

در مورد حدس روتا

سعید علیخانی* و علی نوروزی

چکیده. مترویدها در تلاش برای فراهم آوردن یک رفتار مجرد یکسان از وابستگی در جبر خطی و نظریه گراف معرفی شده‌اند. نام متروید ساختاری مربوط به یک ماتریس را القا می‌کند. تعریف ویتنی تنوعی شگفت‌انگیز از ساختارهای ترکیبیاتی را در برداشت. از این گذشته مترویدها به طور طبیعی در بهینه‌سازی ترکیبیاتی پدیدار می‌شوند، زیرا آنها دقیقاً همان ساختارهای ترکیبیاتی هستند که الگوریتم حریصانه برای آن به نتیجه می‌رسد. یکی از حدس‌های مهم در نظریه متروید، حدس روتا می‌باشد که توسط جیان کارلو روتا، ریاضیدان و فیلسوف مشهور در سال ۱۹۷۰ مطرح شد. ما در این مقاله ضمن بیان مقدمات لازم و معرفی حدس روتا، به بررسی کلیات اثباتی که توسط جیوف ویتل از دانشگاه ویکتوریا با همکاری جیم گیلن از کانادا و برت جراردز از هلند برای آن اخیراً ارائه کرده‌اند، می‌پردازیم.

۱. مقدمه

مترویدها^۱ اولین بار توسط هاسلر^۲ و ویتنی^۳ در سال ۱۹۳۵ در تلاش برای فراهم آوردن یک رفتار مجرد یکسان از وابستگی در جبر خطی و نظریه گراف معرفی شدند. نام متروید، ساختاری مربوط به یک ماتریس را القا می‌کند. مترویدها یک بیان خلاصه‌ی ترکیبیاتی برای مفهوم استقلال خطی بردارها هستند. هر زیرمجموعه در یک گردایه متناهی از بردارها در یک فضای برداری یا مستقل و یا وابسته است. یک متروید شامل یک مجموعه متناهی مرجع به همراه گردایه‌ای از زیر مجموعه‌ها که ما به آن "مستقل" می‌گوییم، است. مجموعه‌های مستقل در اصول موضوعه‌ی ترکیبیاتی که از جبر خطی می‌آیند، صدق می‌کنند. تمام مترویدها را نمی‌توان به وسیله‌ی گردایه‌ای از بردارها توصیف کرد و از زمانی که در سال ۱۹۳۵ توسط هاسلر و ویتنی معرفی شدند، ریاضیدانان در جست‌وجوی راه‌های مختلف برای توصیف مترویدهای موجود بودند. تعریف ویتنی، تنوعی شگفت‌انگیز از ساختارهای ترکیبیاتی را در برداشت. در سال ۱۹۷۰ جیان کارلو روتا^۴ یک حدس ترکیبیاتی زیبا در مورد توصیف استقلال خطی در فضای برداری برای هر میدان متناهی دلخواه ارائه کرد. اخیراً جیوف ویتل^۵ از دانشگاه ویکتوریا با همکاری جیم گیلن^۶ از کانادا و برت جراردز^۷ از هلند پس از اتمام ۱۵ سال برنامه‌ی تحقیقاتی به اثبات این حدس دست پیدا کرده‌اند. در این مقاله ضمن بیان مقدمات لازم، به بررسی کلیات اثباتی که توسط این سه ریاضیدان ارائه شده است، می‌پردازیم. حدس روتا بیان می‌کند که قابلیت ارائه شدن یا نمایش داده شدن^۸ بر روی هر میدان متناهی توسط لیستی متناهی از موانع مشخص می‌شود. شاید درک این حدس در این‌جا

عبارات و کلمات کلیدی. متروید، استقلال، گراف، حدس روتا.

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۶/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۶/۰۲.

¹ Matroid ² Hassler ³ Whitney ⁴ Gian-Carlo Rota ⁵ Geoff Whittle ⁶ Jim Geelen ⁷ Bert Gerards ⁸ Representability

برای اکثر خوانندگان آسان نباشد. در بخش بعد این حدس و نکات مربوط به آن را به طور رسمی‌تری بیان می‌کنیم. در ادامه این مقدمه به شرح مسیری که این سه ریاضیدان را به این راه حل رساند، می‌پردازیم.

در اواخر دهه‌ی ۹۰ معلوم بود که حدس روتا برای میدان‌های با اندازه‌ی دو، سه یا چهار برقرار است. گیلن، جراردز و کاپور^۹ به تازگی نشان دادند که ارائه پذیرایی برای یک میدان ۴ عنصری، با ۷ مانع همراه است. مدت‌ها قبل در سال ۱۹۵۸ تا^{۱۰} اثبات کرده بود که یک مانع برای مترویدهای دوتایی وجود دارد، و در دهه‌ی ۱۹۷۰ بیکسبی^{۱۱} و پاول سیمور^{۱۲} به طور مستقل ثابت کردند که ۴ مانع برای کلاس مترویدهای سه تایی وجود دارد و این، نتیجه‌ای که قبلاً توسط رالف‌راید^{۱۳} اعلام شده بود را اثبات می‌کرد.

این دوره، دوره‌ای امید بخش برای نظریه متروید بود، چرا که تعداد زیادی تکنیک کارآمد در دهه‌ی قبل از آن پدیدار شده بود و به نظر می‌رسید که پتانسیل عظیمی برای پیشرفت در این شاخه وجود دارد. گرچه تفاوت عمده‌ای میان مساله‌ی پیدا کردن مجموعه کامل موانع برای یک میدان خاص و پیدا کردن تعداد متناهی مانع برای یک میدان متناهی وجود دارد. تکنیک‌هایی که در آن زمان وجود داشت هیچ رویکرد امیدوار کننده‌ای برای حل حدس روتا پیشنهاد نمی‌دادند.

این امید دوباره در سال ۱۹۹۹ در یک کارگاه نظریه گراف در اوپولفاخ آلمان، زمانی که نیل رابرتسون^{۱۴} و پاول سیمور ایده‌هایی برای گسترش پروژه‌ی مینورهای گراف^{۱۵} به مترویدها را مطرح کردند، افزایش یافت. ویتل، گیلن و جراردز مشتاقانه این چالش را پذیرفتند، چرا که نظریه مینورهای گراف دقیقاً همان ابزار کلی را در برداشت که آنها به آن نیاز داشتند. نتایج تحقیقات رابرتسون و سیمور که بیش از ۷۰۰ صفحه بود در ۲۳ مقاله‌ی علمی به چاپ رسید. ویتل، گیلن و جراردز یک سال بعد را صرف بررسی و فراگیری چگونگی عملکرد دستگاه‌های ارائه شده در این مقالات کردند. ایشان پس از آن وقت خود را صرف کار بر مخاطره‌ی گسترش مینورهای گراف به مترویدها کردند.

در اوایل سال ۲۰۱۱ قسمت اصلی مینورهای گراف را به مترویدها تعمیم دادند. تکنیک‌هایی که آنها ارائه کردند بسیار قدرتمند و کلی بودند، اما هنوز مشکلات بسیاری در مورد حدس روتا وجود داشت که باید برطرف می‌شدند. در واقع در آن زمان یک راهبرد صریح برای حل این مساله در ذهن نداشتند و اولین تلاش جدی آنها برای اثبات حدس روتا در ۲۰۱۱ به شکست انجامید. در اوایل سال ۲۰۱۲ یک روزنه‌ی جدید برای حمله به این حدس پیدا شد و آنها بقیه‌ی سال را صرف تولید و ارائه‌ی ابزار لازم برای این منظور کردند. وقتی که در ژانویه ۲۰۱۳ به ملاقات یکدیگر رفتند، مطمئن بودند که روش درست و تمام ابزارهای لازم را در اختیار دارند. پس از سه هفته کار پیوسته جزئیات باقیمانده را نیز بدست آوردند.

ویتل، گیلن و جراردز مشغول کار طولانی نوشتن نتایج‌شان هستند. از آنجا که به گفته خودشان این فرایند چندین سال به طول خواهد انجامید، از این رو مقاله‌ای نوشتند [۷] تا یک شمای کلی از اثبات را به نمایش بگذارند. این مقاله اصلی‌ترین مرجع ما در این نوشته می‌باشد.

