

کاربردی از الگوریتم نقطه تقریبی در مدیریت ریسک زنجیره تأمین

ملیحه امینی پزوه

چکیده. امروزه تولید کالاهایی با کیفیت و با کمترین هزینه و ارائه آن به مشتریان در کوتاه‌ترین زمان ممکن، موجب افزایش رقابت بین تولیدکنندگان شده است. به همین علت زنجیره تأمین، یعنی تمام عناصر دخیل در تولید یک محصول تا ارائه آن به مشتری، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این زنجیره تأمین همواره می‌تواند توسط عوامل مختلف داخلی و خارجی تحت عنوان ریسک تحدید شود. از این رو در چنین شرایطی، تولیدکننده‌ای می‌تواند در بازار رقابت پیروز شود که با برنامه ریزی و انجام عملیات‌هایی برای تولید بهینه، اثر ریسک‌ها را کاهش دهد. در این مقاله می‌خواهیم مسأله بهینه‌سازی تولید در شرایط تحت ریسک را به‌صورت یک مسأله بهینه‌سازی چند هدفه محدب فرمول‌بندی کنیم و الگوریتم نقطه تقریبی برای حل آن را معرفی کنیم.

۱. مقدمه

در این بخش به بیان مفاهیم مورد نیاز خواهیم پرداخت. ابتدای بحث را با مطالبی از زنجیره تأمین آغاز می‌کنیم.

۱.۱. مدیریت زنجیره تأمین. افزایش رقابت تجاری، سازمان‌ها را مجبور به بهبود کارایی در بسیاری از جنبه‌های تجاری خود نمود. به همین دلیل مدیران صنایع درک کردند که صرفاً تولید یک محصول کیفی کافی نیست، بلکه باید به عرضه محصولات با توجه به خواسته‌های مورد نظر مشتری و با کیفیت و هزینه مورد نظر آنها توجه شود. در چنین شرایطی سازمان‌ها دریافته‌اند که باید به مدیریت واحدهایی که ورودی‌های سازمان را تأمین می‌کنند و همچنین، مراکز مرتبط با تحویل و خدمات بعد از فروش محصول به مشتری، بپردازند. با چنین نگرشی، نظریه زنجیره تأمین و مدیریت آن پا به عرصه وجود نهاد [۹]. امروزه رقابت شدید در بازارهای جهانی، ظهور محصولات با چرخه کوتاه عمر و بالارفتن انتظارات مشتریان، سازمان‌های تجاری را مجبور به سرمایه‌گذاری بر روی زنجیره تأمین خود و مدیریت آن، نموده است. علاوه بر این بروز عواملی نظیر مسائل سیاسی، نوسانات تقاضا، تغییرات تکنولوژی، ناپایداری‌های مالی و حوادث طبیعی موجب افزایش عدم قطعیت و بروز ریسک‌هایی در زنجیره تأمین شده و باعث شکل‌گیری مدیریت ریسک زنجیره تأمین شده است.

- **زنجیره تأمین.** در کتاب‌های مدیریت تعاریف مختلفی برای زنجیره تأمین بیان شده است که در زیر به برخی از آنها اشاره می‌کنیم: به یک زنجیره تأمین شامل همه مراحل است که به طور مستقیم یا غیرمستقیم خواسته‌های مشتری را برآورده می‌سازد. زنجیره تأمین تمامی موارد مرتبط با شبکه تدارکات را در بر می‌گیرد که شامل تأمین‌کنندگان، مراکز تولیدی، انبارها، مراکز توزیع و بازار خرده‌فروشان، مواد خام، موجودی‌های در حال ساخت و محصولات نهایی جاری بین آنها می‌شود [۱]. شبکه‌ای از تسهیلات و توزیع کنندگان که عملیات تأمین مواد، تغییر مواد به محصولات نیم‌ساخته و محصولات نهایی و توزیع این محصولات بین مشتریان را انجام می‌دهند زنجیره تأمین گویند [۲].
- **مدیریت زنجیره تأمین.** مدیریت زنجیره تأمین نیز دارای تعاریف مختلفی می‌باشد که در زیر به اهم آنها پرداخته می‌شود:

به مجموعه‌ای از رویکردهایی که برای یکپارچه سازی موثر تأمین‌کنندگان، تولیدکنندگان، انبارها و فروشگاه‌ها به‌کار می‌رود به منظور اینکه کالا به میزان مناسب تولید شده و به مقدار مناسب در زمان و مکان مناسب توزیع گردد تا هزینه سیستم کمینه شده و همچنین نیازمندی‌های سطح سرویس برآورده شود را مدیریت زنجیره تأمین گویند [۴].

مدیریت زنجیره تأمین، مدیریت جریان مواد، جریان اطلاعات و جریان مالی از طریق شبکه‌ای از سازمان‌ها نظیر تأمین‌کنندگان، تولیدکنندگان، تهیه‌کنندگان، توزیع‌کنندگان و خرده‌فروشان است که هدف آن تولید و تحویل محصولات یا خدمات به مشتریان می‌باشد. مدیریت زنجیره تأمین فعالیتها و فرآیندهای واحدهایی نظیر بازاریابی، فروش، تولید، طراحی محصول، خرید، مالی و تکنولوژی اطلاعات درون شبکه‌ای از سازمان‌ها را هماهنگ می‌کند [۸].

• **بازده.** بازده در سرمایه‌گذاری نیروی محرکی است که ایجاد انگیزه می‌کند و نتیجه خوبی برای سرمایه‌گذار محسوب می‌شود. در واقع منظور از بازده، درآمد حاصل از سرمایه‌گذاری است. به طور مثال وقتی فردی سهامی خریداری می‌کند، اولاً با دریافت سود نقدی سالانه و ثانیاً با درآمد ناشی از افزایش قیمت سهام کسب درآمد می‌کند که مجموع این دو را بازده گویند.
انواع بازده عبارت است از:

بازده تحقق یافته: بازدهی است که واقع شده یا بازدهی که کسب شده و به وقوع پیوسته است.
بازده مورد انتظار: بازده تخمینی یک دارایی که سرمایه‌گذاران انتظار دارند در یک دوره به دست آورند.
این دو بازده تفاوت‌هایی با هم دارند. اولاً مبلغ بازده تحقق یافته، واقعی است در حالی که مبلغ بازده مورد انتظار، برآوردی است. ثانیاً بازده مورد انتظار با عدم اطمینان همراه است در حالی که بازده تحقق یافته با عدم اطمینان همراه نیست.
اجزای بازده عبارتند از:

سود دریافتی: سودی است که به‌صورت جریان نقدی دوره سرمایه‌گذاری بوده و می‌تواند به شکل بهره یا سود تقسیمی باشد.
زیان سرمایه: سرمایه‌ای ناشی از اختلاف بین قیمت خرید و قیمت فروش دارایی است.

