ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۲، شماره ۲ (۱۳۹۶)، صص. ۳۵-۴۱

http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

دنباله‌های شبه‌ـ کشی

دیوید برتون و جان کالمن **
ترجمه : رسول کاظمی * و محمدحسین خشتی

چکیده. دانشجویان مبتدی، اغلب تعریف دنبالۀ کشی را زمانی که اولین بار در یک درس آنالیز حقیقی مقدماتی با آن مواجه می‌شوند، درست متوجه نمی‌شوند. به ویژه بسیاری از دانشجویان قادر به درک این نکته نیستند که تعریف دنبالۀ کشی شامل چیزی فراتر از این است که بگوئیم فاصلۀ جملات متوالی به صفر می‌رود. با این حال، دنباله‌هایی که در این ویژگی ضعیف‌تر صدق می‌کنند، در نوع خودشان جالب هستند. ما آن‌ها را دنباله‌های شبه‌ـ کشی می‌نامیم.

۱. روی خط حقیقی

در این بخش دنباله‌های شبه‌ـ کشی در دستگاه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، را بررسی می‌کنیم. بدین منظور:

تعریف ۱.۱. *فرض کنید* $\{x_n\}$ $(n = ۱, ۲, \dots, n)$ *یک دنباله از اعداد حقیقی باشد.*
۱) *دنبالۀ* $\{x_n\}$ *کشی است اگر برای هر* $\varepsilon > ۰$ *عدد صحیح* $K > ۰$ *موجود باشد به طوری که برای هر* $m, n \geqslant K$، *نتیجه شود که* $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
۲) *دنبالۀ* $\{x_n\}$ *شبه‌ـ کشی است اگر برای هر* $\varepsilon > ۰$ *عدد صحیح* $K > ۰$ *موجود باشد به طوری که برای هر* $n \geqslant K$، *نتیجه شود که* $|x_{n+۱} - x_n| < \varepsilon$.

بدیهی است که دنباله‌های کشی، شبه‌ـ کشی هستند. به سادگی دیده می‌شود که عکس آن درست نیست. مهمترین مثال نقضی (هر چند نه ساده‌ترین) که می‌توان نقل کرد، توسط دنبالۀ مجموع‌های جزئی سری هارمونیک ساخته می‌شود.
دنباله‌های کشی دارای این خاصیت هستند که هر زیر دنباله از یک دنبالۀ کشی، کشی است. خاصیت مشابه برای دنباله‌های شبه‌ـ کشی درست نیست. در حقیقت، آن دنباله‌هایی که دارای این خاصیت‌اند که همۀ زیردنباله‌هایشان شبه‌ـ کشی‌اند، دقیقا همان دنباله‌های کشی هستند. زیر دنباله‌های یک دنبالۀ شبه‌ـ کشی، همانطور که لم زیر نشان می‌دهد، می‌توانند تا حدی دلخواه باشند.

---

* نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۹/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۴/۰۶
**David Burton and John Coleman، Quasi-Cauchy Sequence، Amer. Math. Monthly Vol. ۱۱۷، No. ۴ (April ۲۰۱۰)، pp. ۳۲۸-۳۳۳. doi: ۱۰,۴۱۶۹/۰۰۰۲۹۸۹۱۰x۴۸۰۷۹۳.

لم ۲.۱. *فرض کنید I یک بازه و $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ دنباله‌ای از زوج‌های مرتب در I با $\lim_{i\to\infty} |a_i - b_i| = 0$ باشند. در این صورت یک دنبالهٔ شبه‌ـ‌کشی $\{x_i\}$ وجود دارد با این خاصیت که برای هر عدد صحیح $i \geqslant 1$، یک $j \geqslant 1$ موجود است به طوری که $(a_i, b_i) = (x_j, x_{j+1})$.*

اثبات. برای هر $k \geqslant 1$ نقاط $y^k_0, y^k_1, \ldots, y^k_{n_k}$ را در I با $y^k_0 = b_k$ و $y^k_{n_k} = a_{k+1}$ طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n_k$، $|y^k_i - y^k_{i-1}| < \frac{1}{k}$. در این صورت به وضوح دنبالهٔ

$$a_1 \ , \ b_1 \ , \ y^1_0 \ , \ \ldots \ , \ y^1_{n_1} \ , \ a_2 \ , \ b_2 \ , \ y^2_0 \ , \ y^2_1 \ , \ \ldots y^2_{n_2} \ , \ a_3 \ , \ b_3 \ , \ \ldots$$