مطالعه این مقاله به پیش نیازهایی از جبرخطی و نظریه گراف نیاز دارد که اکثر خوانندگان با آنها آشنایی دارند و در صورت نیاز، مفاهیم در هر کتاب جبرخطی و نظریه گراف یافت می‌شوند. گراف ساده G را مسطح گوییم، هرگاه بتوان آن را به گونه‌ای در صفحه رسم کرد که یال‌ها در هیچ نقطه‌ای به جز رئوس، برخورد نداشته باشند. بدیهی است که هر زیرگراف یک گراف مسطح، گرافی مسطح و هر ابرگراف یک گراف نامسطح، گرافی نامسطح است. گراف کامل با مرتبه n را به طور معمول با K_n نشان داده و گرافی است که هر زوج رئوس متمایز آن، مجاورند. گراف دوبخشی کامل، گرافی است که مجموعه رئوس آن را بتوان به دو مجموعه X و Y ، که بخش نامیده می‌شوند چنان افراز کرد که هیچ دو رأس در یک بخش مجاور نبوده و هر رأس در یک بخش با تمام رئوس در بخش دیگر مجاور باشد. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ آنگاه گراف دوبخشی کامل را با نماد $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

⁹ Kapoor ¹⁰ Tutte ¹¹ Bixby ¹² Paul Seymour ¹³ Ralph Reid ¹⁴ Neil Robertson ¹⁵ Graph minors

در بخش بعد، به مطالعه مقدمات متروید دوگان و مینورهای آن پرداخته، ضمن بیان دقیق حدس روتا، مترویدهای گرافیکی، مترویدهای چهارچوب و پروژه مینورهای متروید را معرفی و بررسی خواهیم کرد. در بخش ۳، به توصیف دستگاههایی که صرفاً به منظور حل حدس روتا ساخته شده‌اند، خواهیم پرداخت.

۲. متروید چیست؟

یک متروید شامل یک جفت (E, I) است که در آن E یک مجموعه متناهی بوده و به آن مجموعه مرجع می‌گوییم و I یک خانواده از زیرمجموعه‌های E می‌باشد که به I مجموعه مستقل می‌گوییم. این مجموعه دارای خواص زیر است:

(۱) مجموعه تهی، مستقل است، یعنی $\emptyset \in I$. به بیان دیگر حداقل یک زیرمجموعه از I مستقل است، یعنی $I \neq \emptyset$.

(۲) زیرمجموعه‌های مجموعه‌های مستقل، مستقل اند. یعنی برای هر $A' \subseteq A \subseteq E$ اگر $A \in I$ آنگاه $A' \in I$.

(۳) اگر A و B دو مجموعه مستقل در I باشند، و تعداد عناصر A از B بیشتر باشد، آنگاه یک عنصر از A وجود دارد که اگر آن را به B اضافه کنیم، یک مجموعه مستقل بزرگتر از B به دست می‌آید. به این ویژگی خاصیت ازدیاد و یا خاصیت تعویض مجموعه مستقل گفته می‌شود.

دو خاصیت اول، یک ساختار ترکیباتی تعریف می‌کنند که به آن دستگاه استقلال^{۱۶} گفته می‌شود. به زیر مجموعه‌ای از مجموعه مرجع E که مستقل نیست، وابسته می‌گوییم. مجموعه مستقل بیشینه، یعنی مجموعه مستقلی که با اضافه کردن یک عضو از E ، تبدیل به یک مجموعه‌ی وابسته شود، و زیرمجموعه وابسته کمینه، یک مجموعه وابسته است که همگی زیرمجموعه‌های سره‌ی آن مستقل هستند. به مجموعه مستقل بیشینه، یک پایه برای متروید می‌گوییم. یک دور در متروید M یک زیرمجموعه وابسته E می‌باشد. استفاده از این واژگان به این دلیل است که دورهای مترویدهای گرافیکی، دورهایی در گراف متناظر می‌باشند. مجموعه‌های وابسته، پایه‌ها و یا دورهای یک متروید برای توصیف آن متروید کافی هستند: یک مجموعه مستقل است اگر و تنها اگر وابسته نباشد، اگر و تنها اگر یک زیرمجموعه از یک پایه باشد و اگر و تنها اگر شامل یک دور نباشد. گردایه مجموعه‌های وابسته، یا پایه‌ها، یا دورها هرکدام شامل خواص ساده‌ای هستند که می‌توان از آنها به عنوان اصول یک متروید نام برد. به عنوان مثال می‌توان متروید M را به وسیله جفت (E, B) تعریف کرد، که در آن E مجموعه متناهی است که قبلاً تعریف شده و B گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است که به آن "پایه" گفته می‌شود و دارای خواص زیر است:

- (۱) B ناتهی است.
- (۲) اگر A و B اعضای مجزا از B باشند، و $a \in A \setminus B$ آنگاه یک عنصر مانند $a \in B \setminus A$ وجود دارد به طوری که $A \setminus \{a\} \cup \{b\} \in B$ (به این ویژگی، خاصیت تعویض پایه گفته می‌شود).

از خاصیت تعویض پایه مشخص می‌شود که هیچ یک از اعضای B نمی‌توانند زیرمجموعه سره‌ی دیگری باشند. یکی از نتایج اصلی نظریه متروید که بسیار شبیه به قضیه پایه‌ها در جبر خطی است، بیان می‌کند که دو پایه از متروید M همواره دارای تعداد عنصر مساوی هستند. به این عدد (تعداد عناصر یک پایه) رتبه‌ی M گفته می‌شود. اگر M مترویدی بر E ، و A زیرمجموعه‌ای از E باشد، آنگاه یک متروید بر روی A را می‌توان با در نظر گرفتن یک زیرمجموعه از A که مستقل است، اگر و تنها اگر در A مستقل باشد، تعریف کرد. این کار به ما این اجازه را می‌دهد که در مورد زیرمترویدها و رتبه هر زیرمجموعه از E صحبت کنیم. رتبه هر زیرمجموعه مانند A توسط تابع رتبه متروید، یعنی $r(A)$ به دست می‌آید. این تابع دارای خواص زیر است:

• مقدار تابع رتبه، همواره یک عدد صحیح نامنفی است.

¹⁶ Independence System

• برای هر زیرمجموعه A از E ، $r(A) \leq |A|$.

• برای هر دو زیرمجموعه A و B از E ، $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$.

• برای هر مجموعه A و عنصر x ، $r(A) \leq r(A \cup \{x\}) \leq r(A) + 1$. از بخش اول این دو نامعادله معلوم می‌شود که به طور کلی اگر $A \subset B \subset E$ ، آنگاه $r(A) \leq r(B) \leq r(E)$. بنابراین رتبه یک تابع یکنوا است. می‌توان از این خواص به عنوان تعاریف جایگزین یک متروید استفاده کرد: اگر (E, r) این خواص را داشته باشد آنگاه مجموعه‌های مستقل یک متروید بر E می‌تواند به صورت آن زیرمجموعه‌های A از E با $r(A) = |A|$ تعریف شود. به تفاضل $|A| - r(A)$ پوچی زیرمجموعه A گفته می‌شود. این تفاضل بیانگر کمترین تعداد عنصری است که باید از A حذف شود تا یک مجموعه مستقل به دست آید. به پوچی E در M ، پوچی M گفته می‌شود. حال با در نظر گرفتن مترویدهای یکنوا، به بیان چند مثال می‌پردازیم.