• **سبب سرمایه‌گذاری چیست؟** یکی از اصول سرمایه‌گذاری مثلاً سرمایه‌گذاری در بورس این است که سهام باید متنوع باشد. حتماً این ضرب‌المثل را شنیده‌اید که می‌گوید: «همه تخم مرغ‌های خود را درون یک سبد قرار ندهید، مفهومی این است که اگر یک سبد حاوی تمام تخم مرغ‌ها باشد و سبد از دست بیفتد، تمام دارایی خود را از دست خواهیم داد و بهتر است در دو یا چند سبد قرار دهیم که اگر یکی از بین رفت مقداری باقی بماند». در بازار سهام نیز این نکته خیلی مهم و جدی است. باید سهام متنوعی داشته باشیم که این نوع تنوع در تمامی عوامل تاثیرگذار بر قیمت سهام را پوشش دهد. فرض کنید شما سهام یک شرکت پتروشیمی را خریداری کرده‌اید. اگر در شرایطی بازار پتروشیمی تحت تأثیر نوسانات مثلاً سیاست‌های ارزی قرار گیرد، شما همه دارایی‌های خود را از دست می‌دهید. اگر سهام پتروشیمی را که گرایش صادراتی دارد خریداری کنید و هم چنین سهام یک شرکت خودرو ساز را هم که گرایش وارداتی دارد خریداری کنید، سبد سهام شما متوازن شده و در شرایطی که سیاست‌های ارزی دست خوش تغییر گردد، آنجایی که قیمت ارز کاهش پیدا می‌کند، یکی از آن‌ها ضرر کرده و دیگری سود می‌کند و بالعکس. همچنین مقدار ضرری که متحمل می‌شویم از این طریق جبران می‌شود. پس گفتنی است که دو سهم یا چند سهم متفاوت در سبد سهام خود داشته باشیم که در این صورت در برابر نوسانات مقاومت بیشتری خواهد داشت و سودش تضمین می‌شود و یا حداقل ضرر نمی‌کند و سود و زیانش با هم متوازن می‌گردد. نکته دیگر که باید مورد توجه قرار گیرد این است که: «همیشه با سرمایه مازاد وارد بازار سهام شوید.» گاهی اوقات به دلیل هیجاناتی که در بازار وجود دارد و انتظاری که از رشد قیمت یک سهم به وجود می‌آید، سبب می‌شود که افرادی حتی خانه مسکونی خود را بفروشند و همه دارایی خود را جمع کرده تا سهامی در بازار خریداری کنند به این امید که این سهام در آینده دارایی‌های آن‌ها را چندین برابر کند.

• **ریسک.** تعاریف مختلفی برای واژه ریسک وجود دارد، از جمله:
امکان ایجاد ضرر، عدم قطعیت، پراکندگی نتایج واقعی از نتایج مورد انتظار و شانس به وجود آمدن خسارت و ضرر یا به میزان اختلاف میان بازده واقعی سرمایه‌گذاری با بازده مورد انتظار ریسک می‌گویند.

ریسک، نوعی عدم اطمینان به آینده است که قابلیت محاسبه را داشته باشد. اگر نتوان میزان عدم اطمینان به آینده را محاسبه کرد، ریسک نیست، بلکه فقط عدم اطمینان است. به همین جهت، به دلیل محاسبه عدم اطمینان در قالب ریسک، می‌توان آن را مدیریت و کنترل کرد. پدیده

ریسک یکی از کلیدی ترین شاخص ها در فرآیند تصمیم در حوزه سرمایه‌گذاری، امور مربوط به بازارهای مالی و انواع فعالیت‌های اقتصادی است. در ادامه دو عامل مهم ریسک‌های شناسایی شده را شرح می‌دهیم:

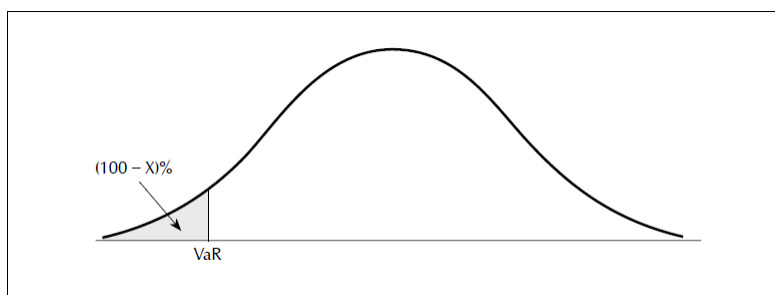
ریسک عملیاتی: امروزه سازمان‌ها به دنبال ارتقاء تکنیک‌هایی برای اندازه‌گیری، مانیتور کردن و کاهش ریسک‌های عملیاتی هستند. به عنوان مثال، نتایج به دست آمده از فرآیندهای ناموفق یا تجهیزات غیر کافی، کارکنان و سیستم‌های غیر کارا در حوادث خارجی، خسارت‌های ناشی از فرآیندها، کارکنان و سیستم‌های نامناسب، ناشی از حوادث بیرون از سازمان است.

ریسک اختلال: به اختلال ناشی از بلایای طبیعی و یا انسان ساز مانند سیل، زلزله، طوفان، ضعف تجهیزات، بحران‌های اقتصادی مانند ارزش گذاری پول، اعتصابات کارگری، حملات تروریستی و ... اشاره دارد.

اساس و پایه تصمیمات سرمایه‌گذاری، رابطه ریسک و بازده است. میان ریسک و بازده یک رابطه خطی مثبت وجود دارد به نحوی که با افزایش ریسک، بازده مورد انتظار نیز افزایش یابد. در دوره زمانی بلند مدت مانند دوره‌های ۲۰ ساله یا بیشتر، رابطه میان ریسک و بازده باید مثبت باشد. در دوره‌های زمانی کوتاه مدت یک یا دو ساله انتظار می‌رود رابطه ریسک و بازده همیشه مثبت باشد. با این حال رابطه ممکن است منفی و یا با شیبی به سمت پایین باشد. برای تخمین ریسک کل بازده مورد انتظار از انحراف معیار استفاده می‌شود. انحراف معیار عبارت است از اندازه‌گیری ریسک یک دارایی یا یک پرتفلیو.

• **معیار VaR .** ارزش در معرض ریسک^۱ به اختصار VaR یا مبلغ تحت ریسک، بیانگر حداکثر زیان مورد انتظار روی سبد دارایی‌ها یا مجموعه سرمایه‌گذاری در طول افق زمانی معین مثل یک روز یا یک ماه و یا یک هفته در شرایط عادی بازار و در سطح اطمینان معین می‌باشد. به عبارت ساده تر، تفسیر این معیار به صورت ذیل است:

«ما X درصد اطمینان داریم که طی N روز آتی، قطعاً بیشتر از مبلغ V متحمل زیان نخواهیم شد.» متغیر V همان ارزش در معرض ریسک یا VaR سبد سرمایه‌گذاری می‌باشد که در بردارنده دو پارامتر N یعنی افق زمانی و X یعنی سطح اطمینان است.

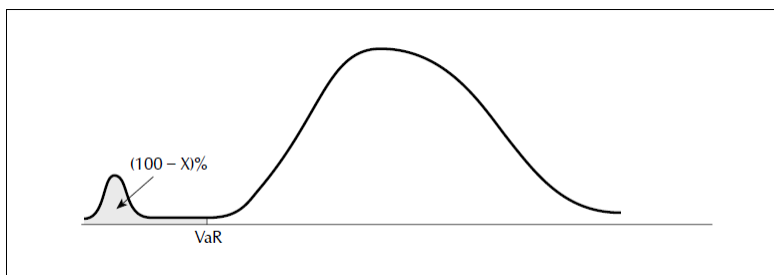


شکل ۱: محاسبه VaR با استفاده از توزیع احتمالات تغییرات در ارزش بده با سطح اطمینان $X\%$

به طور کلی، با فرض اینکه افق زمانی ما N روزه و سطح اطمینان X باشد، مبلغ تحت ریسک یا VaR مقدار زبانی است که معادل با $(100 - X)\%$ منحنی توزیع احتمالات تغییرات ارزش سبد در طی N روز آینده است. برای مثال، هنگامی که $N = 5$ و $X = 97$ است، VaR زبانی معادل ۳٪ توزیع احتمال تغییرات ارزش سبد در طول پنج روز آتی می‌باشد. نمودار شکل (۱)، معیار VaR را برای موقعیتی که تغییرات در ارزش سبد تقریباً به صورت نرمال توزیع شده‌اند، نشان می‌دهد. این معیار نشان می‌دهد تا چه قدر ممکن است ما دچار زیان یا ضرر شویم یا به عبارت دیگر حداکثر میزان زیان چقدر است؟! این همان سؤالی است که همه مدیران به دنبال پاسخ آن هستند.