خاصیت مطلوب را دارد. $\square$

ارتباط جالبی بین توابع پیوستهٔ یکنواخت و دنباله‌های شبه‌ـ‌کشی وجود دارد. به سادگی می‌توان دید که اگر I یک بازهٔ بسته باشد آنگاه تابع f بر I پیوسته است اگر و فقط اگر f بر I تعریف شده باشد و دنباله‌های کشی I را حفظ کند (یعنی اگر $\{x_n\}$ کشی و $\{x_n\} \subset I$ ایجاب کند که $\{f(x_n)\}$ نیز کشی است). به طور مشابه:

قضیه ۳.۱. *فرض کنید I یک بازهٔ دلخواه باشد. در این صورت یک تابع حقیقی مقدار بر I پیوستهٔ یکنواخت است اگر و فقط اگر بر I تعریف شده باشد و دنباله‌های شبه‌ـ‌کشی I را حفظ کند.*

اثبات. بررسی اینکه توابع پیوستهٔ یکنواخت دنباله‌های شبه‌ـ‌کشی را حفظ می‌کنند کار ساده‌ای است. برعکس، فرض کنید تابع f، تعریف شده بر I پیوستهٔ یکنواخت نباشد. پس $\varepsilon > 0$ موجود است به طوری که برای هر $\delta > 0$، نقاط $a, b \in I$ موجودند که $|a - b| < \delta$ اما $|f(a) - f(b)| \geqslant \varepsilon$. برای هر عدد صحیح $n \geqslant 1$، اعداد $a_n, b_n \in I$ را طوری انتخاب کنید که $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ اما $|f(a) - f(b)| \geqslant \varepsilon$. با استفاده از لم ۲.۱ یک دنبالهٔ شبه‌ـ‌کشی $\{x_i\}$ موجود است به طوری که برای هر $i \geqslant 1$، یک j موجود است که $a_i = x_j$ و $b_i = x_{j+1}$. این نتیجه می‌دهد که $|f(x_j) - f(x_{j+1})| \geqslant \varepsilon$، بنابراین $\{f(x_i)\}$ شبه‌ـ‌کشی نیست. پس f دنباله‌های شبه‌ـ‌کشی را حفظ نمی‌کند. $\square$

قضیهٔ قبل در حالت خاصی که I کراندار باشد می‌تواند قوی‌تر شود.

قضیه ۴.۱. *فرض کنید f یک تابع تعریف شده بر بازهٔ کراندار I باشد. در این صورت f بر I پیوستهٔ یکنواخت است اگر و فقط اگر تصویر هر دنبالهٔ کشی در I تحت f ، شبه‌ـ‌کشی باشد.*

اثبات. بنابر قضیهٔ ۳.۱، اگر f بر I پیوستهٔ یکنواخت باشد آنگاه تصویر هر دنبالهٔ شبه‌ـ‌کشی از I، شبه‌ـ‌کشی است و از این رو به ویژه تصویر هر دنبالهٔ کشی، شبه‌ـ‌کشی است. برای عکس آن فرض کنید تصویر هر دنبالهٔ کشی، شبه‌ـ‌کشی باشد اما f پیوستهٔ یکنواخت نباشد. پس $\varepsilon > 0$ موجود است به طوری که برای هر $\delta > 0$، نقاط $x, y \in I$ موجودند که $|x - y| < \delta$ اما $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. برای هر $n \geqslant 1$، نقاط $x_n, y_n \in I$ را طوری انتخاب کنید که $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ اما $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$. چون I کراندار است با توجه به قضیهٔ بولزانو[1] ـ وایراشتراس[2] ، $\{x_n\}$ دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا است. بنابراین در صورت لزوم با گذر به یک زیر دنباله، بدون کاستن از کلیت قضیه می‌توانیم فرض کنیم که $\{x_n\}$ همگرا است. پس $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$ نیز همگرا است و بنابراین کشی است، اما دنبالهٔ تصویر، $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), f(x_3), f(y_3), \ldots$ شبه‌ـ‌کشی نیست که تناقض است. $\square$