فرض کنید E یک مجموعه متناهی و k عددی طبیعی باشد. می‌توان با در نظر گرفتن تمام زیرمجموعه‌های k -عنصری از E به عنوان پایه، مترویدی بر E تعریف کرد. به این متروید، متروید یکنوا از رتبه k گفته می‌شود. یک متروید n عنصری با رتبه k را به صورت $U_{k,n}$ نشان می‌دهیم. تمام مترویدهای یکنوا با رتبه‌ی حداقل ۲ ساده هستند. متروید یکنوا از رتبه‌ی ۲ بر روی n نقطه، خط n -نقطه‌ای خوانده می‌شود. یک متروید، یکنوا است اگر و تنها اگر هیچ دوری به طول رتبه متروید به علاوه ۱ نداشته باشد. به حاصل جمع مستقیم مترویدهای یکنوا مترویدهای جزئی گفته می‌شود. در متروید یکنوا $U_{0,n}$ ، هر عنصر یک طوقه است (عنصری که متعلق به هیچ مجموعه مستقلی نیست)، و در متروید یکنوا $U_{n,n}$ ، هر عنصر یک هم‌طوقه^{۱۷} است (عنصری که به تمام پایه‌ها تعلق دارد). حاصل جمع مستقیم این دو نوع متروید، یک متروید جزئی است که هر عنصر در آن یا یک طوقه و یا یک هم‌طوقه است. به این متروید، متروید گسسته گفته می‌شود. یک تعریف دیگر برای متروید گسسته، مترویدی است که هر زیرمجموعه سره‌ی ناتهی مجموعه مرجع E یک جداکننده باشد. حال اجازه دهید نگاهی به مترویدها از دید جبر خطی، ببیندازیم. نظریه‌ی متروید برآمده از آزمایش‌هایی است که بر روی خواص استقلال و وابستگی در فضاها برداری انجام شده است. دو راه برای ارائه مترویدهایی که به این شکل تعریف می‌شوند، وجود دارد:

- (i) اگر E یک زیرمجموعه متناهی دلخواه از یک فضای برداری $\mathbb{V}$ باشد، آنگاه می‌توان متروید M بر E را با در نظر گرفتن مجموعه‌های مستقل M به عنوان زیرمجموعه‌های مستقل خطی E تعریف کرد. اعتبار اصول موضوعه مجموعه مستقل این متروید از لم تعویض استینز^{۱۸} می‌آید. اگر M مترویدی باشد که به این طریق قابل تعریف است، آنگاه می‌گوییم E ، M را ارائه می‌کند. به این گونه مترویدها، مترویدهای برداری گفته می‌شود. یک مثال مهم از این نوع مترویدها، متروید فانو می‌باشد، یک متروید ۳-رتبه که از صفحه‌ی فانو به دست آمده است. صفحه‌ی فانو، یک هندسه‌ی متناهی با هفت نقطه (هفت عنصر متروید) و هفت خط (صفحات کوچک متروید) است. متروید خطی را می‌توان توسط هفت نقطه‌ی ناصفر در یک فضای برداری سه بعدی بر روی میدان متناهی $GF(2)$ تعریف کرد. گرچه، امکان فراهم آوردن چنین ارائه‌ای برای متروید فانو با استفاده از اعداد حقیقی بر روی فضای $GF(2)$ موجود نیست.
- (ii) ماتریس A با درایه‌هایی از یک میدان، تشکیل یک متروید M بر روی مجموعه ستون‌هایش می‌دهد. مجموعه‌های مستقل ستون‌ها در این متروید همان مجموعه‌های مستقل خطی از دید برداری می‌باشند. به این متروید، متروید ستونی A گفته می‌شود و می‌گوییم A ، M را ارائه می‌کند. به عنوان مثال می‌توان متروید فانو را توسط یک ماتریس $(0, 1)$ با مرتبه 7×3 بدین شکل تعریف کرد. مترویدهای ستونی همان مترویدهای برداری تحت نامی دیگر هستند، اما معمولاً به دلایلی از ارائه ماتریسی استفاده می‌شود. (یک تفاوت تکنیکی وجود دارد:

¹⁷ coloop ¹⁸ Steinitz

یک متروید ستونی، می‌تواند عناصر مجزایی داشته باشد که بردار یکسان هستند. اما متروید برداری، همان‌گونه که در بالا تعریف شد، این قابلیت را ندارد. معمولاً این تفاوت ناچیز بوده و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد، اما با در نظر گرفتن E به عنوان یک چند مجموعه^{۱۹} از بردارها هر دو تعریف کاملاً یکسان می‌شوند.

مترویدی که با یک متروید برداری برابر است، گرچه ممکن است به شکل دیگری ارائه شود، یک متروید ارائه شدنی^{۲۰} یا خطی خوانده می‌شود. اگر M با یک متروید برداری بر روی میدان $\mathbb{F}$ برابر باشد، می‌گوییم M بر $\mathbb{F}$ ارائه‌شدنی است. به طور خاص می‌گوییم M ، حقیقی-ارائه‌شدنی است، اگر بر روی اعداد حقیقی ارائه‌شدنی باشد.

مترویدهایی وجود دارند که بر روی هیچ میدانی قابل ارائه نمی‌باشند. در واقع باور داریم (البته هنوز اثبات نشده) نسبت مترویدهای n -عنصری که قابل ارائه هستند حتی برای n های کوچک نیز به بی‌نهایت میل می‌کند. ویتنی^{۲۱} در مقاله‌ای مقدماتی در باب نظریه متروید در سال ۱۹۳۵ مسأله‌ی مترویدهای ارائه‌شدنی را مطرح کرد. مسأله ویتنی تعبیر زیادی دارد چرا که پیکربندی‌های بسیار متفاوتی وجود دارد که می‌توان آنها را برای ارائه‌شدنی بودن یا نبودن بر روی یک میدان مشخص و یا نامشخص مورد بررسی قرار داد. به جز دو استثنای برجسته موجود، اکثر تفاسیر مسأله‌ی ویتنی با جواب‌های منفی روبرو شده‌اند. مراجع [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۲۲] را ببینید. استثنای اول، مسأله‌ی الگوریتمی برای تشخیص اینکه آیا یک متروید بر روی یک میدان نامشخص ارائه‌شدنی است یا خیر می‌باشد که توسط واموس^{۲۲} [۲۹] اثبات شد و البته استثنای دوم حدس روتا است.

۱.۲. دوگان متروید. مترویدها در جفت‌های دوتایی ظاهر می‌شوند. دوگان M که با M^* نمایش داده می‌شود، یک متروید بر روی E است که پایه‌های آن مکمل‌های پایه M هستند. گرچه از این تعریف به آسانی معلوم نمی‌شود، اما M^* همواره یک متروید است. شاید شگفت‌آورتر این باشد که خاصیت $\mathbb{F}$ -ارائه‌شدنی تحت دوگان برقرار می‌ماند. در واقع اگر $M = M(A)$ آنگاه $M(A)^* = M(A')$ که در آن A' ماتریسی است که فضای سطری‌اش، فضای متعامد فضای سطری A است.

۲.۲. مینورهای متروید. فرض کنید C و D مجموعه‌هایی از عناصر در متروید $M = (E, \mathcal{I})$ باشند. مترویدی که از M با حذف کردن D به دست می‌آید به شکل $(E - D, \{I \subseteq E - D : I \in \mathcal{I}\})$ تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که $M \setminus D$ به وضوح همواره یک متروید است. دوگان عمل حذف، عمل انقباض است که به صورت $M/D = (M^* \setminus C)^*$ تعریف می‌شود. این تعریف انقباض زیاد واضح نیست. از دیدگاه هندسی این عمل مطابق با تصویر کردن از C است که به سهولت می‌توان آن را توسط تابع رتبه دید:

$$r_{M/C}(X) = r_M(X \cup C) - r_M(C).$$

یک مینور M یک متروید به شکل $M \setminus D/C$ است که در آن D و C زیرمجموعه‌های مجزای E هستند. اگر $D \cup C$ ناتهی باشد، آنگاه آن را مینور سره می‌خوانیم. توجه داشته باشید که کلاس $\mathbb{F}$ -ارائه‌شدنی مترویدها، تحت هر دو عمل حذف و دوگان بسته است و بنابراین تحت مینورپذیری نیز بسته است. طبیعی است که هر کلاس مینور بسته‌ی مترویدها را با توصیف مینورهای طرد شده^{۲۳} مشخص کنیم. مینورهای طرد (استثنا) شده، مترویدهای خارج از کلاس هستند که مینورهای سره آنها همگی درون کلاس واقع شده‌اند و این ما را به حدس روتا می‌رساند [۲۰].

۱.۲. حدس (روتا) برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ ، در حد یکریختی، تنها تعداد متناهی مینور طرد شده (استثنا) برای کلاس مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه‌شدنی وجود دارد.

¹⁹ multiset ²⁰ representable ²¹ Whitney ²² Vámos ²³ Excluded-minors

از آنجا که یک کلاس مینور-بسته، توسط لیست استثناهایش مشخص می‌شود، حدس روتا یک توصیف مختصر برای کلاس مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی است.



