

خواص جبری مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس

خدیدجه فتحعلیخانی* و علی رضا اشرفی

چکیده. ابرمکعب n -بعدی Q_n گرافی است که رئوس آن رشته‌های دودویی $x_1x_2\cdots x_n$ بوده و در آن دو رأس با یکدیگر مجاورند، هرگاه به‌طور دقیق در یک مولفه متفاوت باشند و یا به عبارتی، فاصله همینگ آن‌ها یک باشد. زیرگراف‌های ابرمکعب مدلی طبیعی برای شبکه‌های ارتباطی به‌دست می‌دهند و از این رو مطالعه آن‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. برخی از زیرگراف‌های آن مانند مکعب‌های فیبوناتچی و مکعب‌های لوکاس از سال‌های دهه ۵۰ میلادی بسیار مورد مطالعه ریاضی‌دانان، دانشمندان کامپیوتر و مهندسان قرار گرفته‌اند. یک مکعب فیبوناتچی زیرگرافی از ابرمکعب است به‌طوری‌که رأس‌های آن رشته‌های دودویی هستند که هیچ دو ۱ متوالی ندارند. در واقع، مکعب فیبوناتچی Γ_n گرافی است دویخشی که از Q_n با حذف تمام رأس‌هایی که حداقل دو ۱ متوالی دارند، به‌دست می‌آید. رئوس یک مکعب لوکاس علاوه بر این خاصیت، در مکان ابتدایی و انتهایی خود همزمان ۱ ندارند. هدف این مقاله مروری بر خواص جبری این مکعب‌ها است.

۱. مقدمه

نخست بیان می‌کنیم که در سراسر این مقاله، منظور از گراف، یک گراف همبند، ساده و غیرجهت‌دار است. یک زیرگراف از گراف Γ ، گرافی است مانند Γ' که در آن مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌ها زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌های متناظر در Γ هستند. منظور از یک رشته، دنباله‌ای از حروف و ارقام است. تعداد این حروف و ارقام را طول رشته می‌گوییم. در صورتی‌که عناصر یک رشته ۰ و ۱ باشند، آن‌گاه آن را یک رشته دودویی می‌نامیم. برای مثال، 0100110 و 1111 رشته‌های دودویی به‌ترتیب به طول‌های ۷ و ۴ هستند. منظور از فاصله همینگ بین دو رشته، تعداد مولفه‌هایی است که آن دو رشته با هم اختلاف دارند. همچنین، یک ابرمکعب n -بعدی Q_n گرافی است که مجموعه رأس‌های آن رشته‌های دودویی به طول n هستند و در آن دو رأس مجاورند، هرگاه فاصله همینگ آن‌ها یک باشد.

فاصله بین دو رأس u و v در یک گراف را با $d(u, v)$ نشان داده و به‌صورت طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v تعریف می‌کنیم. سه رأس x, y و z از گراف همبند Γ را در نظر بگیرید. رأس p را یک رأس میانی آن‌ها می‌نامیم، هرگاه

$$d(x, p) + d(p, y) = d(x, y),$$

$$d(y, p) + d(p, z) = d(y, z),$$

$$d(x, p) + d(p, z) = d(x, z).$$

عبارات و کلمات کلیدی. ابرمکعب، مکعب فیبوناتچی، مکعب لوکاس، گروه خودریختی.

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۷/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۴/۰۷

Γ را یک **گراف میانی** می‌گوییم، هرگاه هر سه رأس دلخواه از آن یک رأس میانی داشته باشند. یک مثال از گراف‌های میانی، ابرمکعب‌ها هستند. برای یافتن رأس میانی x از رئوس a, b, c کافی است از قاعده اکثریت به این ترتیب استفاده کنیم که $x_i = 0$ ، اگر حداقل دو تا از a_i, b_i, c_i صفر باشند و در غیر این صورت، $x_i = 1$.

گراف مکمل گراف Γ ، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن با مجموعه رأس‌های Γ برابر است و در آن دو رأس مجاورند، هرگاه در Γ مجاور نباشند. زیرگراف Γ' از Γ را **طول-پایا** می‌نامیم، هرگاه برای هر دو رأس دلخواه u و v از Γ' ، فاصله آن‌ها در Γ' با فاصله آن‌ها در Γ برابر باشد. یک زیرگراف طول-پایا از ابرمکعب، **مکعب جزئی** نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد که گراف‌های میانی، مکعب‌های جزئی هستند. (بخش ۲، ۳ از [۱۹] را ببینید). توجه داریم که هر مکعب جزئی، میانی نیست. برای مثال، یک دور با شش رأس را در نظر بگیرید. این گراف مکعب جزئی است، درحالی‌که میانی نیست.

حاصل ضرب دکارتی دو گراف Γ و Γ' که با $\Gamma \square \Gamma'$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن برابر با حاصل ضرب دکارتی مجموعه رئوس Γ در Γ' است. دو رأس (γ_1, γ'_1) و (γ_2, γ'_2) مجاورند، هرگاه $\gamma_1 = \gamma_2$ و $\gamma'_1 \gamma'_2$ یالی از Γ' باشد یا $\gamma'_1 = \gamma'_2$ و $\gamma_1 \gamma_2$ یالی از Γ باشد. با توجه به این‌که ضرب دکارتی گراف‌ها در حد یک‌ریختی، جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است، برای نشان دادن ضرب دکارتی گراف‌های $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ می‌توان از نماد $\square_{i=1}^k \Gamma_i$ استفاده کرد که در آن k عددی صحیح و مثبت است. ساده‌ترین مثال از حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها ابرمکعب‌ها هستند، ابرمکعب Q_n حاصل ضرب دکارتی n نسخه از K_2 است. احکام زیادی در مورد حاصل ضرب دکارتی دو گراف وجود دارند. برای مثال، در [۲۱] ثابت شده است که حاصل ضرب دکارتی دو گراف میانی، میانی است. اضافه می‌کنیم که یک گراف را نسبت به حاصل ضرب دکارتی **اول** می‌نامیم اگر غیربدیهی باشد و نیز آن را نتوان به صورت حاصل ضرب دو گراف غیر بدیهی نوشت. قابل توجه است که هر گراف همبند نسبت به ضرب دکارتی دارای تجزیه‌ای یکتا به عوامل اول است [۳۱].

فرض کنیم Γ یک گراف و $f: V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ تابعی دوسویی است. f را یک خودریختی از Γ نامیم، هرگاه برای هر $uv \in E(\Gamma)$ ، $u, v \in V(\Gamma)$ اگر و تنها اگر $f(u)f(v) \in E(\Gamma)$ ، مجموعه تمام خودریختی‌های گراف Γ را با $Aut(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان دید که $Aut(\Gamma)$ با عمل ترکیب توابع یک گروه است و آن را **گروه خودریختی** گراف Γ می‌نامیم. برای مثال، به سادگی می‌توان دید که گروه خودریختی یک دور n -رأسی همان گروه تقارن‌های یک n -ضلعی منتظم است. بنابراین $Aut(C_n) = D_{2n}$ که در آن D_{2n} گروه دووجهی از مرتبه $2n$ است. یادآوری می‌کنیم که D_{2n} را می‌توان به صورت

$$D_{2n} = \langle x, y \mid x^2 = 1, y^n = 1, (xy)^2 = 1 \rangle$$

نیز نشان داد.

این بخش را با چند تعریف از نظریه گروه‌ها به پایان می‌رسانیم. فرض کنیم G یک گروه و N یک زیرگروه از آن است. N را **زیرگروه نرمال** G می‌نامیم و می‌نویسیم $N \trianglelefteq G$ ، هرگاه برای هر $g \in G$ و هر $n \in N$ ، $gng^{-1} \in N$. فرض کنیم $(G, \cdot)$ و $(H, *)$ دو گروه هستند. تابع $f: G \rightarrow H$ را یک **هم‌ریختی** از G به H می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in G$ ، $f(a.b) = f(a) * f(b)$. به عبارتی، یک هم‌ریختی، تابعی است از یک دستگاه جبری به دستگاه جبری دیگر که ساختار آن دستگاه را حفظ می‌کند. در صورتی که f یک‌به‌یک و پوشا نیز باشد، آنگاه آن را یک **یک‌ریختی** از G به H می‌نامیم. در این صورت می‌گوییم گروه G با گروه H یک‌ریخت است و می‌نویسیم $G \cong H$. دسته مهمی از یک‌ریختی‌ها، آن‌هایی هستند که از گروه G به خود G تعریف می‌شوند و به آن‌ها خودریختی گفته می‌شود. به عبارتی، هر یک‌ریختی $f: G \rightarrow G$ را یک **خودریختی** G می‌نامیم. مجموعه تمام خودریختی‌های گروه G را با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم یک گروه X یک مجموعه ناتهی است. می‌گوییم G روی X عمل می‌کند، هرگاه تابع $\rho: G \times X \rightarrow X$ که در آن $\rho(g, x) := x^g$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in X$ و هر $g, h \in G$ ، $x^{gh} = (x^g)^h$ و نیز $x^e = x$ ، به این عمل، **عمل گروه بر یک مجموعه** می‌گوییم. در این عمل، منظور از مدار x مجموعه $\{x^g \mid g \in G\}$ است.