[1] Bolzano [2] Weierstrass

۲. در فضاهای متریک

تعریف ۱.۲. *فرض کنید X یک مجموعه و $d : X^{2} \longrightarrow [0, \infty]$ یک تابع باشد.*

۱) *d یک شبه متر نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y, z \in X$، در شرایط $d(x, x) = 0$، $d(x, y) = d(y, x)$ و $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ صدق کند.*

۲) *d یک متر نامیده می‌شود اگر همچنین برای هر $x, y \in X$ در شرایط $d(x, y) < \infty$ و $d(x, y) = 0 \Leftarrow x = y$ صدق کند.*

مفهوم شبه‌ـ کشی در هر فضای متریک (X, d) (پس از جایگذاری کاملاً تاپیی $d(x, y)$ بجای $|x - y|$) کاملاً با معنی است. تفاوت اصلی این است که برای بعضی فضاهای متریک مهم، فرق میان دنباله‌های شبه‌ـ کشی و کشی از بین می‌رود. اجازه دهید یک اصطلاح برای این مورد تعریف کنیم.

تعریف ۲.۲. *یک فضای متریک (X, d) غیر افزایشی* [۳] *نامیده می‌شود هرگاه هر دنبالهٔ شبه‌ـ کشی در X کشی باشد. در این حالت d نیز یک متر غیر افزایشی نامیده می‌شود.*

مشهود است که در یک فضای غیر افزایشی نمی‌توانیم فاصلهٔ زیادی را از طریق نموهای کوچک دلخواه بین جملات متولی در یک دنبالهٔ شبه‌ـ کشی، بپیمائیم. فضاهای غیر افزایشی موجودند: به عنوان مثال مجموعهٔ اعداد صحیح را با متر اقلیدسی در نظر بگیرید. آیا مثال‌های جالب دیگری وجود دارد؟ بله. در [۲] نشان داده شده است که فضاهای غیر افزایشی بطور طبیعی در کلاس‌های خاصی از جبرهای توپولوژیک به وجود می‌آیند. به علاوه آن‌ها در نظریهٔ فضاهای فرامتریک [۴] نیز به وجود می‌آیند.

تعریف ۳.۲. *یک فضای فرامتریک، یک فضای متریک است که در تعمیم زیر از نامساوی مثلث (موسوم به نامساوی فرامتریک) صدق کند:*

$$\forall x, y, z \in X, \qquad d(x, y) \leqslant \sup\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

فضاهای فرامتریک، همچنین فضاهای ناارشمیدسی یا فضاهای متساوی‌الساقین نامیده می‌شوند. نام گذاری آخر بدین خاطر است که آن‌ها دارای این خاصیت جالبند که در آن‌ها تمام مثلث‌ها، متساوی‌الساقین هستند. آن‌ها به طور طبیعی در مطالعهٔ اعداد pـای [۵] و دیگر گرایش‌های آنالیز به وجود می‌آیند [۱]. این فضاها اخیراً کاربردهایی در علوم کامپیوتر نظری [۵] و دیگر رشته‌ها پیدا کرده‌اند. قضیهٔ زیر یک نتیجهٔ کلاسیک است:

قضیه ۴.۲. *فضاهای فرامتریک، غیرافزایشی هستند.*

اثبات. فرض کنید (X, d) یک فضای فرامتریک باشد. همچنین فرض کنید که $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ شبه‌ـ کشی در X و $0 < \varepsilon$ داده شده باشد. $0 < K$ را چنان انتخاب کنید که اگر $K \leqslant n$ آنگاه $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$. فرض کنید که $m, n \geqslant K$ و $m \leqslant n$. در اینصورت با استفادهٔ مکرر از نامساوی فرامتریک نتیجه می‌شود که

$$d(x_m, x_n) \leqslant \sup\{d(x_m, x_{m+1}), d(x_{m+1}, x_{m+2}), \ldots, d(x_{n-1}, x_n)\} < \sup\{\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon\} = \varepsilon.$$

بنابراین $\{x_n\}$ کشی نیز هست. □

---
[3] nonincremental [4] ultrametric [5] p-adic

ایدهٔ پشت اثبات این است که برای فضاهای فرامتریک، رابطهٔ درون εـ همسایگی یکدیگر بودن بین نقاط، یک رابطهٔ ترایایی است. بنابراین برای هر $\varepsilon > \circ$، گردایهٔ εـ گوی‌ها تشکیل یک افراز از فضا می‌دهند.