شکل ۱: صفحه‌ی فانو F_7 ، خط ۵ نقطه‌ای $U_{2,5}$ و خط ۴ نقطه‌ای $U_{2,4}$

۳.۲. هندسه ترکیبیاتی. متروید ارائه شدنی $M = M(A)$ را در نظر بگیرید، اگر A' ماتریسی باشد که از A به وسیله‌ی اعمال سطری مقدماتی و پیمایش ستونی به دست آمده باشد، آنگاه A' نیز ارائه شدنی است. مشاهده می‌شود که در فرایند بدست آوردن ماتریس A' از A یک انتقال ساده تصویری^{۲۴} بر فضای ستونی A انجام داده‌ایم و بنابراین می‌توان گفت که A و A' از لحاظ تصویری با هم برابرند.

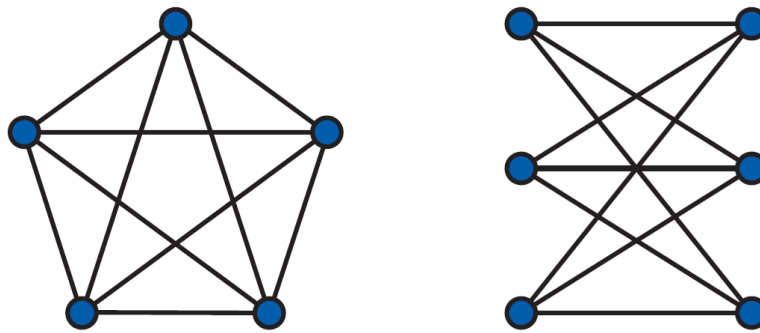
حال به جای اینکه عناصر داخل متروید ارائه شدنی را به عنوان بردارهایی در یک فضای برداری در نظر بگیریم، می‌توانیم به طور هم‌ارز آنها را به عنوان نقاط در هندسه تصویری تجسم کنیم. گرچه این یک تغییر کوچک در نحوه‌ی نگاه کردن به نظر می‌رسد اما در ادامه‌ی کار برای درک شهودی بهتر، کمک بسیاری به ما می‌کند. علاوه بر این بسیاری از واژگان مربوط به متروید از هندسه می‌آید. برای مثال سطح k -رتبه یک مجموعه ماکسیمال از رتبه‌ی k است. نقطه یک سطح ۱-رتبه، خط یک سطح ۲-رتبه، صفحه یک سطح ۳-رتبه و یک ابر صفحه^{۲۵} یک سطح از رتبه‌ی $1 - r_M(E)$ است. رویکرد هندسی این مزیت اضافی را نیز دارد که روشی برای توصیف مترویدهای با رتبه کم ارائه می‌کند. برای مثال شکل ۱ سه متروید مهم $U_{2,4}$ ، $U_{2,5}$ و F_7 را به ما نشان می‌دهد. خط ۴-نقطه‌ای $U_{2,4}$ تنها مینور استثنا برای کلاس مترویدهای دوتایی است. مینورهای استثنا برای کلاس مینورهای سه‌تایی $U_{2,5}$ و F_7 و دوگان آنها می‌باشد.

۴.۲. پروژه مینورهای گراف. مینور گراف G گرافی است که از یک زیرگراف G با استفاده از عمل انقباض روی برخی از یال‌های آن به وجود آمده است. توجه کنید که برای انقباض یک یال، دو رأس پایانی یال را تبدیل به یک رأس کرده و سپس یال‌ها را حذف می‌کنیم. توجه داشته باشید که کلاس گراف‌های مسطح، تحت مینور پذیری مسطح هستند. همان‌طور که بعدها خواهیم دید این کلاس نقشی بسیار مهم و اساسی در مطالعه‌ی مینورهای گراف ایفا می‌کند. بنابراین به جاست که کار خود را با مطالعه توصیف گراف‌های مسطح کوراتوفسکی [۱۱] که یکی از وزنه‌های ارزشمند ریاضیات است، شروع کنیم.

قضیه ۲.۲. (قضیه کوراتوفسکی) یک گراف مسطح نیست اگر و تنها اگر یک مینور یکریخت با $K_{3,3}$ یا K_5 داشته باشد.

می‌توان قضیه کوراتوفسکی را بدین شکل نیز بیان کرد: مینورهای استثنا برای کلاس گراف‌های مسطح $K_{3,3}$ و K_5 هستند. شکل ۲ را ببینید. رابرتسون و سیمور این نتیجه را از صفحه به سطوح دلخواه تعمیم دادند [۱۷].

²⁴ project Transformation ²⁵ HyperPlane



شکل ۲: گراف‌های کوراتوفسکی: $K_5, K_{3,3}$

قضیه ۳.۲. (تعمیم قضیه کوراتوفسکی) برای هر سطح دلخواه تنها تعداد متناهی مینور استثنای برای کلاس گراف‌هایی که درون این سطح نشانده شده‌اند، وجود دارد.

بعدها رابرتسون و سیمور تعمیم خود را برای کلاس‌های مینور-بسته‌ی دلخواه نیز گسترش دادند [۱۹]. دایستل^{۲۶} در کتاب خود در باب نظریه گراف [۲] می‌گوید، «این قضیه (قضیه ۴.۲) سرآمد تمام نتایج دیگر در نظریه گراف بوده و بدون شک جزء عمیق‌ترین قضایایی است که ریاضیات تاکنون ارائه کرده است.»

قضیه ۴.۲. (*Well-Quasi-Ordering*) هر کلاس مینور-بسته از گراف‌ها تنها تعداد متناهی مینور استثنای دارند.

دو بیان دیگری که در ادامه می‌آید ارائه‌های دیگری برای این قضیه می‌باشند. ۱- در هر مجموعه نامتناهی از گراف‌ها، دو گراف وجود دارد که یکی از آنها با مینور دیگری یکرخت است.

۲- تنها تعداد شمارایی از کلاس گراف‌ها موجودند که تحت مینور بسته‌اند.

اما چگونه می‌توان چنین نتیجه‌ای را اثبات کرد؟ اولین قدم واضح است، فرض کنید نتیجه غلط است، پس یک دنباله‌ی نامتناهی مانند $(H_1, H_2, \dots)$ از گراف‌ها وجود دارد که هیچ گرافی در آن با مینور یک گراف دیگر هم‌ریخت نباشد یا به طور خاص هیچ‌یک از گراف‌های $(H_2, H_3, \dots)$ شامل مینوری یکرخت با H_1 نباشد. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است: یک گراف که مینوری یکرخت با H_1 ندارد، چه شکلی خواهد بود؟ این سؤال توسط قضیه ساختار مینورهای گراف پاسخ داده می‌شود [۱۸] که آچار فرانسه پروژه مینورهای گراف است.

فرض کنید $EX(H_1)$ مجموعه گراف‌هایی باشد که شامل یک مینور یکرخت با H_1 نیستند. اگر S سطحی باشد که H_1 در آن نشانده شده (قرار گرفته) باشد، آنگاه هر گراف که در S نشانده شده به وضوح در $EX(H_1)$ است. فرض کنید $\mathcal{G}$ شامل گراف‌هایی است که در سطحی که H_1 در آن قرار نگرفته، قرار داشته باشند. پس $\mathcal{G} \subseteq EX(H_1)$. خلاصه قضیه ساختار مینورهای گراف این است که هر گراف در $EX(H_1)$ می‌تواند در یک حالت خاص از گراف‌هایی که در $\mathcal{G}$ هستند، ساخته شود.

توجه داشته باشید که اگر H_1 مسطح باشد، آنگاه در هر سطحی نشانده می‌شود و بنابراین کلاس $\mathcal{G}$ تهی است. پس گراف‌هایی که H_1 را حذف می‌کنند، ساختاری ساده و مشخصی دارند [۵]. تعمیم این نتیجه به مترویدها بر روی میدان متناهی [۵] اولین دستاورد ویتل، گیلن و جراردز بود.

قضیه ساختار مینورهای گراف کمک زیادی به اثبات قضیه WQO (قضیه ۴.۲) می‌کند، اما با این وجود هم، اثبات این قضیه به دقت بسیار زیادی نیاز دارد و ممکن است به بیش از ۱۰۰ صفحه برسد.