فرض کنیم گروه‌های $(H, *)$ و $(K, \cdot)$ مفروض هستند. روی مجموعه حاصل ضرب دکارتی آن‌ها و به عبارتی مجموعه $H \times K = \{(h, k) \mid h \in H, k \in K\}$ عمل $\circ$ را به صورت $(h_1, k_1) \circ (h_2, k_2) = (h_1 * h_2, k_1 \cdot k_2)$ تعریف می‌کنیم که در آن $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$. در این صورت $(H \times K, \circ)$ یک گروه است. این گروه را حاصل ضرب مستقیم دو گروه H و K نامیده و با $H \times K$ نشان می‌دهیم. سؤالی که در این جا مطرح می‌شود این است که با داشتن یک گروه دلخواه G ، اگر H و K دو زیرگروه آن باشند، چه وقت می‌توان G را به صورت $H \times K$ نوشت؟ این سؤال را به این صورت پاسخ می‌دهیم که اگر H و K دو زیرگروه از گروه G باشند، آن‌گاه G را می‌توان به صورت حاصل ضرب مستقیم $H \times K$ نوشت اگر و تنها اگر $G = HK$ ، H و K هر دو در G نرمال باشند و نیز $H \cap K = \{e\}$.

روش دیگر برای ساختن یک گروه بزرگ‌تر از دو گروه مفروض، حاصل ضرب نیم‌مستقیم است. فرض کنیم H و K دو گروه دلخواه و $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ یک هم‌ریختی است. در مجموعه حاصل ضرب دکارتی $H \times K$ ، عمل دوتایی آن را به صورت

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, \varphi_{h_2}(k_1) k_2)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، مجموعه $H \times K$ با این عمل یک گروه است که آن را حاصل ضرب نیم‌مستقیم H در K با عمل φ می‌نامیم و با $H \rtimes_{\varphi} K$ نشان می‌دهیم. در صورتی که ابهامی برای φ نباشد، از نماد $H \rtimes K$ استفاده می‌کنیم. به طور مشابه با قبل، این سؤال مطرح می‌شود که چه زمان گروه G را می‌توان به صورت حاصل ضرب نیم‌مستقیم زیرگروه‌های آن نوشت؟ این سؤال را نیز به این صورت پاسخ می‌دهیم که اگر G یک گروه و H و K دو زیرگروه آن باشند، آن‌گاه در صورتی که K در G نرمال باشد، $H \cap K = \{e\}$ و $G = HK$ ، می‌توان نوشت $H \rtimes_{\varphi} K$ که در آن $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ یک هم‌ریختی است که با تزویج تعریف می‌شود.

آخرین ضربی که در این جا با استفاده از [۱] معرفی می‌کنیم، حاصل ضرب حلقوی است. فرض کنیم H و K دو گروه و Ω یک مجموعه، چنان هستند که K بر Ω عمل می‌کند. حاصل ضرب حلقوی $H \wr K$ عبارت است از مجموعه تمام زوج‌های (f, k) که در آن $k \in K$ و f نگاشتی از Ω به H است. برای این زوج‌ها قانون زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f_1, k_1)(f_2, k_2) = (g, k_1 k_2)$$

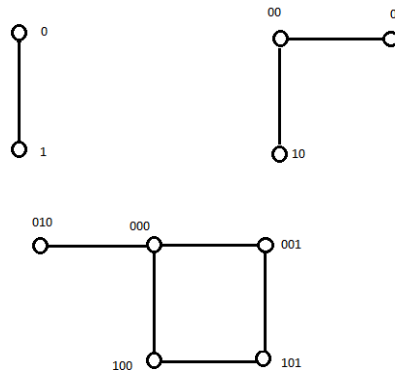
به طوری که در آن $g : \Omega \rightarrow H$ نگاشتی است که برای هر $i \in \Omega$ ، $g(i) = f_1(i) f_2(i^{k_1})$. در این صورت، $H \wr K$ دارای ساختار یک گروه است و آن را حاصل ضرب حلقوی گروه H توسط K می‌نامیم. در صورتی که $|\Omega| = n$ ، آن‌گاه $H \wr K$ دارای زیرگروه نرمال $H^* = H_1 \times \dots \times H_n$ است که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $H_i \cong H$ و $H^*/H^* \cong K$. در نتیجه $|H \wr K| = |H|^n |K|$.

۲. ویژگی‌های جبری مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس

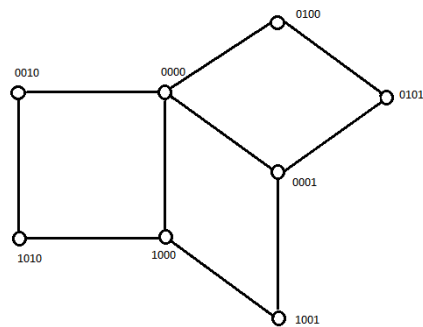
در این بخش، ابتدا مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس را تعریف کرده و سپس ویژگی‌های جبری آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای کسب اطلاعات بیشتر درباره این مکعب‌ها مراجع [۲، ۳، ۲۰] را پیشنهاد می‌کنیم.

۱.۲. تعریف مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس. در سال ۱۹۹۳ هسو^۱ مکعب‌های فیوناتچی را تعریف کرد [۱۷]: یک مکعب فیوناتچی n -بعدی Γ_n زیرگرافی از ابرمکعب n -بعدی Q_n است که رأس‌های آن رشته‌های دودویی هستند به طوری که در آن‌ها دو ۱ متوالی وجود ندارد. به دلیل ویژگی‌های خاص آن‌ها، این مکعب‌ها در علوم مختلف، بسیار مورد توجه بوده‌اند [۱۷، ۱۸، ۱۹]. رأس‌های مکعب فیوناتچی Γ_n را رشته‌های فیوناتچی به طول n می‌نامیم و با C_n نشان می‌دهیم. به عبارتی، رشته‌های دودویی که دو ۱ متوالی ندارند را رشته‌های فیوناتچی می‌نامیم. با توجه به تعریف، $\Gamma_1 = K_2$. همچنین، برای سهولت تعریف می‌کنیم $\Gamma_0 = K_1$. مکعب Γ_n برای n ‌های کوچک در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ رسم شده‌اند.

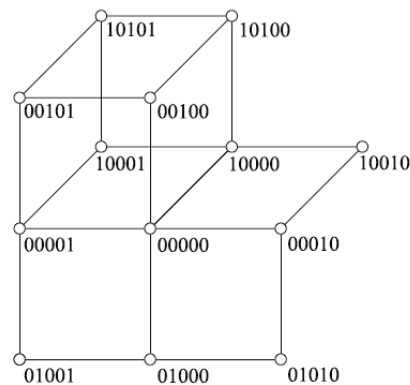
^۱Hsu



شکل ۱: مکعب Γ_n برای $n = ۱, ۲, ۳$.

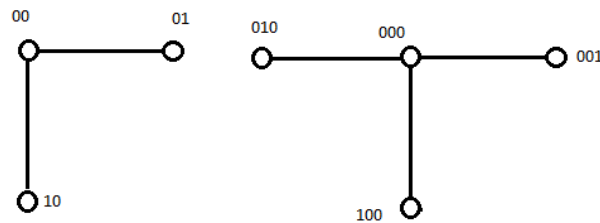


شکل ۲: مکعب فیبوناتچی $\Gamma_۴$.



شکل ۳: مکعب فیبوناتچی $\Gamma_۵$.

زیرگرافی از Γ_n که رأس‌های آن به‌طور همزمان در ابتدا و انتها ۱ ندارند، مکعب لوکاس می‌نامیم. به این ترتیب، یک مکعب لوکاس n -بعدی زیرگرافی از ابرمکعب Q_n است که با حذف رأس‌هایی که دو ۱ متوالی دارند و نیز رأس‌هایی که به‌طور همزمان در ابتدا و انتها ۱ دارند، حاصل می‌شود. مجموعه رأس‌های مکعب لوکاس را رشته‌های لوکاس می‌نامیم. مکعب لوکاس n -بعدی را با Λ_n و مجموعه رشته‌های لوکاس به طول n را با $\hat{C}_n$ نشان می‌دهیم [۲۶]. با توجه به تعریف، $\Lambda_1 = K_1$ ، $\Lambda_2 = P_3$ و $\Lambda_3 = K_{1,3}$ (شکل ۴ را ببینید). مکعب‌های لوکاس نیز کاربردهای وسیعی در زمینه‌های مختلف دارند و بسیار مورد مطالعه بوده‌اند [۱۴، ۱۵، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۶، ۳۲]. برای مثال، می‌توان از کاربرد این مکعب‌ها در سیستم‌های چند پردازنده نام برد [۲۶].



شکل ۴: مکعب Λ_n برای $n = 2, 3$.