برخی تحقیقان نشان داده‌اند که استفاده از معیار VaR ممکن است معامله گران را ترغیب نماید تا سبدهای را انتخاب نمایند تا توزیع بازده آن مشابه نمودار (۲) باشد. سبدهای نمودار (۱) و (۲) هر دو دارای VaR یکسانی هستند ولی سبد نمودار (۲) ریسکی‌تر است زیرا میزان زیان بالقوه آن خیلی بیشتر است.

^۱ Value at Risk

شکل ۲: مقدار VaR با میزان ضرر بالقوه بزرگتر

• معیار $CVaR$. معیار دیگری که در اینجا بدان اشاره می‌کنیم متغیر ارزش مشروط در معرض ریسک^۲ یا $CVaR$ است. گفتیم که VaR در واقع بیان‌کننده این مطلب است که «حداکثر زیانی که متوجه ما می‌شود، چقدر است؟» اما $CVaR$ می‌پرسد: «اگر اوضاع نامطلوب باشد، انتظار داریم چقدر متحمل زیان می‌شویم؟» $CVaR$ بیانگر مقدار زیان در طی یک دوره N روزه است مشروط به اینکه به اندازه $(100 - X)\%$ درصد در قسمت برآمدگی چپ منحنی توزیع قرار داشته باشیم. برای مثال با $X = 99$ و $N = 10$ ، $CVaR$ بیانگر متوسط مبلغی است که در طول یک دوره ۱۰ روزه از دست می‌دهیم با فرض اینکه یک درصد بدترین حالت رخ دهد. برای جزئیات بیشتر به منبع [۱۰] مراجعه کنید.

با توجه به تمامی مطالب فوق و طبق این که این دو معیار از جمله معیارهای مهم در ریاضیات مالی و مدیریت به شمار می‌آیند، برخی از محققان برای پیشبرد اهداف خود و متناسب با نیازهایشان، تعاریف متعددی برای این دو معیار بیان کرده‌اند که در زیر به یکی دیگر از این تعاریف اشاره می‌کنیم:

فرض کنید $F_w(u) = P\{w \leq u\}$ تابع توزیع جمعی متغیر تصادفی w نمایش دهنده هزینه باشد. ارزش در معرض خطر w ، (VaR) با سطح اطمینان $\alpha \in [0, 1]$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$VaR_\alpha(w) = \min\{u : F_w(u) \geq \alpha\}$$

یعنی مجموعه همه u های متعلق به $\mathbb{R}$ که تابع توزیع تجمعی هزینه $F_w(u)$ بزرگتر و مساوی α شود که در این مجموعه مینیمم آن‌ها مد نظر ماست. در واقع کوچکترین عددی است که هزینه را از α بزرگتر یا با آن برابر می‌کند.

با این حال VaR نمی‌تواند حالت‌هایی که، هزینه توزیع فراتر از سطح اطمینان باشد را پوشش دهد و بنابراین میزان هزینه را زمانی از حد VaR بیشتر شود، توضیح نمی‌دهد. اینجاست که نیاز به معیار $CVaR$ برای سرمایه‌گذاران احساس می‌شود.

از طرف دیگر، تمرکز $CVaR$ بر دنبال کردن هزینه توزیع، یعنی نتایجی با هزینه‌های بزرگتر از سطح اطمینان است. فرض کنید $F_w(u)$ تابع توزیع پیوسته باشد. ارزش در معرض خطر شرطی w با سطح اطمینان $\alpha \in [0, 1]$ یعنی $CVaR_\alpha(w)$ برابر با میزان انتظار از w است به طوری که $w \geq VaR_\alpha(w)$. در حالت کلی $CVaR_\alpha(w)$ برابر با میانگین نتایج بزرگتر از $VaR_\alpha(w)$ نیست و به معنی توزیع α - دنباله تعمیم یافته

$$CVaR_\alpha(w) = \int_{-\infty}^{\infty} u dF_w^\alpha(u)$$

^۲Conditional Value at Risk

تعریف می‌شود که در آن

$$F_w^\alpha(u) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } u < VaR_\alpha(w) \\ \frac{F_w(u) - \alpha}{1 - \alpha} & \text{اگر } u \geq VaR_\alpha(w) \end{cases}$$

خلاصه‌ای از تعاریف بالا:

ارزش در معرض ریسک (VaR) در یک $\alpha \circ \circ 1\%$ سطح اطمینان، هزینه هدفمند سبد عرضه است به‌طوری‌که برای $\alpha \circ \circ 1\%$ سناریوها، نتیجه بیشتر از VaR نشود. به بیان دیگر، در $(1 - \alpha) \circ \circ 1\%$ سناریوها، نتیجه ممکن است از VaR بیشتر شود. ارزش در معرض ریسک شرطی ($CVaR$) در یک $\alpha \circ \circ 1\%$ سطح اطمینان، هزینه مورد انتظار از سبد عرضه در بدترین حالت $(1 - \alpha) \circ \circ 1\%$ است. به بیان دیگر، ما اجازه می‌دهیم $(1 - \alpha) \circ \circ 1\%$ نتایج از VaR بیشتر شوند و مقدار میانگین این نتایج را با $CVaR$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین VaR سطح هزینه قابل قبول است که می‌خواهیم اعداد حاصل از نتایج مینیمم شوند و $CVaR$ نتایج این سبد عرضه را در نظر می‌گیرد که در آن هزینه‌ها از VaR بیشتر می‌شود. چون VaR و $CVaR$ قسمت‌های مختلف هزینه توزیع را اندازه‌گیری می‌کنند، VaR ممکن است برای بهینه‌سازی سبد عرضه بهتر باشد هرگاه مدل‌های خوبی برای خطوط در دسترس نباشد. در غیر اینصورت $CVaR$ عالیست. این فصل با انتخاب بهینه سبد سهام عرضه در یک محیط ساخت-سفرارش تحت اختلالات ریسک زنجیره عرضه سر و کار دارد. در بخش بعدی یک مسأله به عنوان یک مسأله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط همراه با یک یا دو تابع هدف فرمول‌بندی می‌شود و یک روش ارزش در معرض ریسک و ارزش مشروط در معرض ریسک برای کنترل ریسک اختلالات عرضه به کار می‌رود. در این مقاله می‌خواهیم مسأله بهینه‌سازی تولید در شرایط تحت ریسک را به‌صورت یک مسأله بهینه‌سازی چند هدفه فرمول‌بندی کنیم و در نهایت با معرفی الگوریتم نقطه تقریبی در بخش بعدی، به حل این مسأله بپردازیم. لذا در انتهای این بخش مطالبی از بهینه‌سازی چند هدفه را یادآوری می‌کنیم.

