و n دیسک (سمت راست)

۳.۳. چگونه از گراف برج هانویی با n دیسک برای رسم گراف برجی با $(n+1)$ دیسک استفاده کنیم. براساس قانون بخش (۲.۳)، می‌توان با استفاده از کاربرد مکرر این قاعده در مورد نمودار هانوی 0 - دیسک که نقطه‌ای منفرد است نمودار برج هانوی با هر تعداد دیسک دلخواه را رسم نمود. همانطور که تعداد دیسک‌ها بیشتر می‌شود، نمودار مربوط هم پیچیده‌تر می‌شود و گراف حاصل بیشتر و بیشتر به فراکتال سرپینسکی نزدیک می‌شود. برای مثال شکل ۹ نمودار هانوی با تعداد متناهی دیسک را نشان می‌دهد که از ساختار بازگشتی گفته شده رسم شده است این نمودار تعداد متناهی راس دارد که به راحتی رسم شده است و می‌توان آن را برچسب گذاری کرد.

۴.۳. چگونه از روی یک گراف آن را برچسب گذاری کنیم. با توجه به آنچه در (۲.۳) بیان گردید، نمودار مربوط به برجی با $(n+1)$ - دیسک از سه قسمت تشکیل شده است، که آن‌ها را به ترتیب، زیرنمودار بالایی، زیرنمودار راست پایین و زیر نمودار چپ پایین می‌نامیم. زیرنمودار بالایی برج هانوی $(n+1)$ - دیسک را درست مانند نمودار برج هانوی n - دیسکی رسم می‌کنیم، اما در انتهای هر دنباله عددی یک، ۱ اضافه می‌کنیم. برای به دست آوردن زیرنمودار چپ پایین، زیرنمودار بالایی را به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بگردانید و ۱ را به ۲، ۲ را به ۳ و ۳ را ۳۱

به ۱ تبدیل کنید. برای به دست آوردن زیرنمودار راست پایین، مجدداً زیر نمودار بالایی را ۱۲۰ درجه، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران داده ۱ را به ۳، ۳ را به ۲ و ۲ را به ۱ تبدیل کنید.



شکل ۹: نمودار برجی با ۳ میله و تعداد متناهی دیسک که یک فراکتال سرپینسکی است

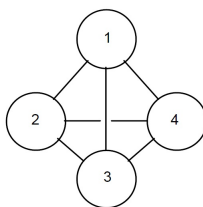
جزئیات تا اینجا و نمودارهای مربوط به آن، نشان می‌دهد که در هر مرحله تعداد رأس‌ها در یک طرف نمودار دو برابر می‌شود و برابر با 2^n است و تعداد یال‌ها یک واحد کم‌تر از تعداد رأس‌ها است، یعنی $2^n - 1$ می‌باشد. حال فرض کنید e_n تعداد یال‌های موجود در گرافی برای برج هانوی n دیسک باشد. در این صورت رابطه بازگشتی بین تعداد یال‌های گراف و تعداد دیسک‌ها برقرار می‌باشد:

$$\begin{cases} e_1 = 3, \\ e_{n+1} = 3e_n + 3. \end{cases}$$

از مطالب فوق قضیه زیر نتیجه می‌شود:

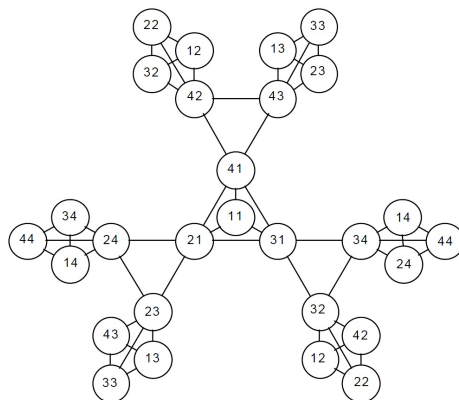
قضیه ۱.۳. برای برج هانوی با n دیسک (با ۳ پایه) حداقل تعداد حرکت‌های مورد نیاز برای حرکت همه‌ی n دیسک از یک میله به میله‌ی دیگر $2^n - 1$ است.

۵.۳. ۴- گراف مربوط به برج هانوی با چهار میله. برج هانوی با ۴ پایه را در نظر بگیرید [۱۵] که تنها یک دیسک روی یکی از میله‌های آن قرار دارد. در این حالت تنها ۳ حرکت مختلف وجود دارد. گراف مربوط به این حالت توسط یک چهار وجهی در فضای ۳ بعدی به صورت شکل ۱۰ مشخص می‌شود.