²⁶ Diestel

۵.۲. از گراف تا متروید. یک دور گراف $G = (V, E)$ یک زیرگراف همبند از G است که رئوس آن همگی از درجه‌ی ۲ هستند و یک جنگل از G یک زیرگراف G است که دور نداشته باشد. متروید دوری^{۲۷} G که با $M(G)$ نمایش داده می‌شود به صورت $(E, \mathcal{F})$ تعریف می‌شود، که $\mathcal{F}$ گردابه‌ای از تمام مجموعه‌های یالی درخت‌های G است. نشان دادن این‌که $M(G)$ همواره متروید است کار دشواری نیست. یک متروید را گرافیکی گوئیم اگر متروید دوری یک گراف باشد.

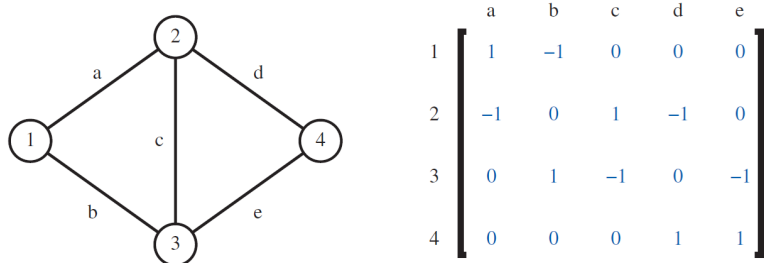
کلاس مترویدهای گرافیکی به طرز شگفت‌آوری پایه‌ای و اساسی است. تقریباً شبیه به کلاس گراف‌های مسطح که در پروژه‌ی مینورها گراف اساسی بود، قسمت‌های اساسی در نظریه متروید ریشه در نظریه گراف دارند. این اتصال به نظریه گراف باعث پیکربندی واژگان نیز شده است. توجه کنید که کمینه مجموعه‌های وابسته $M(G)$ همان مجموعه‌های یالی دورهای G هستند. این واژگان به مترویدهای کلی نیز راه می‌یابد؛ به یک مجموعه کمینه وابسته در یک متروید یک دور می‌گویند.

۶.۲. مینورها و دوگان. کلاس مترویدهای گرافیکی مینور-بسته هستند. علاوه بر این اگر D و C مجموعه‌های یالی مجزا از هم در گراف G باشند، آنگاه $M(G \setminus D/C) = M(G) \setminus D/C$. البته باید گفت که کلاس مترویدهای گرافیکی تحت دوگان بسته نیستند. در واقع گراف G مسطح است اگر و تنها اگر $M(G)^*$ گرافیکی باشد. این توصیف بسیار زیبای هندسی مسطح بودن در ابتدا توسط ویتنی مطرح شد و این توصیف اولین نشانه از ارتباط عمیق بین نظریه متروید و نظریه‌ی توپولوژیکی گراف بود.

بنا به بحث بالا، هر توصیف از کلاس مترویدهای گرافیکی، یک توصیف برای کلاس گراف‌های مسطح ارائه می‌دهد. به طور خاص توصیف مینور استثنای زیر برای کلاس مترویدهای گرافیکی که به تات [۲۴] باز می‌گردد بیان دیگری برای قضیه کوراتوفسکی است.

قضیه ۵.۲. مینورهای استثنا برای کلاس مترویدهای گرافیکی، $(F_7)^*$ ، F_7 ، $U_{2,4}$ ، $M(K_{3,3})^*$ و $M(K_5)^*$ هستند.

۷.۲. قابلیت ارائه شدن. مترویدهای گرافیکی ارائه شدنی هستند، در واقع آنها بر روی هر میدانی ارائه شدنی می‌باشند. ماتریس وقوع علامتدار گراف $G = (V, E)$ یک ماتریس مانند $A \in \{0, \pm 1\}^{V \times E}$ است که برای هر یال E با رئوس پایانی u, v ، اگر $u = v$ آنگاه ستونی که با e اندیس گذاری شده کاملاً صفر می‌شود، و اگر $u \neq v$ آنگاه ستونی که با e اندیس گذاری شده فقط یک ۱ و یک -۱ دارد که بدون هیچ ترتیب خاصی در مکان‌های (u, e) و (v, e) قرار گرفته‌اند. شکل ۳ را ببینید. به عنوان یک تمرین می‌توان نشان داد که A یک توصیف $M(G)$ بر روی هر میدان دلخواه است.



شکل ۳: یک گراف و ماتریس علامتدار وقوع آن

²⁷ Cycle-Metroid

۸.۲. مترویدهای چهارچوب. کلاس مترویدهای گرافیکی در یک کلاس غنی تر از مترویدها قرار گرفته است، که به آن کلاس مترویدهای چهارچوب^{۲۸} می گویند. یک ماتریس چهارچوب بر میدان $\mathbb{F}$ ماتریسی است که حداکثر دو عنصر ناصفر در هر ستون دارد و یک متروید چهارچوب بر میدان $\mathbb{F}$ مترویدی است که توسط ماتریس چهارچوب توصیف می گردد. همانند کلاس مترویدهای گرافیکی، کلاس مترویدهای چهارچوب نیز تحت مینور گرفتن، بسته می باشد. علاوه بر این یک راه طبیعی برای ربط دادن یک گراف با یک متروید چهارچوب وجود دارد. البته برای این که بتوان گراف را به این شکل توصیف کرد باید آن را جهت دار کنیم و به آن برجسب یالی نسبت دهیم.

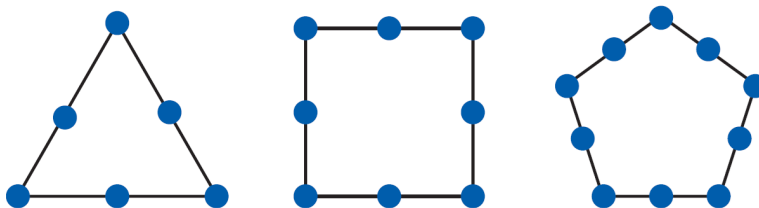
۹.۲. پروژه مینورهای متروید. حدس روتا یادآور تعمیم قضیه کوراتفسکی است. رابرتسون و سیمور توانستند با تعمیم دادن، تعمیم قضیه کوراتفسکی به قضیه WQO برسند، پس شاید حدس روتا یک حالت خاص از یک قضیه کلی تر باشد، گرچه این مطلب درست نیست که قضیه WQO را می توان برای همه ی مترویدها تعمیم داد. پادزنجیر یک متروید مجموعه تمام مترویدهایی است که هیچ کدام یکریخت با مینور دیگری نیست. ساختن یک پادزنجیر نامتناهی بسیار ساده است. برای مثال مترویدهای $\{M_3, M_4, M_5, \dots\}$ در شکل ۴ یک پادزنجیر نامتناهی از مترویدهای ۳-رتبه تشکیل می دهند.

ویتل، گیلن و جراردز توانستند تعمیم بسیار زیبای زیر را، برای قضیه WQO ثابت کنند:

قضیه ۶.۲. (قضیه WQO متروید) برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ و هر کلاس مینور بسته ای از مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی، تنها تعداد متناهی از مینورهای استثنای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی وجود دارد.

این نتیجه قابل قیاس با حدس روتا نیست، چرا که هیچ یک دیگری را تأیید نمی کند، زیرا در حدس روتا مینورهای استثنا بنا به تعریف، بر $\mathbb{F}$ ارائه پذیر نیستند.

اثبات آنها برای قضیه WQO متروید موازی با اثبات قضیه WQO برای گراف ها است. به یاد آورید که قضیه ساختار مینورهای گراف به طور ذاتی بیان می کند که هرگراف موجود در کلاس مینور بسته از گراف ها، به طریق خاصی می توانند از گراف هایی که در سطوح پایین تر قرار دارند ساخته شوند.



شکل ۴: سه متروید اول، M_3 ، M_4 و M_5 در یک پاد زنجیر نامتناهی

برای یک میدان متناهی $\mathbb{F}$ کلاس های اساسی مینور بسته ی مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی کدامند؟ بنا به دوگانگی معلوم می شود که تنها دو نوع از این دست وجود دارد. نوع اول: برای هر زیرمیدان $\mathbb{F}'$ از $\mathbb{F}$ مجموعه تمام مترویدهای $\mathbb{F}'$ -ارائه شدنی، مینور بسته است و نوع دوم: کلاس مترویدهای چهارچوب بر $\mathbb{F}$ است.