۲.۱. مسائل بهینه‌سازی چند هدفه. فرم کلی یک مسأله برنامه ریزی چند هدفه به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \in S \end{aligned} \quad (P)$$

که در آن $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $S \subseteq \mathbb{R}^n$. مانند مسائل بهینه‌سازی با یک تابع هدف، مسائل بهینه‌سازی چند هدفه نیز به مسائل خطی، غیر خطی، مقید، نامقید، محدب و ... تقسیم می‌شوند. در صورتی که تمام توابع در مسأله (P) و مجموعه S محدب باشند، آنگاه مسأله را یک مسأله محدب می‌نامیم. در مسأله بهینه‌سازی (P)، به طور همزمان m تابع هدف مینیمم می‌شوند و معمولاً چون با یکدیگر متضاد هستند، پیدا کردن یک نقطه که تمام تابع هدف را مینیمم کند امکان‌پذیر نیست. محققان روش‌هایی برای تولید زیر مجموعه‌ای از مجموعه جواب‌های مسأله (P) به نام مجموعه جواب‌های مؤثر، مؤثر قوی و مؤثر ضعیف طراحی کرده‌اند که به بهینه‌سازی پارتو^۳ [۶] نیز مشهور است. سپس از بین مجموعه جواب به‌دست آمده، بهترین جواب توسط تصمیم‌گیرنده در یک فرآیند تصمیم‌گیری انتخاب می‌شود. فرض کنید $I = \{1, 2, \dots, m\}$. برای هر بردار $u, v \in \mathbb{R}^m$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u \preceq v &\iff v_j - u_j \geq 0, \quad j \in I, \quad u \neq v \\ u \prec v &\iff v - u \in \mathbb{R}_{++}^m \iff v_j - u_j > 0 \quad j \in I \end{aligned}$$

³Pareto

تعریف ۱.۱.

۱. بهینه پارتو ضعیف^۴:

نقطه $x^* \in S$ را نقطه بهینه پارتو ضعیف (WPO) یا جواب مؤثر پارتو ضعیف (WPES) برای مسأله (P) گوئیم اگر فقط اگر

$$\nexists x \in S \quad s.t. \quad f(x) \prec f(x^*)$$

مجموعه تمام جواب‌های مؤثر ضعیف مسأله (P) را با S_{WE} نمایش می‌دهیم.

۲. بهینه پارتو قوی^۵:

نقطه $x^* \in S$ را نقطه بهینه پارتو قوی (SPO) یا جواب مؤثر پارتو قوی (SPES) برای مسأله (P) گوئیم اگر فقط اگر

$$\nexists x \in S \quad s.t. \quad f(x) \preceq f(x^*)$$

مجموعه تمام جواب‌های مؤثر قوی مسأله (P) را با S_{SE} نمایش می‌دهیم.

تعاریف فوق را می‌توان برای یک همسایگی از x^* ، یعنی $N(x^*)$ نیز بیان کرد:

تعریف ۲.۱. نقطه x^* را نقطه بهینه پارتو موضعی گوئیم اگر فقط اگر یک همسایگی $N(x^*)$ موجود باشد به طوری که x^* روی $N(x^*) \cap S$ بهینه پارتو باشد. به طور مشابه بهینه پارتو موضعی ضعیف و بهینه پارتو موضعی قوی تعریف می‌شود.

از آنجا که الگوریتم نقطه تقریبی با مفهوم زیردیفرانسیل سروکار دارد، در ادامه به بیان تعاریفی در این زمینه می‌پردازیم:

تعریف ۳.۱. فرض کنید S یک زیر مجموعه دلخواه از $\mathbb{R}^n$ باشد. غلاف محدب^۶ برای S را با $convS$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$x \in convS \iff x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \quad s.t. \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

که k عدد صحیح مثبت و $x_j \in S$ باشند. به عبارت دیگر اشتراک همه ترکیبات محدب عناصر S را غلاف محدب برای S گوئیم.

تعریف ۴.۱. فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب و ناتهی باشد و تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ محدب باشد، در این صورت بردار $\xi \in \mathbb{R}^n$ زیرگرادیان f در نقطه $\bar{x} \in S$ است هرگاه:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x}) \quad , \quad \forall x \in S$$

و مجموعه تمام زیرگرادیان‌های تابع محدب f در نقطه x را زیردیفرانسیل می‌نامیم و با $\partial f(x)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi^t(y - x) \leq f(y) - f(x) \quad \forall y \in dom.f\}$$

در زیر ابتدا چند خاصیت مهم از زیر دیفرانسیل توابع را بیان می‌کنیم که برای اثبات آن می‌توان به [۵] مراجعه کرد.

قضیه ۵.۱. فرض کنید توابع $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ در نقطه $x^* \in \mathbb{R}^n$ لیپ شیتس موضعی باشند، در این صورت برای اسکالرهایی $\lambda_i \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\partial\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i\right)(x) \subset \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial f_i(x)$$

^۴Weak Pareto optimum ^۵Strong Pareto optimum ^۶Convex Hull

در رابطه فوق تساوی وقتی برقرار است که توابع f_i محدب و $\lambda_i > 0$ باشند.
و اگر توابع $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ لیپ شیتس موضعی باشند، در این صورت تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \max_{i=1, \dots, m} f_i(x)$$

لیپ شیتس موضعی در نقطه $x^* \in \mathbb{R}^n$ است و به علاوه

$$(1) \quad \partial f(x^*) \subset \text{conv}\{\partial f_i(x^*) \mid i \in I(x^*)\}$$

به طوری که $I(x^*) = \{i \in 1, 2, \dots, m \mid f_i(x^*) = f(x^*)\}$.

قضیه ۶.۱. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در $x^* \in \mathbb{R}^n$ لیپ شیتس موضعی باشد و به علاوه در نقطه x^* مینیمم (موضعی) باشد، بنابراین:

$$0 \in \partial f(x^*)$$

و اگر تابع f محدب باشد، شرط فوق شرط کافی برای مینیمم سراسری x^* است.

همچنین اگر $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ محدب و S مجموعه‌ای محدب باشد، در این صورت شرایط زیر معادل هستند:

$$(1) \quad 0 \in \partial f(x) + N_S(x)$$

(۲) f روی S در نقطه x مینیمم سراسری است.

۲. توصیف مسأله

مسأله محدب چند معیاره زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

s.t

$$(P) \quad Ax = b, \quad x \in S$$

جایی که $f := (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ، $b \in \mathbb{R}^l$ و $S \subseteq \mathbb{R}^n$ است که برای $\forall j \in I := \{1, 2, \dots, m\}$ توابع f_j محدب و نیم پیوسته پایینی هستند ولی لزوماً هموار نبوده و مجموعه قیود S محدب و فشرده در نظر گرفته شده است.

قبل از وارد شدن به مبحث شرایط بهینگی یادآور می‌شویم که تابع مشخصه روی S به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(2) \quad \delta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \in S \\ +\infty & \text{اگر } x \notin S \end{cases}$$

و طبق تعریف زیر گرادیان واضح است که زیر دیفرانسیل از تابع مشخصه در S همان مخروط نرمال است.

قضیه ۱.۲. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. نقطه x^* جواب بهینه مسأله

$$(3) \quad \min_{x \in S} f(x)$$

است اگر و فقط اگر جواب بهینه مسأله

$$(4) \quad \min_x f(x) + \delta_S(x)$$

باشد. که در آن $\delta_S(x)$ تابع مشخصه روی S است.

قضیه ۲.۲. (شرایط بهینگی برای مسئله (P)) [۲]:

فرض کنید برای هر j توابع f_j محدب و نیم پیوسته پایینی روی S و مجموعه S فشرده و محدب باشد. در این صورت داریم:

(۱) نقطه $x^* \in X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \in S\}$ نقطه بهینه پارتو ضعیف (WPO) است اگر و فقط اگر $\exists \lambda \in \mathbb{R}^l$ به طوری که:

$$(5) \quad 0 \in \sum_{j \in I} \lambda_j \partial f_j(x^*) - A^t \gamma + N_S(x^*)$$

جایی که $N_S(x^*)$ مخروط نرمال مجموعه محدب S در نقطه x^* است و اگر $\lambda > 0$ باشد، بنابراین هر نقطه x^* که در رابطه (۵) صدق می کند، یک نقطه SPO است.

