

روش ارشمیدس: قضایای ۱۳ و ۱۴**

شرلی. بی. گری^۱، دانیل. ی. دینگ^۲، گوستاوا گردیلو^۳، سموئل لند زیرگ^۴ و سی والدمن^۵
مترجمین: علی اکبر محمدی حسن آبادی* و فیروزه محمدی حسن آبادی

چکیده. سُم استوانه‌ای همواره موضوعی بسیار جذاب بوده است و این از زمانی آغاز شد که ارشمیدس، تنها از طریق مفاهیم هندسی ثابت کرد که حجم سُم استوانه‌ای $1/6$ حجم مکعب محاطی آن است. در این مقاله با استفاده از مثلثات و حسابان دیفرانسیل و انتگرال، چگونگی محاسبه حجم سُم استوانه‌ای ارائه شده است.

در دهه گذشته هیچ زمینه‌ای از ریاضیات بیش از یادداشتهای ارشمیدس مورد توجه جهانی نبوده است. حراج کریستیز^۱ در سال ۱۹۹۸، که کار گروهی به مرکزیت موزه هنرهای والترز^۲ را به دنبال داشت، منجر به نمایشگاه‌های موزه‌ای خیابانی، مقاله‌های روزنامه‌ای، ویژه‌های تلویزیونی و بسیاری از ارائه‌های دیگر شد. ریاضیدانان و دیگر نخبگان، مخاطبان جدیدی را جذب کردند. نوشته‌های امضا شده کهنه و بیرنگ قرن دهم – قدیمی‌ترین نسخه جهانی روش ارشمیدس – به قیمت دو میلیون دلار “در این حراجی” فروخته شد. ریاضیدانان و نخبه‌های کلاسیک مدت مدیدی در شگفت بودند که ارشمیدس (۲۱۲-۲۸۷ قبل از میلاد)، یک نابغه مکانیک چقدر به فرموله کردن حسابان دیفرانسیل و انتگرال نزدیک شده بود. اگر اصلاً قضایای ۱۳ و ۱۴ قابل خواندن باشند، مطمئناً این ایده‌ها در آنها نهفته است. اگرچه محتوای این دو

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۸/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۳/۱۲

** نوشته حاضر ترجمه مقاله زیر است:

S. B. Gray, D. Y. Ding, G. Gordillo, S. Landsberger and C. Waldman, The Method of Archimedes: Propositions 13 and 14, Notices of the American Mathematical Society, 62 no. 9 (2015) 1036–1040.

¹ Shirley B. Gray

شرلی. بی. گری استاد ریاضی در دانشگاه ایالتی کالیفرنیا، لوس آنجلس می‌باشد. آدرس پست الکترونیک او saray@exchange.calstatela.edu است.

² Daniel Ye Ding

دانیل. ی. دینگ یک دانشجوی کارشناسی در دانشگاه ایالتی کالیفرنیا، لوس آنجلس می‌باشد. آدرس پست الکترونیک او ddaniel497@gmail.com است.

³ Gustava Gordillo

گوستاوا گردیلو دانشجوی ارشد در دانشگاه ایالتی کالیفرنیا، لوس آنجلس است. آدرس پست الکترونیک او miztag@hotmail.com می‌باشد.

⁴ Samuel Landsberger

سموئل لندز برگر استاد دانشگاه ایالتی کالیفرنیا، لوس آنجلس است. آدرس پست الکترونیک او slandsb@calstatela.edu می‌باشد.

⁵ Cyé Waldman

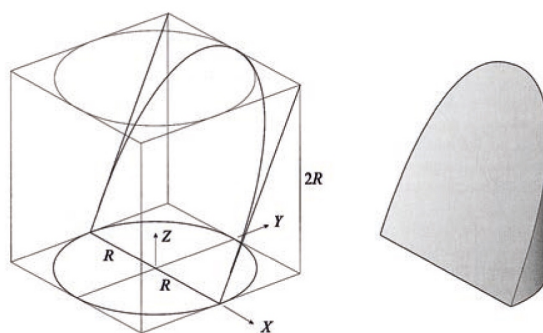
سی‌والدمن مشاور تجاری و نماینده بانک ملی کرو است. آدرس پست الکترونیک cye@att.net می‌باشد.

¹ Christie's ² Walters

قضیه بازنویسی شده‌اند، و امکان اشتباهات نوشتاری در آنها وجود دارد. بر اساس واقعیات موجود هنگام بررسی کارهای ارشمیدس بر آن شدیم تا بدون توجه به نظریات او، قضایا را به کمک ریاضیات و روشهای قرن بیست و یکم مورد بررسی قرار دهیم. به علاوه، بر آن باوریم که در تحقیقات هر نخبه‌ای وارد شده‌ایم تا اشتباهات گذشته را جبران کنیم. در این کوشش اثری از ارشمیدس در نسبت طلایی را پیدا کردیم.