قضیه ساختار مینورهای متروید می گوید که، بر یک میدان متناهی $\mathbb{F}$ چگونه می توان به یک طریق مشخص اعضای یک کلاس مینور بسته دلخواه و ثابت مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه پذیر از مترویدهایی که بر زیرمیدان ارائه شده اند به همراه مترویدهای چهارچوب و دوگان مترویدهای چهارچوب را ساخت. همین قضیه بود که بیشترین تلاش ویتل، گیلن و جراردز را صرف خود کرد و اثبات آن بیش از یک دهه به طول انجامید.

۳. پیش به سوی حدس روتا

بالاخره در اواخر سال ۲۰۱۲ بود که ویتل، گیلن و جراردز توانستند استراتژی‌شان برای حمله به حدس روتا را فرمول‌بندی کنند. در این بخش به توصیف دستگاه‌هایی که صرفاً به منظور حل حدس روتا ساختند، می‌پردازیم. قسمت اعظم این دستگاه توسط تونی هیون^{۲۹} و استفان ون‌زوام^{۳۰} به همراه برت جراردز پیکربندی شده است.

۱.۳. همبندی. به‌طور کلی همبندی نقش بسیار مهمی در نظریه متروید و به‌طور خاص در اثبات حدس روتا ایفا می‌کند. تعاریف زیر مربوط به تات [۳۰] می‌باشند. یک k -جداسازی در متروید (E, T) یک افزاز (X, Y) از E است به طوری که $r_M(X) + r_M(Y) - r_M(E) < k, |X|, |Y| \geq k$. یک متروید k -همبند است اگر هیچ l -جداسازی نداشته باشد، جایی که $l < k$.

برای ارتقا دادن تعریف، حالتی را فرض کنید که M توسط ماتریس A توصیف شده باشد، همچنین فرض کنید $\forall$ نمایانگر فضای ستونی A باشد و $\langle X \rangle$ نمایانگر زیرفضای تولید شده $\forall$ توسط ستون‌هایی که با X اندیس‌گذاری شده‌اند باشد. قضیه بُعد برای زیرفضا نشان می‌دهد که بُعد $\langle X \rangle$ برابر است با $r_M(X) + r_M(Y) - r_M(E)$. پس وقتی $r_M(X) + r_M(Y) - r_M(E)$ کوچک باشد، X, Y توسط یک زیرفضای با بُعد کوچکتر از بُعد $\forall$ از هم جدا می‌شوند. شرط $|X|, |Y| \geq k$ یک شرط ناتباهیده^{۳۱} و لازم است، چرا که $r_M(X) + r_M(Y) - r_M(E) < \min(|X|, |Y|)$. مسائل مربوط به ارائه‌ی مترویدها معمولاً به مسائل حالت ۳-همبند می‌رسند (کاهش می‌یابند) که این در حدس روتا صدق می‌کند.

لم ۱.۳. برای میدان داده شده $\mathbb{F}$ ، هر مینور استثنا برای کلاس مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه پذیر، ۳-همبند است.

متأسفانه این لم را نمی‌توان به راحتی بهبود و تعمیم داد، چرا که برای هر میدان متناهی از مرتبه‌ی حداقل ۳، یک مینور استثنا وجود دارد که ۴-همبند نیست. مشکل از شرط ناتباهیده‌ی $|X|, |Y| \geq k$ می‌باشد، چرا که این شرط بسیار ضعیف است. ویتل، گیلن و جراردز توانستند اثبات کنند:

قضیه ۲.۳. برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ و عدد صحیح k یک عدد $n = n(\mathbb{F}, k)$ وجود دارد که اگر (A, B) یک k -جداسازی در یک مینور استثنا برای کلاس مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه پذیر باشند، آنگاه $\min(|A|, |B|) \leq n$.

اثبات ویتل، گیلن و جراردز بر پایه‌ی چندین نتیجه، سخت است که شامل قضیه WQO نیز می‌باشد. یکی از پیامدهای اعمال تکنیک‌های WQO در اثبات این است که یک کران محاسبه پذیر روی $n(\mathbb{F}, k)$ نداریم. یعنی یک کران محاسبه‌پذیر یا یک عدد و یا اندازه‌ی مینورهای استثنا برای کلاس مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی به‌دست آورده نشده است. قضیه ۲.۳ نشان می‌دهد که مینورهای استثنا در برخی حالات به شدت به هم مربوطند. بنابراین تمرکز ویتل، گیلن و جراردز بر روی مینورهای استثنایی بوده که طبق اندیشه‌های تات ارتباط زیادی با هم دارند. گرچه با انجام این کار از کلیت مسأله کاسته می‌شود، با این حال با انجام این کار از ورود به مسائل بسیار تکنیکی بدون وارد شدن خلل به اصل مسأله، اجتناب می‌شود.

۲.۳. ارائه‌های ناهم‌ارز. یادآوری می‌کنیم که اگر A_1 و A_2 دو ماتریس برابر از لحاظ تصویری باشند، آنگاه هر دو یک متروید را توصیف می‌کنند. مترویدهایی هستند که تعداد زیادی از ارائه‌های تصویری نابرابر بر روی یک میدان متناهی را می‌پذیرند و این یک منشأ اصلی برای مشکلات در حیطه‌ی ارائه مترویدها است که نیاز به توجه زیادی دارد [۶، ۸، ۱۰، ۱۴، ۲۸]. این مشکل را می‌توان با در نظر گرفتن مترویدهایی که به اندازه کافی قویاً همبند هستند، کمی سست کرد.

²⁹ Tony Huynh ³⁰ Stefan Van-zwam ³¹ nondegeneracy

قضیه ۳.۳. برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ ، اعداد صحیح n_1 و k_1 موجودند به طوریکه هر متروید k_1 - همبند حداکثر n_1 ارائه‌ی تصویری نابرابر روی $\mathbb{F}$ دارد.

قضیه ۳.۳ در سال ۲۰۱۲ توسط گیلن، جراردز، هیون و ونزوام [۳] اثبات شد. آن مقاله یک ابزار اساسی و کارآمد برای برخورد با مترویدهای قویاً همبند در اختیار قرار می‌دهد. کلید این کار، ضعیف کردن نقش همبندی برای جور شدن با قضیه ۲.۳ است. این ابزار همبندی، باید نقش بیشتری در ترکیبیات و به خصوص نظریه گراف داشته باشد.

۳.۳. انشعاب ارائه‌ها و عناصر ثابت. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان متناهی باشد و n_1 و k_1 اعدادی باشند که در قضیه ۳.۳ مطرح شدند. فرض کنید e عنصری از یک متروید $\mathbb{F}$ - ارائه شدنی باشد و $M \setminus e$ هر دو k_1 - همبند باشند. گرچه قضیه ۳.۳ نشان می‌دهد که $M \setminus e$ هر دو حداکثر n_1 ارائه نابرابر دارند، اما این مطلب را روشن نمی‌سازد که این ارائه‌ها چه ارتباطی با هم دارند. برخی از ارائه‌های $M \setminus e$ ممکن است به ارائه‌های M تعمیم پیدا نکنند، در صورتی که ممکن است باقی آنها چند شاخه (انشعاب) دو یا چند ارائه نابرابر از M داشته باشند. این شاخه شاخه شدن یک در درسر اساسی برای ویتل، گیلن و جرارد بوده که خوشبختانه متوجه دلیل این شاخه شاخه شدن، شده‌اند.

فرض کنید A یک ارائه از $M \setminus e$ باشد که به دو ارائه تصویری نابرابر $[A, u]$ و $[A, v]$ از M توسعه پیدا می‌کند. فرض

$$A' = \begin{pmatrix} e & e' \\ A & u & v \end{pmatrix} \quad \text{کنید}$$

و فرض کنید $M' = M(A')$. توجه داشته باشید که تعویض e, e' یک یکرختی از M' تعریف می‌کند و می‌گوییم e, e' در M' همزادند. علاوه بر این از آنجا که $[A, u]$ و $[A, v]$ از لحاظ تصویری نابرابر هستند، $\{e, e'\}$ یک مجموعه مستقل در M' است. می‌گوییم عنصر e در M ثابت است اگر نتوان یک متروید M' با بسط M توسط عنصر e' ارائه کرد که $\{e, e'\}$ یک مجموعه مستقل همزاد باشد. لم زیر نتیجه مستقیم بحث بالاست:

لم ۴.۳. اگر e یک عنصر ثابت در متروید M باشد، آنگاه هیچ ارائه از $M \setminus e$ به دو ارائه تصویری نابرابر از M گسترش پیدا نمی‌کند.