مجموعه رشته‌های فیبوناتچی را که تعداد ۱‌های آن‌ها عددی زوج است، با E_n و مجموعه رشته‌های فیبوناتچی با تعداد ۱‌های فرد را با O_n نشان می‌دهیم. همچنین، به ترتیب از e_n و o_n برای نشان دادن اندازه این مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم. به‌طور مشابه، منظور از $\hat{E}_n$ و $\hat{O}_n$ مجموعه رشته‌های لوکاس هستند که تعداد ۱‌های آن‌ها به‌ترتیب زوج یا فرد باشند. $\hat{o}_n$ نیز اندازه این مجموعه‌ها هستند.

فرض کنیم $n \geq 1$. برای $0 \leq k \leq n$ ، منظور از $\Gamma_{n,k}$ و $\Lambda_{n,k}$ به ترتیب مجموعه رأس‌هایی از Γ_n و Λ_n هستند که در رشته دودویی خود دارای k تا ۱ باشند. بنابراین $\Gamma_{n,0} = \Lambda_{n,0} = \{0^n\}$ و یا

$$\Gamma_{n,1} = \Lambda_{n,1} = \{10^{n-1}, 010^{n-2}, \dots, 0^{n-1}1\}.$$

با توجه به تعریف روشن است که هر رأس از $\Gamma_{n,k}$ به‌طور دقیق با k رأس از $\Gamma_{n,k-1}$ مجاور است. همچنین، چون در هر رأس از $\Gamma_{n,k}$ ، k تا ۱ و $n-k$ تا ۰ وجود دارد، پس برای شمارش $|V(\Gamma_{n,k})|$ ، در هر رشته n -تایی، ابتدا ۰‌ها را قرار داده و سپس ۱‌ها را در 1 تا $n-k+1$ مکان باقی‌مانده بین ۰‌ها جای‌گذاری می‌کنیم. بنابراین،

$$|V(\Gamma_{n,k})| = \binom{n-k+1}{k}.$$

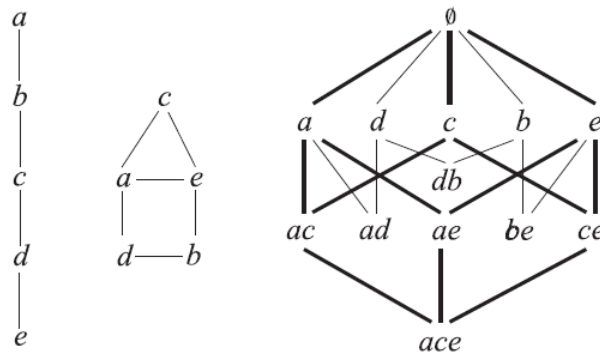
دنباله $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ با $F_0 = 0$ ، $F_1 = 1$ و $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ که به‌صورت بازگشتی با $F_0 = 0$ ، $F_1 = 1$ و $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ تعریف می‌شود، دنباله اعداد فیبوناتچی می‌نامیم. همچنین، دنباله حاصل از رابطه بازگشتی $L_0 = 2$ ، $L_1 = 1$ و $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ دنباله اعداد لوکاس نامیده می‌شود.

فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت است و $1 \leq m \leq n$. یک مثلث فیبوناتچی به‌صورت $F_{n,m} = F_m F_{n-m+1}$ در ردیف n ام است [۱۶]. از تعریف روشن است که این مثلث متقارن است و به‌عبارتی $F_{n,m} = F_{n-m+1}$. چند ردیف نخست از این مثلث را در جدول ۱ نشان داده‌ایم.

					۱					
					۱		۱			
				۲		۱		۲		
			۳		۲		۲		۳	
		۵		۳		۴		۳		۵
	۸		۵		۶		۶		۵	۸
۱۳		۸		۱۰		۹		۱۰		۱۳
۲۱		۱۳		۱۶		۱۵		۱۶		۲۱

جدول ۱: چند ردیف نخست از مثلث فیوناتچی.

۲.۲. یکریختی مکعب‌های فیوناتچی با گراف سادگی و تجزیه این مکعب‌ها. گراف سادگی $\kappa(G)$ از گراف G ، گرافی است که رئوس آن زیرگراف‌های کامل G به همراه زیرگراف تهی هستند و دو رأس آن مجاورند اگر آن دو زیرگراف کامل در یک رأس متفاوت باشند. گراف مکمل $\overline{P_n}$ از مسیر n رأسی P_n را در نظر بگیرید. پیش از قضیه ۱، ۲ از مرجع [۱۰] آمده است که برای $n \geq 1$ رابطه $\Gamma_n \simeq \kappa(\overline{P_n})$ برقرار است. شکل ۵، گراف P_5 ، مکمل آن (گراف خانه) و $\kappa(\overline{P_5})$ را نشان می‌دهد. برای نشان دادن یکریختی بین این گراف و Γ_5 ، در شکل ۵، ۳- مکعب القایی از Γ_5 را پررنگ رسم کرده‌ایم.



شکل ۵: P_5 ، $\overline{P_5}$ و Γ_5 به عنوان گراف سادگی از $\overline{P_5}$.

همان‌طور که پیش‌تر تعریف کرده‌ایم، یک گراف را نسبت به حاصل ضرب دکارتی اول می‌نامیم اگر غیربدیهی باشد و نیز آن را نتوان به صورت حاصل ضرب دو گراف غیربدیهی نوشت. با توجه به این‌که ابرمکعب Q_n را می‌توان به صورت حاصل ضرب دکارتی n نسخه از K_2 نوشت، این سؤال مطرح می‌شود که آیا مکعب‌های فیوناتچی را نیز می‌توان به صورت حاصل ضرب چند گراف نوشت یا خیر. این سؤال در [۳۳] پاسخ داده شده است: برای هر $n \geq 1$ ، مکعب‌های فیوناتچی Γ_n نسبت به ضرب دکارتی اول هستند.

۳.۲. مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس نیم‌مشبکه هستند. مجموعه مرتب جزئی $(A, \leq)$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $B \subseteq A$. کوچک‌ترین کران بالای B را سوپریوم و یا وست B و بزرگ‌ترین کران پایین آن را اینفیموم و یا رسند آن می‌نامیم. اگر $B = \{a, b\}$ ، آنگاه وست آن را با $a \vee b$ و رسند آن را با $a \wedge b$ نشان می‌دهیم.

مجموعه مرتب جزئی $(A, \leq)$ را یک نیم‌مشبکه وست و یا یک نیم‌مشبکه رسند می‌نامیم، اگر هر مجموعه دوعضوی $\{a, b\} \subseteq A$ به‌ترتیب دارای یک وست و یا یک رسند باشد. همچنین $(A, \leq)$ را یک مشبکه می‌نامیم، هرگاه هم یک نیم‌مشبکه وست و هم یک نیم‌مشبکه رسند باشد. به بیان دیگر، منظور از یک مشبکه، یک مجموعه مرتب جزئی است که در آن هر دو عنصر دل‌خواه دارای یک وست یکتا و یک رسند یکتا هستند.

مشبکه $(A, \leq)$ را کران‌دار می‌نامیم، هرگاه عنصر ماکسیمم ۱ و عنصر مینیمم ۰ چنان موجود باشند که برای هر $x \in A$ ، $0 \leq x \leq 1$. اگر x و y عناصری از یک مشبکه باشند، می‌گوییم x, y را می‌پوشاند، هرگاه $y > x$ و نیز عنصر دیگری مانند z نباشد که $y > z > x$. لازم به ذکر است که منظور از $y > x$ آن است که $x \leq y$ و $x \neq y$. فرض کنیم ۰ عنصر مینیمم A است. $x \in A$ را یک اتم می‌نامیم، هرگاه $0 < x$ و هیچ عنصر $y \in A$ نباشد که $0 < y < x$. به عبارتی، یک اتم، عنصری است که ۰ را می‌پوشاند. مجموعه تمام اتم‌ها را با $Atom(A)$ نشان می‌دهیم. $(A, \leq)$ را اتمی می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ ، زیرمجموعه $S \subseteq Atom(A)$ چنان باشد که $x = \vee S$ ، به بیان دیگر، هرگاه برای هر عنصر ناصفر $x \in A$ ، اتم a چنان موجود باشد که $a \leq x$. همچنین، $(A, \leq)$ را به‌طور اکید اتمی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in A$ ، $S \subseteq Atom(A)$ به‌طور یکتا موجود باشد که $x = \vee S$.

در [۲۶] و [۲۷] مکعب‌های فیوناتچی و مکعب‌های لوکاس از دیدگاه جدیدی مورد بررسی قرار گرفته‌اند که در ادامه به بیان آن‌ها می‌پردازیم. فرض کنیم C_n مجموعه تمام رشته‌های فیوناتچی به طول n است. رابطه ترتیب زیر را بر C_n تعریف می‌کنیم:

برای هر $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in C_n$ اگر و تنها اگر برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $a_i \leq b_i$ وست و رسند این دو عضو را نیز به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \vee \beta = (max(a_1, b_1), max(a_2, b_2), \dots, max(a_n, b_n)),$$

$$\alpha \wedge \beta = (min(a_1, b_1), min(a_2, b_2), \dots, min(a_n, b_n)).$$

عنصر مینیمم $0^n = (0, \dots, 0)$ است و نیز $(C_n, \leq)$ نسبت به رسند بسته است، بنابراین C_n یک نیم‌مشبکه رسند است. توجه داریم که برای هر رشته β با k تا ۱، به‌طور دقیق k اتم $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ چنان موجودند که $\beta = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_k$. پس $(C_n, \leq)$ یک نیم‌مشبکه اتمی است.