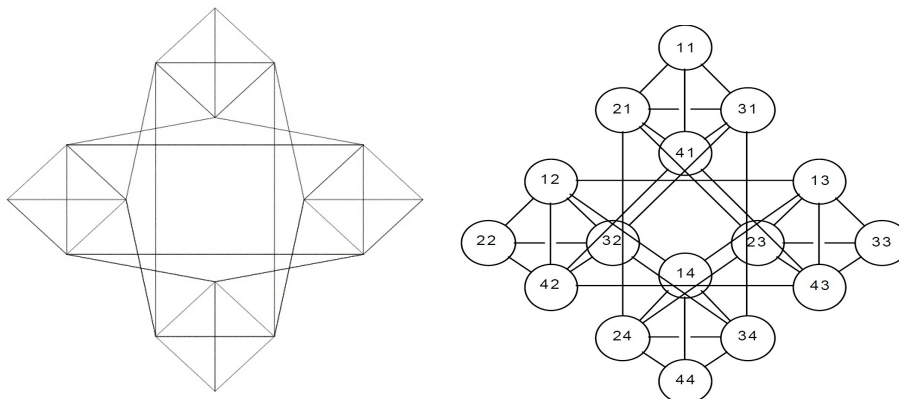
شکل ۱۰: گراف برجی با ۱ دیسک و ۴ میله

در حالتی که ۲ دیسک روی اولین پایه قرار گیرید، $4 \times 4 = 16$ وضعیت مختلف به وجود می‌آید. اگر همه حرکتهای ممکن را برای حل آن دنبال کنیم (یعنی گراف آن را مشابه حالت قبل رسم کنیم)، گرافی نظیر شکل ۱۱ به دست می‌آید:



شکل ۱۱: گراف برجی با ۲ دیسک و ۴ میله

همانطور که مشاهده می‌شود برخی وضعیت‌ها در شکل ۱۱ تکراری می‌باشند. این رأس‌های تکراری به منظور جلوگیری از تداخل یال‌ها رسم شده‌است. اگر گراف را بدون تکرار وضعیت‌های مشابه در فضای سه بُعدی رسم کنیم، یک چهار وجهی مشابه شکل ۱۲ حاصل می‌شود.



شکل ۱۲: گراف برجی با ۲ دیسک و ۴ میله بدون تداخل یال‌ها و شکل فضایی مربوط

همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، از روی گراف می‌توان برای تغییر از یک وضعیت به وضعیت دیگر استفاده کرد. از روی گراف رسم شده در شکل ۱۲ مشخص است که وضعیت‌های زیر برگشت‌پذیر می‌باشند:

$$21 \rightarrow 41 \rightarrow 43 \rightarrow 23 \rightarrow 21$$

$$41 \rightarrow 31 \rightarrow 32 \rightarrow 42 \rightarrow 41$$

$$21 \rightarrow 31 \rightarrow 34 \rightarrow 24 \rightarrow 21$$

$$12 \rightarrow 13 \rightarrow 43 \rightarrow 42 \rightarrow 12$$

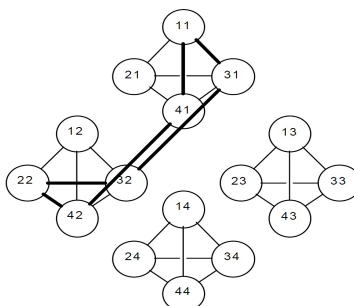
$$12 \rightarrow 14 \rightarrow 34 \rightarrow 32 \rightarrow 12$$

$$14 \rightarrow 13 \rightarrow 23 \rightarrow 24 \rightarrow 14$$

همچنین از روی گراف اگر بخواهیم هر دو دیسک را از میله‌ی شماره‌ی یک به میله‌ی شماره‌ی دو منتقل کنیم، دو تا از کوتاه‌ترین مسیرها عبارتند از:

$$۱۱ \rightarrow ۳۱ \rightarrow ۳۲ \rightarrow ۲۲ \text{ یا } ۱۱ \rightarrow ۴۱ \rightarrow ۴۲ \rightarrow ۲۲$$