یک سؤال طبیعی این است که آیا عکس قضیهٔ اخیر درست است؟ پاسخ منفی است. برای یک مثال ساده، فرض کنیم X یک مجموعهٔ سه عضوی شامل رئوس هر مثلث غیر متساوی‌الساقین باشد. فرض کنید d فاصلهٔ بین رئوس باشد. در این صورت (X, d) یک فضای فرامتریک نیست اما غیرافزایشی است، زیرا هر دنبالهٔ شبه‌ـکشی، یک دنبالهٔ در نهایت ثابت است و بنابراین کشی است. یک برعکس جزئی از قضیهٔ قبل شامل مفهوم هم ارز بودن دو متر وجود دارد:

تعریف ۲.۵. *فرض کنید $(X_۱, d_۱)$ و $(X_۲, d_۲)$ فضاهای شبه متریک باشند. گوئیم آن‌ها*

۱) *هم ارز توپولوژیک‌اند اگر یک همیومورفیسم $h : X_۱ \to X_۲$ موجود باشد.*

۲) *هم ارز یکنواخت‌اند اگر یک دوسوئی $h : X_۱ \to X_۲$ موجود باشد به طوری که هم h و هم $h^{-۱}$ نسبت به شبه‌مترهای داده شده پیوستهٔ یکنواخت باشند. یک چنین hای هم ارزی یکنواخت نامیده می‌شود.*

در حالت خاص که $X = X_۱ = X_۲$ (بنابراین $d_۱$ و $d_۲$ دو شبه‌متر روی یک فضای یکسان‌اند) به سادگی خواهیم گفت که $d_۱$ و $d_۲$ به طور توپولوژیک یا یکنواخت هم‌ارزند هرگاه نگاشت همانی به ترتیب یک همیومورفیسم یا هم‌ارزی یکنواخت باشد. توجه کنید که همهٔ فضاهای متریک ۳ عضوی (به انضمام متساوی الاضلاع) با هم هم‌ارز یکنواخت هستند. بنابراین خاصیت فضای فرامتریک بودن تحت هم‌ارزی یکنواخت حفظ نمی‌شود. از سوی دیگر به سادگی می‌توان دید که خاصیت غیرافزایشی بودن تحت هم‌ارزی یکنواخت حفظ می‌شود.

یک برعکس جزئی برای قضیهٔ قبل وجود دارد:

قضیه ۲.۶. *فرض کنید (X, d) یک فضای غیر افزایشی است. در این صورت (X, d) هم ارز توپولوژیک با یک فضای فرامتریک است.*

اثبات. اگر $x, y \in X$، گوئیم x و y، εـ متصل‌اند اگر نقاط $x_\circ, x_۱, \dots, x_n$ موجود باشند که $x_\circ = x$، $x_n = y$ و برای $i < n$، $d(x_i, x_{i+۱}) < \varepsilon$. چنین دنباله‌ای از نقاط یک εـ زنجیر اتصال دهندهٔ x و y نامیده می‌شود. برای $x, y \in X$ قرار دهید

$$d^*(x, y) = \inf\{\varepsilon | \text{همبند هستند} - \varepsilon \text{ ،} x, y\}.$$

توجه کنید که $d^*(x, y) < \varepsilon$ ایجاب می‌کند که x و y، εـ متصل (نسبت به d) هستند. به سادگی می‌توان بررسی کرد که برای هر $x, y, z \in X$، $d^*(x, y) \geqslant \circ$، $d^*(x, y) = d^*(y, x)$ و $d^*(x, y) \leqslant \sup\{d^*(x, z), d^*(z, y)\}$. نامساوی آخر از این مشاهده نتیجه می‌شود که εـ متصل بودن، ترایایی است. بنابراین d^* یک فرا شبه متر است (یک شبه متر که در نامساوی فرامتریک صدق می‌کند). ادعا می‌کنیم که d و d^* هم ارزند. توجه کنید که اثبات این ادعا، خود به خود نتیجه می‌دهد که d^* در حقیقت یک متر است زیرا هر شبه‌متر هم ارز با یک متر، خودش یک متر است.