در نمودار هاسه $(C_n, \leq)$ دو رشته متمایز را با یک یال به یکدیگر وصل می‌کنیم، اگر و تنها اگر یکی، دیگری را بپوشاند. به عبارتی، هرگاه فاصله همینگ آن‌ها یک باشد. به این ترتیب، گرافی که از نمودار هاسه به‌دست می‌آید، همان گراف Γ_n است. می‌توان بررسی کرد که هرگز دو رشته که تعداد ۱‌های آن‌ها زوجیت یکسان دارند، با هم مجاور نیستند. بنابراین، مجموعه‌های E_n و O_n (مجموعه تمام رشته‌های به طول n که تعداد ۱‌های آن‌ها به‌ترتیب زوج یا فرد هستند). درواقع بخش‌های گراف دوبخشی Γ_n هستند.

همانند آن‌چه برای Γ_n انجام دادیم، مجموعه رشته‌های لوکاس $\hat{C}_n$ را نیز می‌توان به‌طور جزئی مرتب کرد. برای رشته‌های لوکاس $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ رابطه $\leq$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i \leq b_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

همچنین،

$$\alpha \vee \beta = (max(a_1, b_1), max(a_2, b_2), \dots, max(a_n, b_n)),$$

$$\alpha \wedge \beta = (min(a_1, b_1), min(a_2, b_2), \dots, min(a_n, b_n)).$$

عنصر مینیمم $0^n = (0, \dots, 0)$ است و نیز $(\hat{C}_n, \leq)$ نسبت به رسند بسته است. بنابراین، $(\hat{C}_n, \leq)$ یک نیم‌مشبکه رسند است.

۴.۲. بردارهای شمارنده یال در مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس. فرض کنیم H زیرگرافی از ضرب دکارتی $G = \square_{i=1}^k G_i$ ($k \geq 1$) است. همچنین فرض کنیم که $e = hh'$ یالی از H است که در آن $h = (h_1, h_2, \dots, h_k)$ و $h' = (h'_1, h'_2, \dots, h'_k)$ در این صورت، به طور دقیق یک i وجود دارد که $h_i h'_i \in E(G_i)$ ، به طوری که برای هر $j \neq i$ ، $h_j = h'_j$ است. برای $i = 1, 2, \dots, k$ ، تعریف می‌کنیم:

$$E_i(H; G) = \{e \in E(H) \mid e \text{ از نوع } i \text{ است}\}.$$

با معرفی $e_i(H; G) = |E_i(H; G)|$ ، بردار شمارنده یال H از ضرب دکارتی G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v(H; G) = (e_1(H; G), e_2(H; G), \dots, e_k(H; G)).$$

توجه داریم که چون H یک زیرگراف ثابت از ضرب دکارتی G است، پس $v(H; G)$ خوش تعریف است. همچنین، گراف G می‌تواند نمایش‌های مختلفی به صورت ضرب دکارتی داشته باشد و نیز زیرگراف H می‌تواند به روش‌های مختلفی بر ضرب دکارتی G بنشیند. برای مثال، در $G = P_2 \square P_2$ ، $v(P_2; G)$ می‌تواند هر یک از بردارهای $(1, 1)$ ، $(0, 2)$ و $(2, 0)$ باشد. برای ابرمکعب $G = \square_{i=1}^n K_2$ ، داریم $v(Q_n, G) = (2^{n-1}, \dots, 2^{n-1})$ که برداری به طول n است. اگر $G = K_2 \square Q_{n-1}$ ، آن‌گاه $v(Q_n, G) = (2^{n-1}, (n-1)2^{n-1})$. برای گراف همبند G ، فرض کنیم که نمایش آن به صورت ضرب دکارتی، تجزیه یکتای آن به عوامل اول است. به طور خاص، n -مکعب Q_n را همواره به صورت $\square_{i=1}^n K_2$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۲. ([۲۳]) فرض کنیم $n \geq 1$. در این صورت برای نشانده شدن طبیعی Γ_n بر Q_n ،

$$v(\Gamma_n; Q_n) = (F_1 F_n, F_2 F_{n-1}, \dots, F_n F_1).$$

در نتیجه برای هر $n \geq 1$ ، بردار $v(\Gamma_n; Q_n)$ ، n امین ردیف از مثلث فیوناتچی است.

قضیه ۲.۲. ([۲۳]) فرض کنیم $n \geq 2$. در این صورت برای نشانده شدن طبیعی Λ_n بر Q_n ،

$$v(\Lambda_n; Q_n) = (F_{n-1}, F_{n-1}, \dots, F_{n-1}).$$

ابرمکعب‌ها (و نیز گراف‌های C_6 و P_3) را می‌توان توسط بردار شمارنده یال آن‌ها تشخیص داد ([۲۳]). این مطلب، برای مکعب‌های فیوناتچی با n کوچک نیز برقرار است. حال این سؤال به طور طبیعی مطرح می‌شود که آیا می‌توان در حالت کلی، مکعب‌های فیوناتچی را در میان مکعب‌های جزیی به کمک بردار شمارنده یال آن‌ها تشخیص داد؟ به طور دقیق‌تر، سؤال. با فرض این که G یک مکعب جزیی و $v(G; Q_n)$ با ردیف n ام مثلث فیوناتچی برابر باشد، آیا می‌توان گفت که Γ_n با یکریخت است؟

توجه داریم که می‌توان گراف‌هایی را یافت که مکعب جزیی نباشند، اما بردار شمارنده یال آن‌ها با این بردار از Γ_n ($n \geq 4$) برابر باشد.

۵.۲. چندجمله‌ای مکعب. در [۱۷، ۲۶] فرمول‌های مختلفی برای تعداد رأس‌ها، تعداد یال‌ها و تعداد مربع‌های مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس ارائه شده‌اند. حالت کلی‌تر، محاسبه چندجمله‌ای مکعب آن‌ها است. در گراف G ، $c_n(G)$ ($n \geq 0$) را تعداد زیرگراف‌های القایی G که با Q_n یکریخت هستند، تعریف می‌کنیم. در حالت خاص، $c_0(G) = |V(G)|$ ، $c_1(G) = |E(G)|$ و $c_2(G)$ تعداد مربع‌های آن است. چندجمله‌ای مکعب G را با $C(G, x)$ نشان داده و به صورت تابع مولد دنباله c_n و با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$C(G, x) = \sum_{n \geq 0} c_n(G) x^n.$$

این چندجمله‌ای نخست در [۹] تعریف شده است. در گزاره ۲ از همان مقاله [۹] داریم که برای هر گراف G و H ،

$$C(G \square H, x) = C(G, x)C(H, x). \quad (۱.۲)$$

همچنین، اگر G یک گراف میانی باشد، آن‌گاه $C(G, -1) = 1$ و $C'(G, -1)$ کوچک‌ترین n است که G به‌طور طول-پایا بر Q_n بنشیند. لازم به ذکر است که در [۶] این چندجمله‌ای‌ها به چندجمله‌ای‌های همینگ تعمیم یافته‌اند. اطلاعات بیشتر در مورد چندجمله‌ای‌های مکعب را می‌توانید در [۲۴] بیابید. جالب است بدانیم که دنباله $\{c_k(G)\}_{k \geq 0}$ در بررسی ژنتیک انسان بسیار مهم است.

صفرهای چندجمله‌ای مکعب یک گراف میانی در [۸] بررسی شده‌اند. ثابت شده است که $C(G, x)$ هیچ صفری در $[-1, \infty)$ ندارد. این درحالی است که همواره یک صفر (حقیقی) در $(-2, -1)$ دارد. همچنین، همه صفرهای اعشاری آن به شکل $-(t+1)/t$ هستند که در آن $t > 0$ عددی صحیح است. توجه داریم که اگر چندجمله‌ای مکعب $C(G, x)$ از درجه p باشد، آن‌گاه $C(G, x)$ یک صفر از مرتبه تکرار p دارد، اگر و تنها اگر حاصل ضرب دکارتی p درخت از یک مرتبه باشد. با استفاده از رابطه $C(Q_p, x) = (x+2)^p$ می‌توان گفت که چندجمله‌ای مکعب گراف‌های میانی بدون Q_3 از درجه دو بوده و نیز صفرهای آن‌ها همواره حقیقی هستند [۷].