(۲) اگر نقطه $x^* \in X$ نقطه SPO برای مسئله (P) باشد، بنابراین $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^m$ s.t. $\sum_{j \in I} \lambda_j = 1, \gamma \in \mathbb{R}^l$ به طوری که در رابطه (۵) صدق می کند.

در زیر به بیان تعریفی از تابع لاگرانژین و نقطه زینی برای مسئله (P) می پردازیم.
تابع لاگرانژین برای مسئله (P) را چنین تعریف می کنیم:

$$L(x, \lambda, \gamma) = \sum_{j \in I} \lambda_j f_j(x) - \gamma^t (Ax - b) \quad \forall (x, \lambda, \gamma) \in \bar{S}$$

جایی که $\bar{S} = \{(x, \lambda, \gamma) \in S \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^l \mid \sum_{j \in I} \lambda_j = 1\}$ و بردار ضرایب لاگرانژین گوییم.

قضیه ۳.۲. نقطه x^* نقطه بهینه پارتو مسئله (P) است اگر و فقط اگر ضرایب $\lambda^* \geq 0, \lambda^* \neq 0, \gamma^* \in \mathbb{R}^l$ موجود باشد به طوری که:

$$(6) \quad L(x^*, \lambda^*, \gamma) \leq L(x^*, \lambda^*, \gamma^*) \leq L(x, \lambda^*, \gamma^*)$$

برای $\gamma \in \mathbb{R}^l$ و $x \in S$.

به عبارت دیگر نقطه $(x^*, \lambda^*, \gamma^*)$ که $x^* \in S, \gamma^* \in \mathbb{R}^l$ نقطه زینی تابع لاگرانژین L می نامیم هرگاه در رابطه (۶) صدق کند. اکنون مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{j \in I} f_j(x)$$

s.t

$$(\hat{P}) \quad Ax = b, x \in S$$

شرط بهینگی برای مسئله فوق بررسی می کنیم.

در ابتدا تعریف می کنیم $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و مسئله $(\hat{P})$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$$

s.t

$$(\hat{P}_1) \quad Ax = b, x \in S$$

فرض کنید $\exists \gamma \in \mathbb{R}^l$ و تابع $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ به طوری که:

$$G(x) = F(x) + \gamma^t(-Ax + b)$$

در این صورت به دنبال $\min G(x)$ روی مجموعه S هستیم. چون توابع f_j و مجموعه قیود محدب هستند، واضح است که تابع G محدب است و طبق قضیه (۴؟)، x^* مینیمم سراسری G روی S است اگر و فقط اگر

$$0 \in \partial G(x^*) + N_S(x^*) = \partial F(x^*) - A^t \gamma + N_S(x^*) \quad (۷)$$

طبق تعریف F ، $\partial F(x) \subseteq \text{conv}\{\partial f_j(x) \mid F(x) = f_j(x)\}$. در نتیجه طبق رابطه (۷) و براساس تعریف غلاف محدب، بردار $0 \in \sum_{j \in I} \lambda_j \partial f_j(x^*) - A^t \gamma + N_S(x^*)$ که $0 \leq \lambda_j = 1$ موجود است به طوری که:

$$0 \in \sum_{j \in I} \lambda_j \partial f_j(x^*) - A^t \gamma + N_S(x^*)$$

در ادامه به ارتباط میان جواب‌های مسئله $(\hat{P})$ با نقاط بهینه مؤثر مسئله (P) می‌پردازیم که از [۲] آورده شده است.

قضیه ۴.۲.

(۱) یک نقطه WPO برای مسئله (P) معادل با یافتن جواب بهینه مسئله

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{j \in I} f_j(x) \\ s.t$$

$$Ax = b, x \in S \quad (\hat{P})$$

است.

(۲) اگر توابع $f_j, \forall j \in I$ محدب اکید باشند یا ستون‌های ماتریس A مستقل خطی باشند، بنابراین یک نقطه SPO برای مسئله (P) معادل با یافتن جواب بهینه برای مسئله $(\hat{P})$ است.

۳. الگوریتم نقطه تقریبی

اکنون زمان آن فرا رسیده است که با استفاده از مطالب بیان شده در بخش‌های قبل به بررسی الگوریتم نقطه تقریبی برای حل مسئله (P) بپردازیم. این الگوریتم در هر تکرار و با حل یک زیر مسئله (نگاشت تقریب)، دنباله‌ای از جواب‌ها را به دست می‌آورد که در نهایت نشان خواهیم داد این دنباله به یک جواب بهینه پارتو برای مسئله (P) همگرا خواهد شد.

الگوریتم اول

گام آغازین:

نقطه درونی $\gamma^0 \in \mathbb{R}^l$ ، یک $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک و مجموعه‌ای از ثابت‌های $\theta > 0$ را انتخاب کنید. سپس قرار دهید $k = 0$ و به گام دوم بروید.

گام دوم:

در مرحله‌ی k ام، x^{k+1} را از حل زیر مسئله

$$\min_{x \in S} \left\{ \max_{j \in I} \{f_j(x)\} - (\gamma^k)^t(Ax - b) + \frac{\theta}{2} \|Ax - b\|^2 \right\} \quad (۸)$$

به دست آورید.

گام سوم:

مقدار γ^{k+1} را با استفاده از رابطه

$$(9) \quad \gamma^{k+1} = \gamma^k - \theta(Ax^{k+1} - b)$$

به روز رسانی کنید.

گام چهارم:

شرط توقف را برای این الگوریتم پیاده سازی می کنیم که اگر $\|(x^{k+1}, \gamma^{k+1}) - (x^k, \gamma^k)\| \leq \epsilon$ متوقف شوید و در غیر این صورت، $k := k + 1$ و به گام دوم بروید.

قضیه ۱.۳. [۲]

فرض کنید دنباله $\{(x^k, \gamma^k)\}$ توسط الگوریتم اول تولید شده باشد. در این صورت هر نقطه انباشتگی از دنباله $\{x^k\}$ یک نقطه WPO برای مسئله (P) است. اگر توابع $f, j \in I$ محدب باشند یا ستون های ماتریس A مستقل خطی باشند، هر نقطه انباشتگی از نقاط $\{x^k\}$ نقطه SPO برای مسئله (P) است.

در ادامه این بخش به بیان الگوریتم نقطه تقریبی دیگری می پردازیم که در هر مرحله با انتخاب یک $\gamma_{j,k}$ و θ_j برای $j \in I$ به حل زیر مسئله متناظر پرداخته و نقاط x^k را به دست می آورد. در انتها همگرایی این الگوریتم را نیز مورد بررسی قرار خواهیم داد.

الگوریتم دوم

گام آغازین:

نقطه $\gamma_{j,0} \in \mathbb{R}^l$ ، $\forall j \in I$ ، $\theta_j > 0$ و $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک انتخاب کنید. سپس قرار دهید $k := 0$ و به گام دوم بروید.

دوم:

در مرحله k ام، x^{k+1} را از حل زیر مسئله

$$(10) \quad \min_{x \in S} \max_{j \in I} \left\{ f_j(x) - (\gamma_{j,k})^t (Ax - b) + \frac{\theta_j}{\gamma} \|Ax - b\|^2 \right\}$$

به دست آورید.

گام سوم:

مقدار $\gamma_{j,k+1}$ ، $j \in I$ را با استفاده از رابطه

$$(11) \quad \gamma_{j,k+1} := \gamma_{j,k} - \theta_j(Ax^{k+1} - b), \quad j \in I$$

به روز رسانی کنید.