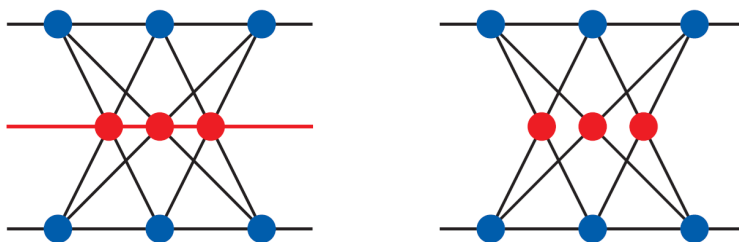
نتیجه زیر نشان می‌دهد که مترویدهای $\mathbb{F}$ - ارائه پذیر قویاً همبند، تعداد اندکی عنصر غیر ثابت دارند.

قضیه ۵.۳. برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ ، اعداد صحیح n_2 و k_2 موجودند، به طوریکه هر متروید $\mathbb{F}$ - ارائه شدنی k_2 - همبند حداکثر n_2 عضو غیر ثابت داشته باشد.

قضیه ۵.۳ توسط گیلن و ونزوام [۸] اثبات شد. این اثبات بر پایه نتیجه [۵] است که ساختار یک متروید $\mathbb{F}$ - ارائه شدنی هنگامی که متروید دور را از گراف مسطح به عنوان مینور، استثنا می‌کنیم، شرح می‌دهد. قضایای ۳.۳ و ۵.۳ کنترل زیادی بر روی ارائه نابرابر مترویدها به ما می‌دهد. گرچه در اوایل ۱۹۹۹ نتایج بسیار قوی‌تری برای کنترل ارائه‌های نابرابر مترویدهای $GF(5)$ - ارائه شدنی در اختیار داشتیم [۱۵، ۲۸]، اما هنوز مجموعه کامل مینورهای استخراج شده را نمی‌شناسیم.

۴.۳. نشان دادن یک ابرصفحه‌ی دوری. یادآوری می‌کنیم که ابر صفحه در یک متروید $M = (E, \mathcal{I})$ یک مجموعه ماکسیمال از رتبه $r_M(E) - 1$ است و یک دور نیز یک مجموعه وابسته کمینه است. اگر C هم یک دور و هم یک ابر صفحه باشد، آنگاه می‌توان متروید جدید M' را از M ، به وسیله نشان دادن C که به شکل $M' = (E, \mathcal{I} \cup C)$ است، به دست آورد. این ساختار ارائه پذیری را حفظ نمی‌کند. برای مثال مترویدهای شکل ۵ را در نظر بگیرید. متروید پاپوس^{۳۲} بر

³² Pappus



شکل ۵: از راست، متروید غیر پاپوس و متروید پاپوس

اعداد حقیقی که توسط یک خط رأست مشخص می‌شود، ارائه پذیر است. متروید غیر پاپوس از یک متروید پاپوس با نشانیدن ابرصفحه‌ی دوری که با قرمز مشخص شده به دست می‌آید. اخیراً یک اثبات از این مطلب آورده شده است که بیان می‌کند مترویدهای غیر پاپوس بر روی اعداد حقیقی ارائه شدنی نیستند. در واقع متروید غیر پاپوس بر روی هیچ میدانی ارائه شدنی نیست. نه تنها عمل نشانیدن یک ابرصفحه دوری با توجه به قابلیت ارائه شدن در حالت کلی خوب عمل نمی‌کند، حتی در برخی حالات برای میدان‌های متناهی عملکرد ضعیفی در قبال قابلیت ارائه از خود به نمایش می‌گذارد. برای صریح‌تر کردن موضوع یک روش خاص برای مشخص کردن ارائه نشدنی بودن در اثبات حدس روتا ارائه می‌دهیم. نتایج زیر نشان می‌دهد که اگر M به اندازه کافی بزرگ بوده و مترویدی به اندازه کافی همبند باشد و اگر M' مترویدی باشد که از M به وسیله‌ی نشانیدن یک ابرصفحه دوری به دست آمده باشد، آنگاه M و M' هر دو نمی‌توانند بر یک میدان متناهی داده شده ارائه شدنی باشند.

قضیه ۶.۳. برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ اعداد صحیح k_1 و n_1 موجودند، به طوری که اگر M_1 و M_2 مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی بر روی مجموعه‌های مرجع مشترک باشند، و همچنین M_2 از M_1 به وسیله‌ی نشانیدن یک ابرصفحه دوری به دست آمده باشد و M_1 ، $3 -$ همبند باشد، آنگاه $|E| < n_1$.

در واقع ویتل، گیلن و جراردز یک نتیجه قوی‌تر را ثابت کردند. توجه کنید که اگر M_2 از M_1 به وسیله‌ی نشانیدن C به دست آمده باشد، آنگاه برای هر $e \in C$ داریم $M_1 \setminus e = M_2 \setminus e$.

قضیه ۷.۳. برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ اعداد صحیح k_1 و n_1 موجودند به طوری که اگر M_1 و M_2 مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی مجزا بر روی مجموعه مرجع مشترک E باشند و M_1 ، $k_1 -$ همبند باشد، آنگاه یک مجموعه $X \in E$ وجود دارد که $|X| < n_1$ و برای هر $e \in E - X$ داریم $M_1 \setminus e \neq M_2 \setminus e$.

رسیدن به این نتیجه سخت‌ترین قدم برای حل حدس روتا است. این نتیجه به طور کامل بر پایه قضیه ساختار مینورهای متروید که قبلاً ارائه کردیم، بنا شده است. خیلی از اثبات‌ها مربوط به نظریه گراف هستند، که اندکی شگفت‌آور به نظر می‌رسد.

۵.۳. مینورهای استثنای قویاً همبند. در این بخش پایانی نشان می‌دهیم که دستگاه‌های ارائه شده در بخش‌های قبل چگونه به ما در اثبات حدس ضعیف روتا کمک می‌کند. به طور خاص اثبات می‌کنیم که برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ تنها تعداد متناهی مینور استثنای قویاً همبند برای کلاس مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی وجود دارد. این اثبات از تمام ابزارهای کلی که برای حل حدس روتا لازم است استفاده می‌کند. در مورد نتایج تکنیکی همبندی پس از اثبات صحبت خواهیم کرد.

قضیه ۸.۳. برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ ، یک عدد صحیح k وجود دارد به طوریکه کلاس مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی، شامل هیچ مینور k -همبند با $2k$ یا عضو بیشتر نیست.

اثبات: فرض کنید k_1, k_2, k_4, n_1, n_2 و n_4 اعداد صحیحی باشند که در قضایای ۳.۳، ۵.۳ و ۷.۳ آمدند. فرض کنید

$$t = n_1(n_2 + 1)(n_4 + 1),$$

و همچنین:

$$k = \max(k_1 + n_1(n_4 + 1), k_2 + t, k_4 + 1).$$

فرض کنید که یک مینور استثنای k -همبند (E, I) با $|E| > 2k$ داشته باشیم. در ادامه اثبات، آزادانه از این حقیقت استفاده خواهیم کرد که برای هر مجموعه $M \setminus Z$ ، $Z \subseteq E$ ، $(k - |Z|)$ -همبند است.