اضافه می‌کنیم که چون Q_n را می‌توان به‌صورت حاصل ضرب دکارتی n نسخه از K_2 نوشت، پس از رابطه (۱.۲) می‌توان برای هر $n \geq 0$ نوشت:

$$C(Q_n, x) = (2+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1+x)^i. \quad (۲.۲)$$

در ادامه چندجمله‌ای مکعب در مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس مطرح خواهند شد. ابتدا چند مثال از چندجمله‌ای مکعب برای مکعب‌های فیوناتچی را از [۲۲] ارائه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} C(\Gamma_0, x) &= 1, \\ C(\Gamma_1, x) &= x+2, \\ C(\Gamma_2, x) &= 2x+3, \\ C(\Gamma_3, x) &= x^2+5x+5, \\ C(\Gamma_4, x) &= 3x^2+10x+8, \\ C(\Gamma_5, x) &= x^3+9x^2+20x+13, \\ C(\Gamma_6, x) &= 4x^3+22x^2+38x+21, \\ C(\Gamma_7, x) &= x^4+14x^3+51x^2+71x+34, \\ C(\Gamma_8, x) &= 5x^4+40x^3+111x^2+130x+55. \end{aligned}$$

تابع مولد دنباله $\{C(\Gamma_n, x)\}_{n=0}^{\infty}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

قضیه ۳.۲. ([۲۲]) تابع مولد دنباله $\{C(\Gamma_n, x)\}_{n=0}^{\infty}$ برابر است با

$$\sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n, x)y^n = \frac{1+y(1+x)}{1-y-y^2(1+x)}.$$

اثبات. روشن است که $C(\Gamma_0, x) = 1$ و $C(\Gamma_1, x) = x + 2$. فرض کنیم $n \geq 2$. قرار می‌دهیم $X_n = \{x \in V(\Gamma_n) \mid x_1 = 0\}$ و $Y_n = \{x \in V(\Gamma_n) \mid x_1 = 1\}$. در این صورت، X_n زیرگرافی یک‌ریخت با Γ_{n-1} و Y_n زیرگرافی یک‌ریخت با Γ_{n-2} القا می‌کند. همچنین، هر رأس از Y_n به‌طور دقیق یک همسایه در X_n دارد. به این ترتیب، اگر H زیرگرافی از Γ_n باشد که با Q_k یک‌ریخت است، آنگاه یکی از این حالت‌ها ممکن است: (الف) H در زیرگراف القایی توسط X_n قرار دارد، (ب) H در زیرگراف القایی توسط Y_n قرار دارد، (ج) $H = K \square K_2$ که در آن K با Q_{k-1} یک‌ریخت است و یال‌های $K \square K_2$ که با K_2 متناظر هستند، درواقع یال‌های بین X_n و Y_n هستند. بنابراین،

$$C(\Gamma_n, x) = C(\Gamma_{n-1}, x) + (1+x)C(\Gamma_{n-2}, x), \quad (n \geq 2) \quad (3.2)$$

حال اگر قرار دهیم $f(x, y) = \sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n, x)y^n$ ، آنگاه

$$f(x, y) - 1 - y(x+2) = y(f(x, y) - 1) + y^2(1+x)f(x, y)$$

□

و اثبات کامل می‌شود.

در همان مرجع، از قضیه ۳.۲ نتیجه شده است که برای هر $n \geq 0$ ، $C(\Gamma_n, x)$ از درجه $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ است و

$$C(\Gamma_n, x) = \sum_{a=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-a+1}{a} (1+x)^a.$$

سپس این مطلب حاصل شده است که برای هر $n \geq 0$ ، تعداد $c_k(\Gamma_n)$ ($k \geq 0$) القایی در Γ_n برابر است با

$$c_k(\Gamma_n) = \sum_{i=k}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i+1}{i} \binom{i}{k}.$$

در همان مرجع [۲۲] آمده است که $c_k(\Gamma_n)$ را با رابطه زیر نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$c_k(\Gamma_n) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}; \\ i_1 + i_2 + \dots + i_{k+1} = n - 2k + 1}} F_{i_1+1} F_{i_2+1} \cdots F_{i_{k+1}+1},$$

که در آن $n \geq 1$. برای n ‌های مشابه، داریم:

$$c_k(\Gamma_n) = \sum_{i=k}^{n-2k+2} F_i c_{k-1}(\Gamma_{n-i-1}).$$

به‌طور مشابه، با فرض این‌که $k \geq 1$ یک عدد صحیح ثابت است، تابع مولد دنباله $\{c_k(\Gamma_n)\}_{n=0}^{\infty}$ برابر است با [۲۲]:

$$\sum_{n \geq 0} c_k(\Gamma_n) y^n = \frac{y^{2k-1}}{(1-y-y^2)^{k+1}}.$$

در پایان، اضافه می‌کنیم که مولارد^۲ تعداد k -مکعب‌های القاشده ماکسیمال (نسبت به شمول) در مکعب فیبوناتچی را محاسبه کرده است:

^۲ Mollard

قضیه ۴.۲. ([۲۵]) برای هر $k \geq 1$ ، تعداد Q_k های القایی ماکسیمال در Γ_n برابر است با

$$\binom{k+1}{n+1-2k}.$$

حال چندجمله‌ای مکعب در مکعب‌های لوکاس مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این جا نیز ابتدا این چندجمله‌ای‌ها را برای n های کوچک از مرجع [۲۲] می‌آوریم:

$$\begin{aligned} C(\Lambda_0, x) &= 1, \\ C(\Lambda_1, x) &= 1, \\ C(\Lambda_2, x) &= 2x + 3, \\ C(\Lambda_3, x) &= 3x + 4, \\ C(\Lambda_4, x) &= 2x^2 + 8x + 7, \\ C(\Lambda_5, x) &= 5x^2 + 15x + 11, \\ C(\Lambda_6, x) &= 2x^3 + 15x^2 + 30x + 18, \\ C(\Lambda_7, x) &= 7x^3 + 35x^2 + 56x + 29, \\ C(\Lambda_8, x) &= 2x^4 + 24x^3 + 80x^2 + 104x + 47. \end{aligned}$$

با استدلالی مشابه با آنچه برای رابطه (۳.۲) ارائه شد، در [۲۲] رابطه زیر آمده است:

$$C(\Lambda_n, x) = C(\Gamma_{n-1}, x) + (1+x)C(\Gamma_{n-2}, x) \quad (4.2)$$

و از آن جا برای تابع مولد دنباله $\{C(\Lambda_n, x)\}_{n=0}^{\infty}$ رابطه زیر ارائه شده است:

$$\sum_{n \geq 0} C(\Lambda_n, x) y^n = \frac{1 + y^2(1+x)}{1 - y - y^2(1+x)}.$$

حال داریم:

قضیه ۵.۲. ([۲۲]) برای هر $n \geq 3$ ، $C(\Lambda_n, x)$ از درجه $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ است و

$$C(\Lambda_n, x) = \sum_{a=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} [2 \binom{n-a}{a} - \binom{n-a+1}{a}] (1+x)^a.$$

از روابط (۳.۲) و (۴.۲) رابطه زیر را نیز نتیجه شده است:

$$C(\Lambda_n, x) = C(\Lambda_{n-1}, x) + (1+x)C(\Lambda_{n-2}, x) \quad (n \geq 3). \quad (5.2)$$

همچنین، در [۲۲] ثابت شده است که

$$C(\Gamma_{2p}, x) = C(\Gamma_{p-1}, x)C(\Lambda_{p+1}, x), \quad p \geq 1.$$

الف. برای هر $1 \leq p$ ، $C(\Gamma_{2p}, x) = C(\Gamma_{p-1}, x)C(\Lambda_{p+1}, x)$.

ب. برای هر $0 \leq n, k$ ، $C(\Gamma_{k(n+2)+n}, x)$ را می‌شمارد.

ج. برای هر $1 \leq n, k$ ، $C(\Lambda_{kn}, x)$ را می‌شمارد.

اضافه می‌کنیم که برای $n \geq 1$ ، تعداد Q_k القایی در Λ_n برابر است با: [۲۲]

$$c_k(\Lambda_n) = \sum_{i=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\binom{n-i}{i} - \binom{n-i+1}{i} \right] \binom{i}{k}.$$

همچنین، برای هر $k \geq 1$ می‌توان نوشت: [۲۲]

$$\begin{aligned} c_k(\Lambda_n) &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}; \\ i_1 + i_2 + \dots + i_{k+1} = n - 2k}} L_{i_1} F_{i_2+1} \dots F_{i_{k+1}+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-2k} L_i c_{k-1}(\Gamma_{n-i-2}). \end{aligned}$$

با فرض این‌که $k \geq 1$ یک عدد صحیح ثابت است، برای تابع مولد دنباله $\{c_k(\Lambda_n)\}_{n=0}^\infty$ داریم:

$$\sum_{n \geq 0} c_k(\Lambda_n) y^n = \frac{y^{2k} (2-y)}{(1-y-y^2)^{k+1}}. \quad (۶.۲)$$

در پایان، برای هر $n \geq 1$ ، ریشه‌های $C(\Gamma_n, x)$ به شکل

$$-\frac{\tan^2 \left(\frac{r\pi}{n+2} \right) + 5}{4}$$

هستند که در آن $r = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. همچنین، ریشه‌های $C(\Lambda_n, x)$ به شکل

$$-\frac{\tan^2 \left(\frac{(2r+1)\pi}{2n} \right) + 5}{4}$$

هستند که در آن $r = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. به عبارتی، تمام ریشه‌ها اعداد حقیقی منفی هستند. یادآوری می‌کنیم که دنباله $\{A_n\}_{n=0}^m$ از اعداد حقیقی را تک‌نمایی می‌گوییم، هرگاه برای برخی مقادیر $0 \leq j \leq m$ داشته باشیم $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_m$. همچنین دنباله $\{A_n\}_{n=0}^m$ از اعداد حقیقی مثبت مقعر لگاریتمی است، هرگاه برای هر $1 \leq i \leq m$ ، $a_i^2 \geq a_{i-1} a_{i+1}$ می‌توان بررسی کرد که یک دنباله مقعر لگاریتمی مثبت، تک‌نمایی است. اطلاعات بیشتر در مورد این دو نوع از دنباله‌ها را می‌توانید در [۳۰] بیابید. برای هر $n \geq 0$ ، دنباله ضرایب $C(\Gamma_n, x)$ و $C(\Lambda_n, x)$ تک‌نمایی و مقعر لگاریتمی هستند [۲۲].