گام چهارم:

اگر $\|x^{k+1} - x^k\| + \max \|\gamma_{j,k+1} - \gamma_{j,k}\| \leq \epsilon$ ، الگوریتم متوقف می شود. در غیر این صورت قرار دهید $k = k + 1$ و به گام دوم بروید.

قضیه ۲.۳. [۲]

فرض کنید دنباله $\{(x^k, \gamma_{1,k}, \dots, \gamma_{m,k})\}$ توسط الگوریتم دوم تولید شده باشد. در این صورت برای هر $j \in I$ ، $\{\gamma_{j,k}\}$ تنها به یک نقطه

همگرا می شوند و بنابراین هر نقطه حدی از دنباله $\{x^k\}$ یک نقطه WPO برای مسأله (P) می شود. علاوه بر این اگر هر تابع $f_j, \forall j \in I$ محدب اکید باشد یا ستون های ماتریس A مستقل خطی باشند، هر نقطه حدی از نقاط $\{x^k\}$ ، یک نقطه SPO برای مسأله (P) می شود.

۴. توصیف مسأله

در محیط ساخت-سفرارش، تولیدکنندگان مشتری مدار باید شرایطی را برای تولید انواع محصولات برای پاسخگویی به نیازهای مختلف مشتریان فراهم سازند. هر محصول معمولاً از تعدادی قسمت های رایج و غیر رایج (سفرارشی) تشکیل می شود که می تواند از تأمین کنندگان مورد تأیید با ظرفیت عرضه متفاوت تأمین شوند. مسأله مهم این است که چگونه سفارشات برای قسمت های مختلف را به بهترین شکل در بین تأمین کنندگان آن تخصیص دهیم تا تمام سفارشات مشتری برای محصولات برآورده شود و به سطح بالایی از خدمات مشتری با هزینه کم برسیم و به علاوه تأثیر ریسک زنجیره تأمین را کاهش دهیم. در این بخش تأثیر دو عامل ریسک عملیاتی و ریسک های اختلال مورد بررسی قرار می گیرد.

در زنجیره عرضه تحت بررسی، یک مجموعه از سفارشات مشتری برای محصولات را در نظر بگیرید. تصمیم گیرنده نیاز دارد که از تأمین خرید قطعات مورد نیاز هر مشتری تا مینیمم ساختن هزینه نهایی و کاهش تأثیر اختلالات ریسک تصمیم گیری کند. انتخاب تأمین کننده ها و تخصیص سفارشات بر اساس قیمت و کیفیت قطعات خریداری شده و قابلیت اطمینان تحویل انجام می شود. انواع مختلف محصولات توسط تنها یک تولید کننده در جهت برآورده شدن سفارشات مشتری با استفاده از خرید قطعات سفرارشی از چندین عرضه کننده مونتاژ می شود. هر عرضه کننده می تواند تولید کننده قطعات سفرارشی برای هر مشتری را فراهم کند. به هر حال، عرضه کننده ها ظرفیت محدود متفاوتی دارند و به علاوه از نظر قیمت و کیفیت قطعات ارائه شده متفاوت اند [۷].

اکنون به بررسی مسأله بهینه سازی چند هدفه مورد نظر می پردازیم که از سه آماره مینیمم ساختن هزینه های مورد انتظار، واریانس و معیار $CVaR$ در سطوح اطمینان تعیین شده، تشکیل شده است.

فرض کنید $I = \{1, 2, \dots, m\}$ مجموعه m عرضه کننده و $J = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه n سفرارش مشتری برای محصولات باشد. هر سفرارش $j \in J$ توسط کمیت $\hat{d}_j$ ، تعداد قطعات سفرارش مورد نیاز، توصیف می شود. فرض کنید عرضه ها تحت اختلالات محلی تصادفی قرار دارند که به طور یکتا با یک عرضه کننده خاص مرتبط هستند که ممکن است از ضعف تجهیزات، اعتصابات کارگری، ورشکستگی و یا بلایای طبیعی مانند سیل، زلزله، آتشسوزی، طوفان و ... به وجود آیند. فرض کنید $\delta_i \in \{0, 1\}$ نماد متغیر تصادفی دودویی از حالت عملیاتی عرضه کننده i باشد به طوری که $\delta_i = 1$ هرگاه عرضه کننده i بدون اختلالات عمل کند. در غیر این صورت $\delta_i = 0$. نماد ρ_i احتمال رخ دادن اختلال محلی برای عرضه کننده i را نشان می دهد. به عبارت دیگر قطعات سفرارش داده شده از عرضه کننده i بدون اختلال و با احتمال $(1 - \rho_i)$ تحویل داده می شوند. در غیر این صورت احتمال آن ρ_i است. فرض کنید P_s احتمال تحقق سناریوی اختلال s باشد که در آن هر سناریوی $s \in S$ متشکل از یک زیر مجموعه یکتای $I_s \in I$ از عرضه کننده هایی است که قطعات را بدون اختلال تحویل می دهند و $\{1, 2, \dots, h\}$ مجموعه اندیس تمام سناریوهاست. (توجه کنید که در حالت کلی $h = 2^m$ سناریوی احتمالی وجود دارد.) احتمال اختلال سناریوی s در برابر روی دادن حوادث محلی مستقل عبارت است از:

$$P_s = \prod_{i \in I_s} (1 - \rho_i) \cdot \prod_{i \notin I_s} \rho_i$$

فرض کنید علاوه بر اختلالات محلی مستقل در هر عرضه کننده، حوادث بالقوه جهانی نیز موجود باشند که ممکن است به طور همزمان موجب اختلال در همه عرضه کننده ها شود. به عنوان مثال، این گونه از بلایای بزرگ جهانی ممکن است شامل بحران های اقتصادی، حمله تروریستی، اعتصابات های گسترده کارگری در بخش حمل و نقل و ... باشد. گرچه احتمال وقوع این گونه از اتفاقات معمولاً خیلی پایین است، اما نتایج آنها ممکن است خیلی بزرگ باشد. فرض کنید ρ^* احتمال وقوع اختلال جهانی برای همه عرضه کننده ها نسبت به رخ دادن یکی از حوادث بزرگ (فوق العاده) باشد. فرض کنید حوادث محلی و جهانی در هر عرضه کننده، به صورت مستقل اتفاق می افتد. احتمال P_s^* از هر سناریوی اختلال

$s \in S$ تحت ریسک‌های هر دو نوع از روی داده‌ها عبارت است از:

$$P_s^* = \begin{cases} (1 - \rho^*)P_s & \text{اگر } I_s \neq \emptyset \\ \rho^* + (1 - \rho^*) \prod_{i \in I} \rho_i & \text{اگر } I_s = \emptyset \end{cases}$$

توجه کنید که اگر احتمال اختلال جهانی $\rho^* = 0$ آنگاه احتمال P_s^* برای حوادث فاجعه‌وار محلی مستقل به P_s کاهش می‌یابد. فرض کنید q_i میزان قصور و کوتاهی مورد انتظار از عرضه‌کننده i باشد که این میزان بر پایه مشاهدات قبلی است. سرانجام M_i ظرفیت عرضه‌کننده i ، c_i هزینه قطعات سفارشی از عرضه‌کننده i و P_{ij} قیمت قطعات خریداری شده از عرضه‌کننده i برای سفارش مشتری j است. نیازی نیست که تولیدکننده هزینه‌ای برای سفارشات و تحویل قطعات بپردازد. اما باید در برابر برآورده نشدن محصولات سفارش شده توسط مشتری ناشی از کسری قطعات و یا تحویل دادن آن با توجه به شرایط اختلال، هزینه سنگینی را متحمل شود. sc_j هزینه هر واحد از برآورده نشدن سفارش مشتری j است.