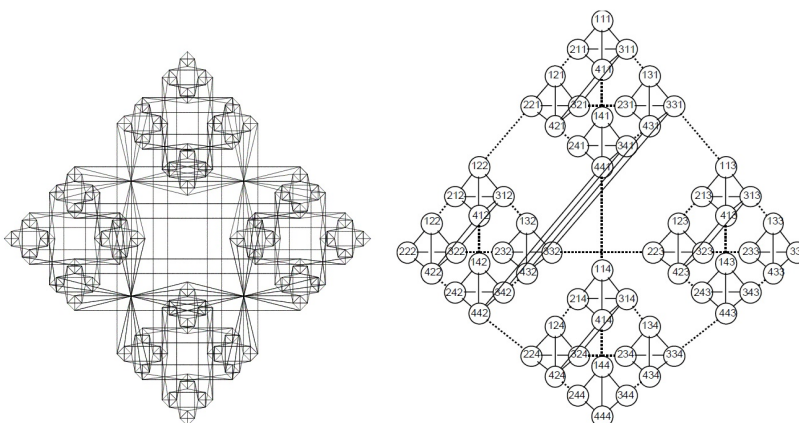
و این دو مسیر از گراف شکل ۱۲ در شکل ۱۳ مشخص شده‌اند:



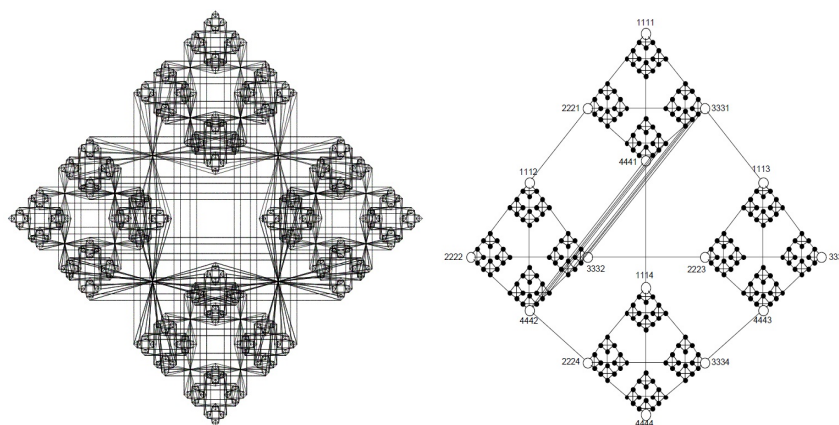
شکل ۱۳: نحوه‌ی تبدیل دو وضعیت به یکدیگر

از طرف دیگر گراف رسم شده شامل چهار کپی از گراف‌های کوچک‌تر می‌باشد که با ۱۲ یال به یکدیگر متصل شده‌اند و تشکیل یک چهار وجهی را داده‌اند. به طور مشابه این مطلب برای برج هانوی چهار میله‌ای، با هر تعداد دیسک عملی است. مثلاً گراف برجی با سه دیسک، شامل چهار کپی از گراف برجی با دو دیسک می‌باشد که در گوشه‌ها به یکدیگر متصل شده‌اند. در حالت کلی گراف مربوط به مساله‌ی برج هانوی چهار میله‌ای با n دیسک شامل چهار کپی از گراف برجی با $(n-1)$ دیسک می‌باشد. از بحث بالا نتیجه می‌شود که مساله‌ی برج هانوی با چهار میله دارای ساختار بازگشتی بوده و گراف مربوط به آن خود یک فراکتال است.

شکل ۱۴ و ۱۵ با به کارگیری این ساختار بازگشتی رسم شده است اگر بخواهیم به صورت مستقیم این گراف را رسم کنیم روزهای زیادی طول خواهد کشید تا تمام $۶۴ = ۴^۳$ موقعیت ممکن و حرکات مجاز آنها را پیدا کنیم، البته ممکن است اشتباهات زیادی در طول مسیر داشته باشیم. که هر یک از این گراف‌ها خود یک فراکتال سه بعدی می‌باشد [۱۵، ۱۸].