۳. بعد فیوناتچی

بعد فیوناتچی گراف G که در [۱۰] معرفی شده است، با $fdim(G)$ نشان داده می‌شود و کوچک‌ترین عدد صحیح n است که G به‌طور طول-پایا بر Γ_n بنشیند. در این صورت، می‌توان رشته‌های فیوناتچی Γ_n را با هر رأس G چنان متناظر کرد که زیرگراف القایی Γ_n و G دارای فاصله‌های یکسان باشند. همچنین، $idim(G)$ بعد طول-پایای G است و آن کوچک‌ترین n است که G به‌طور طول-پایا بر Q_n می‌نشیند.

قضیه ۱.۳. ([۱۰]) فرض کنیم G یک گراف همبند است. در این صورت، $fdim(G)$ متناهی است اگر و تنها اگر $idim(G)$ متناهی باشد، اگر و تنها اگر G یک مکعب جزئی باشد. همچنین،

$$idim(G) \leq fdim(G) \leq 2idim(G) - 1.$$

در همان مرجع [۱۰] کران بالا به صورت زیر بهبود یافته است:

$$fdim(G) \leq idim(G) + ldim(G) - 1$$

که در آن $ldim(G)$ بعد مشبکه G است و به صورت کوچک‌ترین عدد صحیح n تعریف می‌شود که G به طور طول-پایا بر $\mathbb{Z}^n$ یا به طور معادل، حاصل ضرب دکارتی n مسیر بنشیند. همچنین، ثابت می‌شود $ldim(G) \leq idim(G)$. اطلاعات بیشتر در مورد بعد فیوناتچی و نیز الگوریتم‌های مرتبط را در [۱۰] بیابید. بعد لوکاس را نیز می‌توان به طور مشابه تعریف کرد ولی تاکنون کاری در این رابطه انجام نیافته است.

۴. گروه خودریختی مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس

گروه خودریختی مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس در [۱۱] و [۳۲] محاسبه شده‌اند و مدارهای رأسی و یالی آن‌ها، به همراه برخی خواص دیگر نیز در [۴] به دست آمده‌اند. اما پیش از شروع بحث در مورد این دو نوع مکعب، به بیان گروه خودریختی ابرمکعب n -بعدی می‌پردازیم.

قضیه ۱.۴. [۱۳] گروه خودریختی ابرمکعب n -بعدی با گروهی به شکل $Z_2 \wr S_n$ یک‌ریخت است.

گروه خودریختی مکعب‌های فیوناتچی در [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته است. برای $n \geq 1$ ، نگاشت معکوس $\beta: \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n$ را به صورت $\beta(b_1 b_2 \dots b_n) = b^n = b_n b_{n-1} \dots b_1$ تعریف می‌کنیم. روشن است که β یک خودریختی Γ_n است. ثابت می‌شود که β تنها خودریختی غیربدیهی Γ_n است و بنابراین،

قضیه ۲.۴. [۱۱] $Aut(\Gamma_n) \simeq Z_2$ ، برای هر $n \geq 1$.

گروه خودریختی مکعب‌های لوکاس در [۳۲] بررسی شده است. ابتدا نگاشت φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi: \Lambda_n \rightarrow \Lambda_n$$

$$\varphi(b_1 b_2 \dots b_n) = b_n b_1 \dots b_{n-1}.$$

روشن است که φ یک خودریختی Λ_n است. ثابت می‌شود که $Aut(\Lambda_n)$ توسط β و φ^a برای $0 \leq a \leq n-1$ ، تولید می‌شود و بنابراین،

قضیه ۳.۴. [۳۲] $Aut(\Lambda_n) \simeq D_{2n}$ ، برای هر $n \geq 3$.

۱.۴. مدارهای رأسی و یالی در مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس و تعبیر ترکیبیاتی آن‌ها. مدارهای رأسی و یالی مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس، تعبیرهای ترکیبیاتی آن‌ها و همچنین دنباله‌های عددی متناظر، در [۴] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. لازم به یادآوری است که دنباله‌های عددی مختلف به همراه خواص، فرمول‌ها و مراجع آن‌ها در سایت oeis.org جمع‌آوری شده‌اند [۲۹]. دنباله‌هایی که در [۴] به دست آمده‌اند، مانند دنباله‌های A_{129526} ، A_{250114} ، A_{246998} ، A_{001224} و A_{00358} در این سایت و به نام نویسندگان آن موجود هستند.

فرض کنیم G یک گراف است. مجموعه مدارهای حاصل از عمل $Aut(G)$ بر $V(G)$ را با $\mathcal{O}_V(G)$ و تعداد آن را با $o_V(G) = |\mathcal{O}_V(G)|$ نشان می‌دهیم. به طور مشابه، $\mathcal{O}_E(G)$ مجموعه مدارهای عمل $Aut(G)$ بر $E(G)$ و $o_E(G) = |\mathcal{O}_E(G)|$ اندازه آن است. منظور از عمل $Aut(G)$ بر $E(G)$ ، عمل طبیعی است که در آن برای هر $g \in Aut(G)$ ، یال $\{u, v\}$ به یال $\{g(u), g(v)\}$ نگاشت می‌شود. مدار $u \in V(G)$ را با $\bar{u}$ و اندازه آن را با $|\bar{u}|$ و مدار $e \in E(G)$ را با $\bar{e}$ و اندازه آن را با $|\bar{e}|$ نشان می‌دهیم. همچنین، از نمادهای زیر برای تعداد مدارهای با اندازه k استفاده می‌کنیم:

$$o_V(G, k) = |\{X \in \mathcal{O}_V(G); |X| = k\}|,$$

$$o_E(G, k) = |\{Y \in \mathcal{O}_E(G); |Y| = k\}|.$$

به این ترتیب، روابط زیر برقرارند:

$$\sum_k k o_V(G, k) = |V(G)|, \quad \sum_k o_V(G, k) = o_V(G),$$

$$\sum_k k o_E(G, k) = |E(G)|, \quad \sum_k o_E(G, k) = o_E(G).$$

در قضیه ۲.۴ دیدیم که برای $n \geq 1$ ، مکعب فیوناتچی Γ_n به طور دقیق یک خودریختی غیربدیهی می پذیرد و بنابراین $|Aut(\Gamma_n)| = 2$. به این ترتیب، اندازه مدارهای آن ۱ و ۲ هستند. داریم:

قضیه ۴.۴. ([۴]) قرار می دهیم $n \geq 2$. در این صورت

$$o_V(\Gamma_n, 1) = F_{\lfloor \frac{n-(-1)^n}{2} \rfloor + 2},$$

$$o_V(\Gamma_n, 2) = \frac{1}{2} \left(F_{n+2} - F_{\lfloor \frac{n-(-1)^n}{2} \rfloor + 2} \right),$$

$$o_V(\Gamma_n) = \frac{1}{2} \left(F_{n+2} + F_{\lfloor \frac{n-(-1)^n}{2} \rfloor + 2} \right).$$

این مقادیر برای مکعب های فیوناتچی کوچک در جدول ۲ محاسبه شده اند.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
$ V(\Gamma_n) $	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	۱۴۴	۲۳۳	۳۷۷	۶۱۰	۹۸۷	۱۵۹۷
$o_V(\Gamma_n)$	۱	۲	۴	۵	۹	۱۲	۲۱	۳۰	۵۱	۷۶	۱۲۷	۱۹۵	۳۲۲	۵۰۴	۸۲۶
$o_V(\Gamma_n, 1)$	۰	۱	۳	۲	۵	۳	۸	۵	۱۳	۸	۲۱	۱۳	۳۴	۲۱	۵۵
$o_V(\Gamma_n, 2)$	۱	۱	۱	۳	۴	۹	۱۳	۲۵	۳۸	۶۸	۱۰۶	۱۸۲	۲۸۸	۴۸۳	۷۷۱

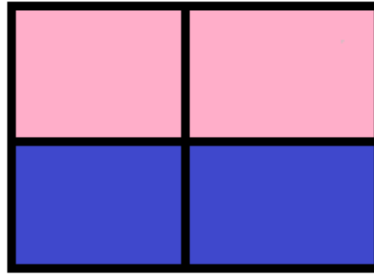
جدول ۲: تعداد رأس ها، مدارها، مدارهای از اندازه ۱ و مدارهای از اندازه ۲ در $V(\Gamma_n)$ برای $n \leq 15$.