جدول ۱: نمادها

شاخص‌ها	
i	$i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$, عرضه‌کننده
j	$j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$, سفارش مشتری
s	$s \in S = \{1, 2, \dots, h\}$, اختلال سناریو
ورودی پارامترهای	
M_i	ام i عرضه‌کننده ظرفیت
$\hat{d}_j$	شود می تولید ام j مشتری سفارش برای که قطعاتی تعداد
sc_j	ام j مشتری سفارش برای کسری واحد هر هزینه
c_i	ام i کننده تأمین از قطعات سفارش هزینه
p_{ij}	ام j مشتری سفارش برای i عرضه‌کننده از شده خریداری قطعه هزینه
q_i	ام i عرضه‌کننده از انتظار مورد و کوتاهی قصور میزان
$D = \sum_{j \in J} \hat{d}_j$	قطعات تقاضای کل میزان
α	اطمینان سطح
ρ_i	ام i عرضه‌کننده برای (محلی) موضعی اختلال احتمال
ρ^*	ام i عرضه‌کننده برای (جهانی) سراسری اختلال احتمال

تصمیم‌گیرنده باید در رابطه با انتخاب عرضه‌کننده برای تولید قطعات مورد نیاز سفارش شده برای هر مشتری تا رسیدن به کمترین هزینه سفارش، تولید، نقص و کمبود و کاهش تأثیر اختلال ریسک‌ها، تصمیم‌گیری کند.

جدول ۲: متغیرهای مسأله

x_i	i عرضه‌کننده از شده داده سفارش قطعات برای کل تقاضای از کسری
z_i	است. پذیر صورت i عرضه‌کننده از قطعات سفارش هرگاه است یک با برابر
	است. صفر برابر اینصورت غیر در
y_{ij}	ام j مشتری سفارش برای نیاز مورد قطعات از کسری
	است شده ارائه ام i عرضه‌کننده توسط که

۱.۴. انتخاب هدف واحد از سبد عرضه. در این بخش یک مسأله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط برای یک انتخاب یک- دوره عرضه‌کننده و مسأله تخصیص سفارشات ارائه می‌شود، به عبارت دیگر یک سبد عرضه استاتیک به صورت $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ تعریف می‌شود که در آن هر $0 \leq x_i \leq 1$ به ازای $i = 1, 2, \dots, m$ کسری از تقاضای کل برای قطعات سفارش شده از عرضه‌کننده i است و به علاوه $\sum_{i=1}^m x_i = 1$. در هنگام تصمیم‌گیری روی یک سبد عرضه استاتیک فرض بر این است که تمام سفارشات به‌طوری همزمان در اختیار عرضه‌کننده قرار می‌گیرد (مثلاً در زمان $t = 0$) و هر عرضه‌کننده سفارشات را در حد امکان زودتر از زمان مقرر، تحویل دهد. بنابراین تخصیص سفارشات در میان عرضه‌کننده‌ها با تخصیص سفارشات در دوره‌های برنامه‌ریزی شده در هم آمیخته نیست. با این اوصاف، سبد عرضه استاتیک باید در برابر ریسک اختلالات عرضه در میان تمام سناریوهای اختلال کنترل شود.

۲.۴. مینیمم ساختن هزینه‌های مورد انتظار. در شرایط عملیاتی یک ریسک خنثی، کیفیت کلی سبد عرضه را می‌توان بر اساس هزینه‌های مورد انتظار هر قسمت، $\hat{R}(x)$ را اندازه‌گیری کرد که شامل موارد زیر است:

سفارشات: $\sum_{i \in I} \frac{c_i z_i}{D}$

خرید و تقاضاها که در آن هزینه یک قسمت معیوب با قیمت آن برابر فرض می‌شود: $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{P_{ij}(\lambda + q_i) \hat{d}_{ij} y_{ij}}{D}$

کسری قطعات ناشی از اختلالات عرضه با این نکته که هزینه سفارشات برآورده نشده کمتر از هزینه قطعات تحویل داده شده است:

$$\sum_{s \in S} \sum_{i \in I_s} \sum_{j \in J} \frac{P_s(sc_j - P_{ij}(\lambda + q_i)) \hat{d}_{ij} y_{ij}}{D}$$

مسأله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط SP_E برای انتخاب سبد عرضه در یک محیط ریسک خنثی زنجیره تأمین به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود که در این مدل، سبد به‌وسیله مینیمم سازی هزینه مورد انتظار از هر قسمت $\hat{R}(x)$ بهینه‌سازی می‌شود.

مدل SP_E : مینیمم ساختن هزینه مورد انتظار هر قسمت:

$$\begin{aligned} \hat{R}(x) = & \sum_{i \in I} \frac{c_i z_i}{D} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{P_{ij}(\lambda + q_i) \hat{d}_{ij} y_{ij}}{D} \\ & + \sum_{s \in S} \sum_{i \in I_s} \sum_{j \in J} \frac{P_s(sc_j - P_{ij}(\lambda + q_i)) \hat{d}_{ij} y_{ij}}{D} \end{aligned} \quad (1)$$

به طوری‌که:

(۱) قیود انتخاب عرضه‌کننده و تخصیص سفارش:

* برای سفارش هر مشتری، تمام قطعات مورد نیاز باید توسط عرضه‌کننده‌های انتخاب شده ارائه شود.

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, \quad j \in J \quad (2)$$

* برای هر عرضه‌کننده انتخاب شده، مقدار کل قطعات سفارش داده شده نمی‌تواند از ظرفیت آن عرضه‌کننده بیشتر باشد.

$$(۳) \quad \sum_{j \in J} \hat{d}_j y_{ij} \leq M_i z_i, \quad i \in I$$

* حداقل یکی از سفارشات مشتری باید به هر عرضه‌کننده انتخاب شده اختصاص داده شود.

$$(۴) \quad z_i \leq \sum_{j \in J} y_{ij}, \quad i \in I$$

(۲) شرایط صحیح و نامنفی:

$$(۵) \quad z_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I$$

$$(۶) \quad y_{ij} \in [0, 1], \quad i \in I, j \in J$$

نتیجه سبد عرضه $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ به وسیله متغیرهای تخصیص سفارش مشتری y_{ij} مشخص می‌شود:

$$(۷) \quad x_i = \sum_{j \in J} \frac{\hat{d}_j y_{ij}}{D}, \quad i \in I$$

توجه کنید که در مدل ارائه شده فرض بر این است که قطعات مورد نیاز برای هر سفارش مشتری تا حدودی توسط یک یا چندین عرضه‌کننده ارائه می‌شود و متغیر تخصیص سفارش مشتری y_{ij} ، کسری از تمام قطعات مورد نیاز برای سفارش j ارائه شده توسط عرضه‌کننده i را نمایش می‌دهد. در بعضی از موارد کاربردی، تمام قطعات سفارشی از یک نوع که برای یک سفارش مشتری مورد نیاز است، تنها از یک عرضه‌کننده خریداری می‌شود. در این صورت، متغیر تخصیص y_{ij} متناظر، باید به عنوان یک متغیر تخصیص دودویی تعریف شود. به این معنی که تمام قطعات مورد نیاز برای سفارش j توسط عرضه‌کننده i ارائه می‌شود و اگر تمام y_{ij} ها به عنوان یک متغیر دودویی در نظر گرفته شوند، در این صورت مدل SP_{-E} یک برنامه دودویی سره خواهد بود.

اکنون به بررسی دو تابع هدف دیگر می‌پردازیم که در زیر تعریف شده‌اند.