فرض کنیم $B_d(x, \varepsilon) = \{y | d(x, y) < \varepsilon\}$، εـ گوی به مرکز x نسبت به متر d باشد. $B_{d^*}(x, \varepsilon)$ را به نحو مشابه تعریف کنید. توجه کنید که برای هر x, y، $d^*(x, y) \leqslant d(x, y)$. این نتیجه می‌دهد که برای هر $x \in X$ و $\varepsilon > \circ$،

$$B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_{d^*}(x, \varepsilon).$$

بنابراین توپولوژی d ظریفتر از توپولوژی d^* است. از سوی دیگر، فرض کنید $x \in X$ و $\varepsilon > \circ$. باید نشان دهیم یک $\delta > \circ$ موجود است که $B_{d^*}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$. فرض کنید چنین δـای موجود نباشد. پس برای هر عدد صحیح

$n \geqslant ۱$ می‌توانیم نقطهٔ $a_n \in B_{d^*}(x, \frac{۱}{n})$ را چنان بیابیم که $a_n \notin B_d(x, \varepsilon)$. چون $d^*(x, a_n) < \frac{۱}{n}$ می‌توانیم یک $\frac{۱}{n}$ـ زنجیر $x_۰, x_۱, \ldots, x_k$ متصل کنندهٔ x به a_n مشخص کنیم. بنابراین $x_۰ = x$، $x_k = a_n$ و برای هر $i < k$، $d(x_i, x_{i+۱}) < \frac{۱}{n}$. دنبالهٔ

$$x_۰, x_۱, \ldots, x_{k-۱}, x_k, x_{k-۱}, \ldots, x_۱, x_۰$$

را یک $\frac{۱}{n}$ـ دور بنامید که از x به یک نقطه خارج از $B_d(x, \varepsilon)$ می‌رسد و سپس دوباره با گام‌هایی با طول کمتر از $\frac{۱}{n}$ برمی‌گردد. حال دنبالهٔ $\{y_i\}$ را با شروع با ۱ـ مدار و به دنبال آن $\frac{۱}{۲}$ـ مدار و سپس $\frac{۱}{۳}$ـ مدار و غیره تعریف کنید. چون آغاز و پایان مدارها در x است، پس اگر y_i و $y_{i+۱}$ میان مرز بین مدارهای متوالی قرار گیرند آنگاه $d(y_i, y_{i+۱}) = ۰$. از سوی دیگر اگر y_i و $y_{i+۱}$ هر دو درون یک مدار باشند (درون یک $\frac{۱}{n}$ـ مدار) آنگاه $d(y_i, y_{i+۱}) < \frac{۱}{n}$. توجه کنید که وقتی $i \to \infty$ آنگاه $n \to \infty$. بنابراین $\{y_i\}$ یک دنبالهٔ شبه‌ـ کشی در (X, d) است. این دنباله، کشی نیست زیرا برای هر $K > ۰$، می‌توانید $i, j \geqslant K$ بیابید که $d(y_i, y_j) \geqslant \varepsilon$. بدین منظور $i \geqslant K$ را چنان انتخاب کنید که $y_i = x$ شروع یک مدار باشد و $j > i$ را چنان انتخاب کنید که y_j نقطهٔ میانی آن مدار باشد. این متناقض با این حقیقت است که (X, d) غیرافزایشی است، بنابراین در نهایت δ مورد نیاز باید موجود باشد. $\square$

در این مرحله می‌دانیم که اگر (X, d) یک فضای متریک باشد آنگاه هم ارز یکنواخت بودن d با یک فرامتر، نتیجه می‌دهد که d غیر افزایشی است که به نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد که d هم ارز با یک فرامتر است. طبیعی است که بپرسیم عکس کدام یک از این نتایج درست است؟ دو مثال ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد عکس هیچکدام برقرار نیست.