لازم به ذکر است که اعداد $o_V(\Gamma_n)$ به عنوان راه حلی برای برخی از مسائل شمارشی ترکیبیاتی به کار می روند. برای مثال، پتن^۳ و گلمب^۴ در سال ۱۹۶۲ مسئله زیر را مطرح کردند [۲۸]: به چند روش یک مستطیل $(n+1) \times 2$ را می توان توسط دومینوها (مستطیل هایی با ابعاد 1×2 و 2×1) پوشاند؟ به طور دقیق تر، مسئله از تعداد روش های متمایز پوشش می پرسد که در آن دو پوشش متمایزند، اگر یکی را نتوان از دیگری با انعکاس و یا چرخش به دست آورد. در این جا پاسخ را با $o_V(\Gamma_n)$ بیان می کنیم [۴]: (این نتیجه در [۲۹] با نام دنباله $A001224$ آمده است). برای $n \in \{0, 1\}$ این مطلب به طور مستقیم قابل بررسی است. (شکل های ۶ و ۷ را ببینید).



شکل ۶: پوشش مستطیل 2×1 توسط دومینوها.

³Patten ⁴Golomb



شکل ۷: پوشش مستطیل 2×2 توسط دومینوها.

برای $n \geq 2$ ، یک اثبات دوطرفه ارائه می‌دهیم:

فرض کنیم $u \in V(\Gamma_n)$ و $v = u \circ \in V(\Gamma_{n+1})$. به v یک پوشش از مستطیل $2 \times (n+1)$ با دومینوها را به این صورت نسبت می‌دهیم که در گذر از v از چپ به راست، به هر $\circ$ یک دومینوی عمودی و به هر $\bullet$ یک جفت دومینوی افقی متناظر می‌کنیم. به عکس، به هر پوشش از مستطیل $2 \times (n+1)$ با گذر از چپ به راست، $v \in V(\Gamma_{n+1})$ را طوری متناظر می‌کنیم که دومینوهای عمودی با $\bullet$ و هر جفت از دومینوهای افقی با $\bullet$ کد گذاری شوند. در این صورت، v با $\circ$ پایان می‌یابد. از v ، پایانی آن را حذف کرده و عنصر حاصل را $u \in V(\Gamma_n)$ می‌نامیم. به این ترتیب، یک دوسویی بین $V(\Gamma_n)$ و مجموعه تمام پوشش‌های مستطیل $2 \times (n+1)$ ایجاد می‌شود. در واقع، یک دوسویی بین $\mathcal{O}_V(\Gamma_n)$ و مجموعه تمام پوشش‌های متمایز مستطیل $2 \times (n+1)$ به دست آورده‌ایم.

دسته دیگر از عناصر ترکیبیاتی که با $\mathcal{O}_V(\Gamma_n)$ شمارش می‌شوند، افزایش‌های عددی مرتب‌شده از $n+1$ هستند به طوری که جمع‌وندهای آن از مجموعه $\{1, 2\}$ باشند و در آن دو افزایش را متمایز گوئیم، هرگاه یکی را نتوان از دیگری با انعکاس به دست آورد. برای مثال، فرض کنید $n = 4$. افزایش‌های عددی مورد نظر از $n+1 = 5$ را در زیر می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 5 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 2 + 1 + 1 \\ &= 2 + 1 + 2 \\ &= 2 + 2 + 1 \end{aligned}$$

به وضوح، این دسته از افزایش‌ها در تناظر دوسویی با پوشش‌های متمایز از مستطیل $2 \times (n+1)$ توسط دومینوها هستند. برای این کار، کافی است به هر 1 در افزایش، یک دومینوی عمودی و به هر 2 در آن، یک جفت دومینوی افقی نسبت دهیم و به عکس.

تعداد مدارهای یالی مکعب‌های فیوناتچی نیز در [۴] محاسبه شده‌اند: برای هر $n \geq 0$ ،

$$\begin{aligned} o_E(\Gamma_n, 1) &= \frac{1 - (-1)^n}{4} F_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \\ o_E(\Gamma_n, 2) &= \frac{1}{4} (nF_{n+1} + 2(n+1)F_n) - \frac{1 - (-1)^n}{4} F_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \\ o_E(\Gamma_n) &= \frac{1}{4} (nF_{n+1} + 2(n+1)F_n) + \frac{1 - (-1)^n}{4} F_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

مقادیر بالا برای مکعب‌های فیوناتچی با بعد $n \leq 14$ در جدول ۳ گردآوری شده‌اند. محاسبه تعداد مدارهای رأسی مکعب‌های لوکاس کمی پیچیده‌تر است:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
$ E(\Gamma_n) $	۱	۲	۵	۱۰	۲۰	۳۸	۷۱	۱۳۰	۲۳۵	۴۲۰	۷۴۴	۱۳۰۸	۲۲۸۵	۳۹۷۰
$o_E(\Gamma_n)$	۱	۱	۳	۵	۱۱	۱۹	۳۷	۶۵	۱۲۰	۲۱۰	۳۷۶	۶۵۴	۱۱۴۹	۱۹۸۵
$o_E(\Gamma_n, ۱)$	۱	۰	۱	۰	۲	۰	۳	۰	۵	۰	۸	۰	۱۳	۰
$o_E(\Gamma_n, ۲)$	۰	۱	۲	۵	۹	۱۹	۳۴	۶۵	۱۱۵	۲۱۰	۳۶۸	۶۵۴	۱۱۳۶	۱۹۸۵

جدول ۳: تعداد یال‌ها، مدارها، مدارهای با اندازه ۱ و مدارهای با اندازه ۲ در $E(\Gamma_n)$ برای $n \leq ۱۴$.

قضیه ۵.۴. ([۴]) برای هر $n \in \mathbb{N}$,

$$o_V(\Lambda_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) L_d + F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} \right).$$

که در آن φ ، تابع φ اویلر است.

تعبیرهای ترکیبیاتی متناظر با تعداد مدارهای رأسی مکعب‌های لوکاس را می‌توانید در [۲] بیابید. در تعیین اندازه مدارهای رأسی در مکعب‌های لوکاس، روشن است که اندازه‌های آن‌ها باید مرتبه D_{2n} را بشمارند. اما نتیجه زیر نشان می‌دهد که هر شمارنده $2n$ نمی‌تواند اندازه یک مدار باشد.

قضیه ۶.۴. ([۴]) برای هر $n \in \mathbb{N}$,

$$\{|X|; X \in \mathcal{O}_V(\Lambda_n)\} = \{k \geq 1; k | n\} \cup \{k \geq 18; k | 2n\}.$$

همچنین، در [۴] تعداد مدارهای رأسی با اندازه‌های مختلف در این نوع از مکعب‌ها مشخص شده است. برای هر $k | 2n$ و $n \in \mathbb{N}$

$$o_V(\Lambda_n, k) = \begin{cases} \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) F_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2}, & k | n \wedge \text{فرد } k \\ \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) F_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2} + \frac{1}{k} \sum_{d|\frac{k}{2}} \mu\left(\frac{k}{2d}\right) (L_d - \frac{k}{2} F_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2}), & k | n \wedge \text{زوج } k \\ \frac{1}{k} \sum_{d|\frac{k}{2}} \mu\left(\frac{k}{2d}\right) (L_d - \frac{k}{2} F_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2}), & k | 2n \wedge k \nmid n \end{cases}$$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
$o_V(\Lambda_n)$	۱	۲	۲	۳	۳	۵	۵	۸	۹	۱۴	۱۶	۲۶	۳۱	۴۹	۶۴	۹۹	۱۳۳	۲۰۹
$o_V(\Lambda_n, n)$	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۴	۵	۶	۹	۱۲	۱۵	۲۰	۲۸	۳۰	۴۷	۵۴	۷۹
$o_V(\Lambda_n, 2n)$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۳	۵	۱۰	۱۵	۳۰	۴۴	۷۸	۱۱۹

جدول ۴: تعداد مدارها، مدارهای با اندازه n و مدارهای با اندازه $2n$ در $V(\Lambda_n)$ برای $n \leq ۱۸$.

برای درک بهتر این روابط، جدول ۴ را ببینید. در ادامه، یک رابطه جالب بین $o_V(\Gamma_n)$ و $o_E(\Lambda_n)$ ارائه می‌دهیم که اولی در واقع انتقالی از دومی است. از [۴] داریم که برای $n \geq ۵$ ، $o_E(\Lambda_n) = o_V(\Gamma_{n-3})$ ، همچنین، از همان مرجع می‌دانیم

که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$o_E(\Lambda_n) = \frac{1}{\varphi} \left(F_{n-1} + F_{\lfloor \frac{n+1+(-1)^n}{\varphi} \rfloor} \right).$$

قضیه زیر نیز در مورد اندازه مدارهای یالی مکعب‌های لوکاس بحث می‌کند.

قضیه ۷.۴. ([۴]) برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\{|X|; X \in \mathcal{O}_E(\Lambda_n)\} \subseteq \{n, 2n\},$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $n \geq 5$.