واریانس از $\hat{R}(x)$ را به صورت

$$\sigma^2(\hat{R}(x)) = E[\hat{R}(x) - E[\hat{R}(x)]]^2$$

بیان می‌شود. و ارزش در معرض ریسک شرطی ($CVaR$) در یک سطح اطمینان α ، هزینه مورد انتظار از سبد عرضه در بدترین حالت به صورت

$$CVaR_\alpha(\hat{R}(x)) = \min_{v \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, v)$$

تعریف می‌شود که در آن

$$F_\alpha(x, v) = \frac{1}{\alpha} E\{[-\hat{R}(x) + v]^+\} - v$$

و

$$[u]^+ = \begin{cases} u & \Leftrightarrow u \geq 0 \\ 0 & \Leftrightarrow u < 0 \end{cases}$$

در آخر مسأله بیان شده را به فرم یک مسأله بهینه‌سازی چند هدفه فرمول‌بندی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \left(\hat{R}(x), \sigma^2(\hat{R}(x)), CVaR_\alpha(\hat{R}(x)) \right) \\ \text{s.t} & \\ & \sum_{i \in I} y_{ij} = 1, \quad j \in J \\ & \sum_{j \in J} \hat{d}_j y_{ij} \leq M_i z_i, \quad i \in I \\ & z_i \leq \sum_{j \in J} y_{ij}, \quad i \in I \\ & z_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I \\ & y_{ij} \in [0, 1], \quad i \in I, j \in J \end{aligned}$$

که توابع هدف همان توابع تعریف شده در بالا هستند.

این بخش را با یک مثال برای درک بیشتر مفاهیم بیان شده به پایان می‌رسانیم.

۵. مثال محاسباتی

در این بخش یک مثال محاسباتی برای نشان دادن کاربردهای ممکن از روش برنامه ریزی عدد صحیح مختلط برای انتخاب سبد عرضه تحت اختلالات ریسک بیان می‌شود. پارامترهای زیر در مثال استفاده شده‌اند:

m ، تعداد عرضه‌کننده‌ها، برابر با ۷، ۱۰ و ۱۴ است و عدد متناظر $h = 2^m$ از سناریوهای اختلال به ترتیب برابر است با ۱۲۸، ۱۰۲۴ و ۱۶۳۸۴.

n ، تعداد سفارشات مشتری، برابر ۵۰ است.

$\hat{d}_j$ ، تعداد قطعات مورد نیاز برای هر سفارش مشتری که توزیع یکنواختی از اعداد صحیح در بازه $[100, 500]$ هستند. یعنی تولید شده از یک توزیع $U[100, 500]$.

M_i ، ظرفیت هر عرضه‌کننده i ، که برابر با $\lceil 2 \sum_{j \in J} \frac{\hat{d}_j}{m} \rceil$ است که در آن $\lceil \cdot \rceil$ کوچکترین عدد صحیحی است که از $\cdot$ کوچکتر نیست. به بیان دیگر، ظرفیت تمام عرضه‌کننده‌ها برابر است با دو برابر تقاضای کل برای قطعات.

Sc_j ، هزینه هر واحد کسری برای سفارش مشتری j که برای تمام سفارشات j برابر ۱۰۰ است.

c_i ، هزینه سفارش دادن قطعات از عرضه‌کننده i که برای هر عرضه‌کننده i برابر ۵۰۰ است.

q_i ، میزان نقص مورد انتظار از هر عرضه‌کننده i ، که توزیعی نمایی از ۳/۰۰۰ تا ۳/۰۰۰ دارد.

p_{ij} ، قیمت واحد قطعات مورد نیاز برای هر سفارش مشتری j که از هر عرضه‌کننده i خریداری می‌شود و دارای توزیع یکنواخت $U[10, 15]$ است و به‌وسیله عامل $(1 - q_i)$ به‌قیمت پایین‌تر برای قطعات از عرضه‌کننده‌هایی با میزان نقص بالاتر کاهش می‌یابد.

ρ_i ، احتمال اختلال محلی که دارای توزیع $U[0, 0.06]$ است.

ρ^* ، احتمال اختلال سراسری که برابر ۱/۰ است.

α ، سطح اطمینان که برابر با ۵۰/۷۵، ۹۰/۹۵، ۹۵/۹۹ است.

D ، تقاضای کل برابر است با $\sum_{j \in J} d_j = 14750$.

نتایج برای سناریوهایی با اختلالات محلی و اختلالات سراسری و محلی برای مدل ریسک- SP_E در جدول (۳) نمایش داده شده است.

جدول ۳: نتایج بدست آمده برای مدل SP_E

اجرا زمان	میانگین، هزینه عرضه‌کننده‌ها تعداد	ناصغر ضرایب تعداد (Nonz)	قیود تعداد (Cons)	متغیرهای تعداد دودویی (Bin)	متغیرها تعداد (Var)	اختلال سناریو
۰/۰۴	۱۱/۴۹,۴	۱۴۲۸	۷۲	۷	۳۶۴	عرضه‌کننده $m = ۷$ محلی
۰/۰۴	۱۲/۳۸,۴	۱۴۲۸	۷۲	۷	۳۶۴	سراسری و محلی
۰/۰۱	۱۲/۳۰,۵	۲۰۴۰	۸۱	۱۰	۵۲۰	عرضه‌کننده $m = ۱۰$ محلی
۰/۰۲	۱۳/۱۸,۵	۲۰۴۰	۸۱	۱۰	۵۲۰	سراسری و محلی
۰/۰۲	۱۱/۱۴,۷	۲۸۵۶	۹۳	۱۴	۷۲۸	عرضه‌کننده $m = ۱۴$ محلی
۰/۰۳	۱۲/۰۳,۷	۲۸۵۶	۹۳	۱۴	۷۲۸	سراسری و محلی

مراجع

- [1] S. Chopra and P. Meindel, *Supply Chain Management: Strategy, Planning and Operations*, Prentice-Hall Inc, 2001.
- [2] M. Goh, S. j. Qu, R. D. Souza and T. N. Wang, Proximal point algorithms for convex multi-criteria optimization with applications to supply chain risk management, *J. Optim. Theory. Appl.*, 163 (2014) 949–956.
- [3] T. John and Mentzer, Defining supply chain management, *Journal of Business Logistics*, 22 (2001) 16–18.
- [4] Ph. Kaminsky, D. Simchi-Levi and E. Simchi-Levi, *Designing and Managing the Supply Chain*, Concepts, Strategies and Case Studies, MacGrow-Hill, 2000.
- [5] M. Makela and P. Neittaanmaki, *Nonsmooth Optimization: Analysis and Algorithms with Applications to Optimal Control*, World Scientific Publishing, Singapore, 1992.
- [6] K. M. Miettinen, *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer, Boston, 1999.
- [7] T. Sawik, Selection of supply portfolio under disruption risks, *Omega*, 39 (2011) 194–208.
- [8] C. S. Tang, Perspectives in supply chain risk management, *Journal of Production Economics*, 103 (2006) 451–488

[۹] م. غضنفری و م. فتح اله، نگرشی جامع بر مدیریت زنجیره تأمین، انتشارات دانشگاه علم و صنعت، تهران، ۱۳۸۵.

[۱۰] ج. هال، س. سیاحی و ع. صالح آبادی، مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک، بخش تحقیقات شرکت کارگزاری مفید، تهران، ۱۳۸۴.

ملیحه امینی پزوه

اصفهان، خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی

m.amini69@yahoo.com

ملیحه امینی پزوه متولد آذرماه سال ۱۳۶۹ در شهر اصفهان است. وی در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۳۹۳ در مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشگاه اصفهان به ادامه تحصیل پرداخت و در تاریخ ۱۳۹۵/۰۷/۲۴ از پایان نامه خود با راهنمایی دکتر صغری نوبختیان دفاع نمود.