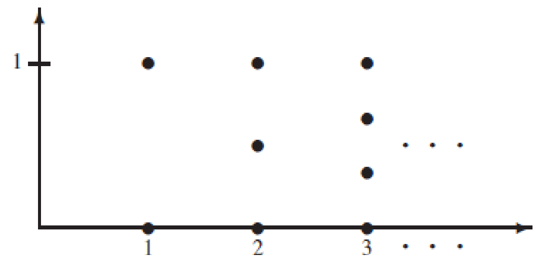
برای اولین مثال توجه کنید که هر فضای متریک گسسته هم ارز با یک فضای فرامتریک است: اگر (X, d) گسسته باشد (برای هر نقطه‌ی x یک $\varepsilon > ۰$ موجود است که $B_d(x, \varepsilon) = \{x\}$) آنگاه d^* داده شده توسط $x \neq y$ نتیجه می‌دهد $d^*(x, y) = ۱$ یک فرامتر هم ارز روی X است. اگر X را مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های جزئی سری همساز با متر القا شده از متر اقلیدسی روی X بگیریم آنگاه به وضوح X گسسته است اما غیر افزایشی نیست. بنابرین هم ارز بودن با یک فرامتر، غیر افزایشی بودن را نتیجه نمی‌دهد.

مثال دوم، پیچیده‌تر است. فرض کنید که (X, d) با یک فضای فرامتریک هم ارز یکنواخت باشد. پس یک فرامتر d^* روی X موجود است به طوری که d و d^* هم ارز یکنواخت اند. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. پس $\gamma > ۰$ وجود دارد به طوری که $d^*(x, y) < \gamma$ ایجاب می‌کند $d(x, y) < \varepsilon$. به طور مشابه می‌توانیم $\delta > ۰$ را به گونه‌ای بیابیم که $d(x, y) < \delta$ ایجاب کند $d^*(x, y) < \gamma$ (و بنابراین $d(x, y) < \varepsilon$). فرض کنید که x و y در (X, d)، δـ متصل باشند. نقاط $x_۰, x_۱, \ldots, x_n$ را در X به گونه‌ای انتخاب کنید که $x_۰ = x$، $x_n = y$ و برای هر $i < n$، $d(x_i, x_{i+۱}) < \delta$. این نتیجه می‌دهد که $d^*(x_i, x_{i+۱}) < \gamma$، بنابراین x و y در (X, d^*)، γـ متصل هستند. اما d^* یک فرامتریک است، پس با استفادهٔ مکرر از نامساوی فرامتریک نتیجه می‌شود $d^*(x, y) < \gamma$، بنابراین $d(x, y) < \varepsilon$. بنابراین می‌توانیم استنباط کنیم که اگر d هم ارز یکنواخت با یک فرامتر باشد آنگاه

$$\forall \varepsilon > ۰ \exists \delta > ۰ \quad (\text{و } x \text{ و } y \text{، } \delta\text{ـ همبنداند} \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon). \qquad (\star)$$

حال قرار دهید:

$$X = \{(n, \frac{m}{n}) | m, n \in \mathbb{Z}, n \geqslant ۱, ۰ \leqslant m \leqslant n\},$$



شکل ۱: فضای X

(شکل ۱ را مشاهده کنید) و X را به عنوان زیر مجموعهٔ صفحهٔ دکارتی در نظر بگیرید و فرض کنید d القاء شده توسط متر اقلیدسی باشد. X شامل تعداد نامتناهی ستون است که فاصلهٔ هر ستون از ستون مجاورش برابر با ۱ است. بنابراین هر دنبالهٔ شبه‌ـ کشی در نهایت به یک ستون واحد محدود می‌شود. اما هر ستون شامل تنها تعداد متناهی نقطه است. بنابراین هر دنبالهٔ شبه‌ـ کشی در نهایت ثابت است. بنابراین هر دنبالهٔ شبه‌ـ کشی، کشی است. پس (X, d) غیر افزایشی است. از سوی دیگر (X, d) در رابطهٔ $(\star)$ با $\varepsilon = \frac{1}{2}$ صدق نمی‌کند زیرا برای هر $\delta > 0$ می‌توانید n را چنان انتخاب کنید که $\frac{1}{n} < \delta$. در اینصورت نقاط $p_1 = (n, 0)$ و $p_2 = (n, 1)$ به وضوح δـ متصل‌اند اما $d(p_1, p_2) = 1 > \varepsilon$. بنابراین (X, d) هم ارز یکنواخت با یک فضای فرامتریک نیست.