و در پایان،

نتیجه ۸.۴. ([۴]) برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} o_E(\Lambda_n, n) &= F_{\lfloor \frac{n+1+(-1)^n}{\varphi} \rfloor}, \\ o_E(\Lambda_n, 2n) &= \frac{1}{\varphi} \left(F_{n-1} - F_{\lfloor \frac{n+1+(-1)^n}{\varphi} \rfloor} \right). \end{aligned}$$

مقادیر متناظر با قضیه بالا برای مکعب لوکاس Λ_n با $n \leq 16$ در جدول ۵ محاسبه شده‌اند.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
$o_E(\Lambda_n)$	۰	۱	۱	۲	۲	۴	۵	۹	۱۲	۲۱	۳۰	۵۱	۷۶	۱۲۷	۱۹۵	۳۲۲
$o_E(\Lambda_n, n)$	۰	۱	۱	۲	۱	۳	۲	۵	۳	۸	۵	۱۳	۸	۲۱	۱۳	۳۴
$o_E(\Lambda_n, 2n)$	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۳	۴	۹	۱۳	۲۵	۳۸	۶۸	۱۰۶	۱۸۲	۲۸۸

جدول ۵: تعداد مدارها، مدارهای با اندازه n ، و مدارهای با اندازه $2n$ در $E(\Lambda_n)$ برای $n \leq 16$.

۵. نتیجه گیری

در این مقاله خواص جبری مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس را مورد مطالعه قرار دادیم. گروه خودریختی این گراف‌ها و مدارهای آن روی رأس‌ها و یال‌ها را بررسی کردیم. همچنین، بیان کردیم که این گراف‌ها نیم‌مشبکه هستند و ساختار ترتیبی دارند. مطالعه گروه خودریختی این ساختار ترتیبی و انطباق آن با گروه خودریختی گراف‌های متناظر، از مسائلی است که در آینده بایستی به آن پرداخت. لازم به ذکر است که وجود کدهای تام در مکعب‌های فیبوناتچی در [۵] بررسی شده است، در حالی که اطلاعاتی در مورد وجود این کدها در مکعب‌های لوکاس در دست نیست. بنابراین بررسی کدهای تام در مکعب‌های لوکاس مسئله باز دیگری است که می‌توان به آن پرداخت.

مراجع

- [۱] م. ر. درفشه، مقدمه‌ای بر نظریه گروه‌ها، تهران، نشر علوم پایه، ۱۳۶۹.
- [۲] خ. فتحعلیخانی، خواص جبری و متریک ابرمکعب و برخی زیرگراف‌های آن، رساله دکتری، دانشگاه کاشان، ۱۳۹۴.
- [۳] خ. فتحعلیخانی، ع. ر. اشرفی، خواص متریک و ترکیبیاتی مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس، پذیرش شده در مجله محاسبات نرم، ۱۳۹۵.
- [4] A. R. Ashrafi, J. Azarija, Kh. Fathalikhani, S. Klavžar and M. Petkovšek, Vertex and edge orbits of Fibonacci and Lucas cubes, *Ann. Comb.*, **20** (2016) 209–229.

- [5] A. R. Ashrafi, J. Azarija, A. Babai, Kh. Fathalikhani and S. Klavžar, The (non-)existence of perfect codes in Fibonacci cubes, *Inform. Process. Lett.*, **116** (2016) 387–390.
- [6] B. Brešar, P. Dorbec, S. Klavžar and M. Mollard, Hamming polynomials and their partial derivatives, *European J. Combin.*, **28** (2007) 1156–1162.
- [7] B. Brešar, S. Klavžar and R. Škrekovski, On cube-free median graphs, *Discrete Math.*, **307** (2007) 345–351.
- [8] B. Brešar, S. Klavžar and R. Škrekovski, Roots of cube polynomials of median graphs, *J. Graph Theory*, **52** (2006) 37–50.
- [9] B. Brešar, S. Klavžar and R. Škrekovski, The cube polynomial and its derivatives: the case of median graphs, *Electron. J. Combin.*, **10** (2003) Research Paper 3, 11 pp.
- [10] S. Cabello, D. Eppstein and S. Klavžar, The Fibonacci dimension of a graph, *Electron. J. Combin.*, **18** (2011) Research Paper 55, 23 pp.
- [11] A. Castro, S. Klavžar, M. Mollard and Y. Rho, On the domination number and the Ψ -packing number of Fibonacci cubes and Lucas cubes, *Comput. Math. Appl.*, **61** (2011) 2655–2660.
- [12] B. Cong, S. Zheng and S. Sharma, On simulations of linear arrays, rings and 2d meshes on fibonacci cube networks, In *Processings of the 7th International Parallel Processing Symposium*, (1993) 747–751.
- [13] M. R. Darafsheh, Computation of topological indices of some graphs, *Acta Appl. Math.*, **110** (2010) 1225–1235.
- [14] E. Dedó, D. Torri and N. Zagaglia Salvi, The observability of the Fibonacci and the Lucas cubes, *Discrete Math.*, **255** (2002) 55–63.
- [15] P. Gregor, Recursive fault-tolerance of Fibonacci cube in hypercubes, *Discrete Math.*, **306** (2006) 1327–1341.
- [16] H. Hosoya, Fibonacci triangle, *Fibonacci Quart.*, **14** (1976) 173–179.
- [17] W.-J. Hsu, Fibonacci cubes- a new interconnection technology, *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, **4** (1993) 3–12.
- [18] W.-J. Hsu, C. V. Page and J.-S. Liu, Fibonacci cubes-a class of self-similar graphs, *Fibonacci Quart.*, **31** (1993) 65–72.
- [19] W. Imrich and S. Klavžar, *Product graphs: structure and recognition*, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [20] S. Klavžar, Structure of Fibonacci cubes: a survey, *J. Comb. Optim.*, **25** (2013) 505–522.
- [21] S. Klavžar, On median nature and enumerative properties of Fibonacci-like cubes, *Discrete Math.*, **299** (2005) 145–153.
- [22] S. Klavžar and M. Mollard, Cube polynomial of Fibonacci and Lucas cubes, *Acta Appl. Math.*, **117** (2012) 93–105.
- [23] S. Klavžar and I. Peterin, Edge-counting vectors, Fibonacci cubes and Fibonacci triangle, *Publ. Math. Debrecen.*, **71** (2007) 267–278.
- [24] M. Kovše, Complexity of phylogenetic networks: counting cubes in median graphs and related problems. In *Analysis of Complex Networks: From Biology to Linguistics*, WILEY-VCH, Weinheim, (2009) 323–350.
- [25] M. Mollard, Maximal hypercubes in Fibonacci and Lucas cubes, *Discrete Appl. Math.*, **160** (2012) 2479–2483.
- [26] E. Munarini, C. Perelli Cippo and N. Zagaglia Salvi, On the Lucas cubes, *Fibonacci Quart.*, **39** (2001) 12–21.
- [27] E. Munarini and N. Zagaglia Salvi, Structural and enumerative properties of the Fibonacci cubes, *Discrete Math.*, **255** (2002) 317–324.
- [28] W. E. Patten and S. W. Golomb, Elementary Problems and Solutions: Solutions: E1470, *Amer. Math. Monthly.*, **69** (1962) 61–62.
- [29] N. J. A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at <http://oeis.org>, 2015.
- [30] R. P. Stanley, Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry, *Graph theory and its applications: East and West* (Jinan, 1986), 500–535, *Ann. New York Acad. Sci.*, **576**, New York Acad. Sci., New York, 1989.
- [31] V. G. Vizing, The Cartesian product of graphs, *Vychisl. Sistemy.*, **9** (1963) 30–43.
- [32] N. Zagaglia Salvi, The automorphism group of the Lucas semilattice, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, **34** (2002) 11–15.
- [33] H. Zhang, L. Ou and H. Yao, Fibonacci-like cubes as Z -transformation graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009) 1284–1293.

علی رضا اشرفی

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

ashrafi@kashanu.ac.ir

علی رضا اشرفی متولد اردیبهشت سال ۱۳۴۳ در شهر تهران است. وی دکتری خود را در سال ۱۳۷۴ تحت راهنمایی محمد رضا درفشه از دانشگاه تهران اخذ نمود. اشرفی در سال ۱۳۷۵ به عنوان استادیار در گروه ریاضی دانشگاه کاشان استخدام شد و اکنون استاد دانشکده علوم ریاضی این دانشگاه می‌باشد.



خدیجه فتحعلیخانی

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

fathalikhani.kh@ut.ac.ir

خدیجه فتحعلیخانی متولد دی ماه سال ۱۳۶۳ در شهر تهران است. وی در سال ۱۳۸۶ با کسب رتبه دوم در رشته ریاضی از دانشگاه گیلان فارغ‌التحصیل شد. او سپس مقطع کارشناسی ارشد خود را در دانشگاه تهران در سال ۱۳۸۷ آغاز نمود و تحصیلات خود در آن دانشگاه را نیز با احراز رتبه دوم در سال ۱۳۸۹ به پایان رسانید. فتحعلیخانی مقطع دکتری خود را در دانشگاه کاشان با راهنمایی علی رضا اشرفی و با گذراندن دوران فرصت مطالعاتی در کشورهای اسپانیا و اسلوانی سپری کرد. او هم‌اکنون محقق دوره پسادکتری در دانشگاه کاشان است.