شکل ۱۴: گراف برجی با ۳ دیسک و ۴ میله و شکل فضایی متناظر با آن که با رابطه‌ی بازگشتی رسم شده است



شکل ۱۵: گراف برجی با ۴ دیسک و ۴ میله و شکل فضایی متناظر با آن که با رابطه‌ی بازگشتی رسم شده است

مراجع

- [۱] ا. بابلیان، مباحثی در ریاضیات گسسته، انتشارات مبتکران، ۱۳۷۵.
- [۲] س. کردرستمی، ر. احمدزاده گرامی، آ. قانع، ص. پورجعفر، مروری بر برج هانوی و ارایه یک فرمول جدید، مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال ۴ شماره ۱۴ (۱۳۸۶)، ۴۷-۴۱.
- [۳] ع. مشهدی، ک. رسولزاده طباطبایی، پ. آزادفلاح، ع. سلطانی فر، توانایی برنامه‌ریزی و سازمان دهی در کودکان مبتلا به اختلال نارسایی توجه/فزون کنشی، مطالعات تربیتی و روان شناسی، سال ۱۱ شماره ۱ (۱۳۸۹)، ۱۵۱-۱۷۰.
- [4] S. Epp, *Discrete Mathematics: Introduction to Mathematical Reasoning*, Nelson Education, 2011.
- [5] A. M. Hinz and et. al., *The Tower of Hanoi—Myths and Maths*, Springer Science Business Media, 2013.
- [6] E. Rufati, B. Rahmani and B. Percinkova, Analysis of Recursive Algorithms for Solving the Problem of the Tower of Hanoi, *Anglisticum Journal*, **2** (2016) 12–18.
- [7] M. Shinoda, E. Teufl and S. Wagner, Uniform spanning trees on Sierpinski graphs, *Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, **11** (2014) 737-780.
- [8] E. Lucas, *Recreations Mathematiques*, **3**, Gauthier-Villars, Paris, 1893.
- [9] J. P. Allouche, D. Astoorian, J. Randall and J. Shallit, Morphisms, squarefree strings, and the tower of Hanoi puzzle, *Amer. Math. Monthly*, **101** (1994) 651–658.
- [10] E. L. Spitznagel, *Selected topics in mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1971.
- [11] E. Vakil, M. Lowe and C. Goldfus, Performance of Children With Developmental Dyslexia on Two Skill Learning Tasks—Serial Reaction Time and Tower of Hanoi Puzzle A Test of the Specific Procedural Learning Difficulties Theory, *J. Learn. Disabil.*, **48** (2015) 471–481.
- [12] R. Bull, K. A. Espy and T. E. Senn, A comparison of performance on the Towers of London and Hanoi in young children, *J. Child. Psychol. Psychiatry*, **45** (2004) 743–754.

- [13] R. Snapp, *Tower of Hanoi*, Lecture Notes for CS 5, 2005.
- [14] B. A. Brousseau, Tower of Hanoi with more pegs, *J. Recr. Math.*, **8** (1975-76) 169-176.
- [15] M. K. Lee, The graph for the Tower of Hanoi with four pegs, *Pythagoras*, **57** (2003) 27-31.
- [16] A. M. Hinz and P. Daniele, On the planarity of Hanoi graphs, *Expo. Math.*, **20** (2002) 263-268.
- [17] C. A. Knoblock, *Abstracting the tower of Hanoi*, Working Notes of AAAI-90 Workshop on Automatic Generation of Approximations and Abstractions, 1990.
- [18] H. Masum, S. Christensen and F. Oppacher, *The Turing Ratio: Metrics For Open-ended Tasks*, Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, New York, USA, 2002.

بهزاد کفاش

یزد، اردکان، دانشگاه اردکان، دانشکده فنی و مهندسی، گروه علوم مهندسی

Bkafash@Ardakan.ac.ir ,Bkafash@Gmail.com

نویسنده این مقاله، متولد شهریورماه ۱۳۶۰ در شهر یزد است که در سال ۱۳۸۳ مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض را در دانشگاه پیام نور به پایان رسانید. وی در سال ۱۳۸۶ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی را در دانشگاه یزد و با راهنمایی پرفسور سید محمد مهدی حسینی به اتمام رسانید و سپس در سال ۱۳۹۲ موفق به اخذ دکتری تخصصی ریاضی کاربردی (گرایش کنترل) تحت نظر پرفسور سید مهدی کرباسی و دکتر علی دلاورخلفی از این دانشگاه شد. وی در حال حاضر استادیار دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه اردکان است. زمینه تحقیقاتی مورد علاقه نامبرده، روش های حل عددی مسایل کنترل بهینه قطعی و تصادفی، همچنین کاربردهای آنها می باشد.