برای نشان دادن ارتباط این نتایج، مقالاتی دربارهٔ مشخصهٔ فضاهای فرامتریک تا هم‌ارزی توپولوژیک [۳] و تا هم ارزی یکنواخت [۴] ارائه شده‌اند. فضاهای غیرافزایشی، به طور اکید بین آن‌ها هستند. اینکه آیا این یک مفهوم سودمند است یا یک کنجکاوی صرف، در آینده معلوم خواهد شد.

۳. تمرینات

تعدادی تمرین جالب شامل دنباله‌های شبه‌ـ کشی وجود دارند که می‌تواند به دانشجویان درس آنالیز یا توپولوژی دورهٔ کارشناسی داده شود:

۱) فرض کنید f بر بازهٔ I پیوستهٔ یکنواخت باشد. ثابت کنید که تصویر هر دنبالهٔ شبه‌ـ کشی در I تحت f شبه‌ـ کشی است.

۲) فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌های شبه‌ـ کشی از اعداد حقیقی باشند. این ادعا را که دنبالهٔ حاصلضرب $\{x_n y_n\}$ نیز شبه‌ـ کشی است، ثابت کنید یا یک مثال نقض برای آن ارائه دهید.

۳) ثابت کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی، کشی است اگر و فقط اگر هر زیر دنباله‌اش شبه‌ـ کشی باشد.

۴) ثابت کنید که یک دنبالهٔ شبه‌ـ کشی از اعداد حقیقی، کشی است اگر و فقط اگر دارای دقیقاً یک نقطهٔ انباشتگی باشد.

۵) ثابت کنید مجموعهٔ نقاط انباشتگی یک دنبالهٔ شبه‌ـ کشی در $\mathbb{R}$، بسته و همبند است.

۶) ثابت کنید هر مجموعهٔ بسته و همبند در $\mathbb{R}$، مجموعهٔ نقاط انباشتگی یک دنبالهٔ شبه‌ـ کشی است.

۷) مجموعهٔ A در یک فضای متریک (X, d) را شبه‌ـ همبند می‌نامیم هرگاه دارای این خاصیت باشد که برای هر $\varepsilon > 0$، هر دو نقطه از A در (A, d') εـ متصل باشند (که در آن d' تحدید d به A است). نشان دهید یک مجموعهٔ A، مجموعهٔ نقاط انباشتگی یک دنبالهٔ شبه‌ـ کشی در X است اگر و فقط اگر A بسته و شبه‌ـ همبند باشد. با یک مثال نشان دهید که A لزوماً همبند نیست.

مراجع

[1] S. Bosch, U. Guntzer and R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, **261**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] J. P. Coleman, Nonexpansive algebras, *Algebra Universalis*, **55** (2006) 479–494.

[3] J. de Groot, Non-Archimedean metrics in topology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956) 948–956.

[4] A. J. Lemin, Proximity on isosceles spaces, *Russian Math. Surveys*, **39** (1984) 143–144.

[5] S. Priess-Crampe and P. Ribenboim, Ultrametric spaces and logic programming, *J. Logic Programming*, **42** (2000) 59–70.

رسول کاظمی

اصفهان، کاشان، دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

r.kazemi@kashanu.ac.ir

رسول کاظمی متولد بهمن ۱۳۶۱ در شهر نجف آباد است. وی در سال ۱۳۸۵ مقطع کارشناسی رشتهٔ ریاضی محض را در دانشگاه صنعتی اصفهان به پایان رسانید و در سال ۱۳۸۷ نیز مقطع کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض را در دانشگاه صنعتی شریف به اتمام رسانید و سپس در سال ۱۳۹۱ موفق به اخذ دکتری تخصصی ریاضی کاربردی (گرایش دستگاه‌های دینامیکی) از دانشگاه صنعتی اصفهان شد. وی در حال حاضر استادیار دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه کاشان است.

محمد حسین خشتی

تهران، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی

m.kheshti@mail.sbu.ac.ir

محمد حسین خشتی متولد تیر ۱۳۷۲ در شهر کاشان است. وی در سال ۱۳۹۴ مقطع کارشناسی رشتهٔ ریاضیات و کاربردها را در دانشگاه کاشان به پایان رسانید و هم‌اکنون در مقطع کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی کاربردی در دانشگاه شهید بهشتی در حال تحصیل است.