فرض کنید X_1 یک زیرمجموعه t -عنصری از E باشد، و Π یک افزاز از X به $n_1(n_4 + 1)$ مجموعه به اندازه‌های $n_2 + 1$ باشد. بنا به قضیه ۵.۳ برای هر $Y \in \Pi$ یک عنصر $e \in Y$ وجود دارد که در $M \setminus (X_1 - Y)$ ثابت است. فرض کنید X_2 یک تراگذار ۳۳ از Π باشد که تنها یک عنصر این‌چنینی از هر مجموعه Π را در بر دارد. پس $|X_2| = n_1(n_4 + 1)$. بنا به قضیه ۳.۳، $M \setminus X_2$ حداکثر n_2 ارائه نابرابر دارد. از آنجایی که M یک مینور استثناء است، $M \setminus e$ برای هر $e \in X_2$ ارائه پذیر است. پس یک ارائه A از $M \setminus X_2$ و زیر مجموعه $n_4 + 1$ عنصری X_3 از X_2 موجود است به طوریکه A به ارائه $M \setminus e$ برای هر $e \in X_2$ گسترش می‌یابد. با یک اثبات ساختنی می‌توان نشان داد که هر عنصر $e \in X_2$ در $M \setminus (X_2 - \{e\})$ ثابت است. پس بنا به لم ۴.۳ ارائه A به طور منحصر بفرد قابل تعمیم به ارائه $M \setminus (X_2 - \{e\})$ می‌شود. پس یک ماتریس منحصر بفرد A به دست می‌آوریم که $A|(E - X_2) = A$ و برای هر $e \in X_3$ داریم: $M(A) \setminus e = M \setminus e$.

از آنجایی که $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی نیست، $M \neq M(A)$. پس یک مجموعه $B \subseteq E$ وجود دارد که یک پایه در دقیقاً یکی از M و $M(A)$ است. توجه داشته باشید که $X_3 \subseteq B$. حال $f \in E \setminus B$ را در نظر بگیرید. اکنون $M \setminus f$ و $M(A) \setminus f$ مترویدهای $\mathbb{F}$ -ارائه شدنی مجزا بر روی یک مجموعه مرجع یکسان هستند. علاوه بر این برای هر $e \in X_3$ ، $M(A) \setminus f, e = M \setminus f, e$ داریم. که با قضیه ۷.۳ در تناقض است و این تناقض اثبات را کامل می‌کند.

در حالت کلی برای حل حدس روتا مانند اثبات بالا کار را با یک مینور استثنای n عنصری M شروع می‌کنیم. بنا به قضیه ۲.۳، M به طور ضعیف k -همبند است. سپس با استفاده از تکنیک‌هایی که در [۳] آورده شده، یک مجموعه t -عنصری X_1 را پیدا می‌کنیم به طوریکه پس از تعویض احتمالی M با دوگانش، $M \setminus D$ برای هر $D \subseteq X_1$ ، k -همبند ضعیف باقی بماند. ادامه‌ی اثبات، مانند بالا ادامه پیدا می‌کند.

۴. تشکر و قدردانی

در اینجا لازم می‌دانیم از راهنمایی‌ها و پیشنهادات داور محترم این مقاله سپاسگزاری نماییم.

مراجع

- [1] R. E. Bixby, On Reid's characterization of ternary matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **26** (1979) 174–204.
- [2] R. Diestel, *Graph theory*, Translated from the 1996 German original, Graduate Texts in Mathematics, **173**, Springer-Verlag, New York, 1997.

- [3] J. Geelen, B. Gerards, T. Huynh and S. van Zwam, Generating k -connected matroids (working title), in preparation.
- [4] J. Geelen, B. Gerards and G. Whittle, Excluding a planar graph from $GF(q)$ -representable matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **97** (2007) 971–998.
- [5] J. F. Geelen, A. M. H. Gerards and A. Kapoor, The excluded minors for $GF(\mathbb{F})$ -representable matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **79** (2000) 247–299.
- [6] J. Geelen, B. Gerards and G. Whittle, On inequivalent representations of matroids over non-prime fields, *J. Combin. Theory Ser. B*, **100** (2010) 740–743.
- [7] J. Geelen, B. Gerards and G. Whittle, Solving Rota’s Conjecture, *Notices Amer. Math. Soc.*, **61** (2014) 736–743.
- [8] J. Geelen and S. van Zwam, Fixed elements and matroid tangles (working title), in preparation.
- [9] J. Geelen and G. Whittle, Inequivalent representations of matroids over prime fields, *Adv. in Appl. Math.*, **51** (2013) 1–175.
- [10] J. Kahn, On the uniqueness of matroid representations over $GF(\mathbb{F})$, *Bull. London Math. Soc.*, **20** (1988) 5–10.
- [11] K. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* **15** (1930), 271–283.
- [12] T. Lazarson, The representation problem for independence functions, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958) 21–25.
- [13] D. Mayhew, M. Newman and G. Whittle, On excluded minors for real-representable matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **99** (2009) 685–689.
- [14] D. Mayhew, G. Whittle and M. Newman, Is the missing axiom of matroid theory lost forever?, *Q. J. Math.*, **65** (2014) 1397–1415.
- [15] J. Oxley, D. Vertigan and G. Whittle, On inequivalent representations of matroids over finite fields, *J. Combin. Theory Ser. B*, **67** (1996) 325–343.
- [16] N. Robertson and P. D. Seymour, Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, *J. Combin. Theory Ser. B*, **48** (1990) 227–254.
- [17] N. Robertson and P. D. Seymour, Graph Minors. VIII. A Kuratowski theorem for general surfaces, *J. Combin. Theory Ser. B*, **48** (1990) 255–288.
- [18] N. Robertson and P. D. Seymour, Graph minors. XVI. Excluding a nonplanar graph, *J. Combin. Theory Ser. B*, **89** (2003) 43–76.
- [19] N. Robertson and P. D. Seymour, Graph Minors. XX. Wagner’s Conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B*, **92** (2004) 325–357.
- [20] G.-C. Rota, *Combinatorial theory*, old and new, In Proc. Internat. Cong. Math. (Nice, 1970), Gauthier-Villars, Paris, 229–233.
- [21] P. D. Seymour, Matroid representation over $GF(\mathbb{F})$, *J. Combin. Theory Ser. B*, **26** (1979) 159–173.
- [22] J. F. Geelen, A. M. H. Gerards, and A. Kapoor, The excluded minors for $GF(\mathbb{F})$ -representable matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **79** (2000) 247–299.
- [23] J. F. Geelen, A. M. H. Gerards and A. Kapoor, Recognizing graphic matroids, *Combinatorica* **1** (1981), 387–394.
- [24] W. T. Tutte, A homotopy theorem for matroids, I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88** (1958) 144–174.
- [25] W. T. Tutte, Matroids and graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959) 527–552.
- [26] W. T. Tutte, Lectures on matroids, *J. Nat. Bur. Standards Sect. B* **69B** (1965) 1–47.
- [27] H. Whitney, Non-separable and planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932) 339–362.
- [28] H. Whitney, On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.*, **57** (1935) 509–533.
- [29] G. Whittle, Stabilizers of classes of representable matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **77** (1999) 39–72.
- [30] P. Vámos, *A necessary and sufficient condition for a matroid to be linear*, In Möbius algebras (Proc. Conf. Univ. Waterloo), University of Waterloo, Waterloo, 1971 162–169

سعید علیخانی

یزد، صفاییه، دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی

alikhani@yazd.ac.ir



سعید علیخانی، دانشیار گروه ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد است. تحقیقاتش در حوزه نظریه گراف و ترکیبیات جبری می باشد. از جمله کارهای پژوهشی او می توان به چندجمله ای های وابسته به گراف، برجسب گذاری های مختلف گراف، رنگ آمیزی گراف و محاسبات شاخص های توپولوژیکی نانو ساختارها اشاره کرد. از مهمترین دستاوردهای پژوهشی او می توان به معرفی چندجمله ای غالب (احاطه گر) گراف برای اولین بار در سال ۲۰۰۹ اشاره نمود که مورد استقبال بسیاری از ریاضیدانان داخلی و خارجی قرار گرفته است. ایشان مقالات توصیفی در حوزه آموزش ریاضی و عمومی کردن ریاضی در نشریه های آموزش ریاضی، برهان و اتحاد معلمان به رشته تحریر در آورده است. وی در مقطعی عضو هیات تحریریه خبرنامه انجمن ریاضی ایران بوده و مقالات و گزارش های متعددی را در خبرنامه به چاپ رسانده است. ایشان مدیر مسئول و عضو هیات تحریریه نشریه ساختارهای جبری و کاربردهای آن که توسط دانشگاه یزد انتشار می یابد، نیز است.

علی نوروزی

تهران، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

alinoroozics@gmail.com



علی نوروزی فارغ التحصیل دوره کارشناسی علوم کامپیوتر دانشگاه یزد و دانشجوی کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیر کبیر تهران است. ایشان چندین مقاله ترجمه ای در خبرنامه انجمن ریاضی ایران ارائه کرده است.