حجم سُم استوانه‌ای

سُم استوانه‌ای همواره موضوعی بسیار جذاب بوده است و این از زمانی آغاز شد که ارشمیدس، تنها از طریق مفاهیم هندسی، ثابت کرد که حجم سُم استوانه‌ای $1/6$ حجم مکعب محاطی آن است. در بحث جاری با استفاده همزمان از مثلثات و حسابان دیفرانسیل و انتگرال، که هر دوی آنها برای ارشمیدس در قرن سوم قبل از میلاد ناشناخته بود، چگونگی محاسبه حجم سُم را ارائه می‌کنیم.



شکل ۱: ایجاد سُم.

بحث فنی

سُم از طریق «برش‌ها» روی یک مکعب ایجاد می‌شود. دنباله‌ای همانند آنچه در شکل ۱ (چپ) دیده می‌شود توسط نخبگان متعددی در طی قرن گذشته نمایش داده شده است [۱۱] - [۱]. با یک مکعب شروع می‌کنیم؛ اولین برش، یک استوانه را به وجود می‌آورد که قطرش برابر ضلع مکعب است؛ با برش دادن این استوانه توسط صفحه‌ای که قاعده استوانه را نصف کرده و از لبه بالایی آن می‌گذرد، سُم ایجاد می‌شود. سُم نهایی در شکل ۱ نشان داده شده است. چون از مثلثات و حسابان دیفرانسیل و انتگرال استفاده می‌کنیم، لازم است دستگاه مختصات و ابعاد را (همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است) به دقت تعریف کنیم. یک مکعب با ضلع $2R$ که مرکزش در صفحه $X - Y$ قرار دارد (X و Y هر کدام از $-R$ تا R تغییر می‌کنند) و دارای ارتفاع $2R$ است، یعنی Z از 0 تا $2R$ تغییر می‌کند. بنابراین استوانه محاطی دارای شعاع R می‌باشد. برای مشخص بودن، برش مایل را طوری انتخاب می‌کنیم که محور X را قطع کند. هر یک از ارتفاع و قاعده سُم برابر $2R$ هستند. بدین ترتیب، به وضوح حجم سُم عبارت است از:

$$(1) \quad V = \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2 - X^2}} \int_0^{2Y} dZ dY dX.$$

حالا، می‌دانیم حجم یک جسم یک خاصیت فیزیکی است. لذا تصور کنید که لازم باشد معادله (۱) را برای شعاع‌های متعددی حل کنیم؛ در این صورت می‌بایستی هر مورد را به طور جداگانه حل کنیم. بهتر است که مسئله را به یک مسئله صرفاً ریاضی (و صرفه نظر از بعد) به صورت زیر کاهش دهیم: فرض کنیم $x = X/R$ ، $y = Y/R$ و $z = Z/R$. در این صورت برابری (۱) تبدیل می‌شود به

$$(۲) \quad V = R^3 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2y} dz dy dx.$$

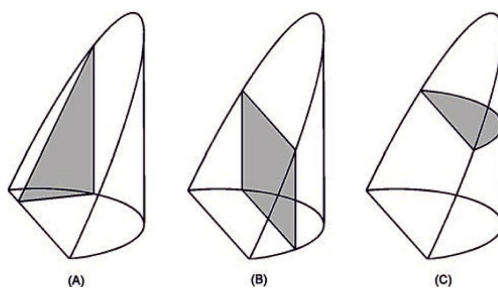
و مشاهده می‌شود که حجم دقیقاً متناسب با R^3 بوده و می‌توانیم مسئله را صرفاً عددی (و صرفه نظر از بعد) در نظر بگیریم که می‌تواند یکبار و برای تمامی R ها حل شود.

$$(۳) \quad V = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2y} dz dy dx.$$

این انتگرال را می‌توان به سادگی و بدون استفاده از متمتیکا^۳ و یا متلب^۴ به صورت زیر حل کرد:

$$(۴) \quad \begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_0^{2y} dz \right] dy \right] dx. \\ \int_0^{2y} dz &= 2y, \quad \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2y dy = y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = 1 - x^2 \\ V &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = x \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

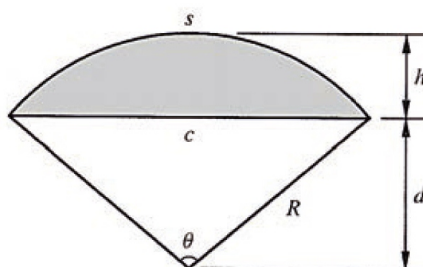
بالاخره، چون $8R^3 = \text{حجم مکعب می‌باشد}$ ، واضح است که $1/6 = \text{حجم مکعب/حجم سم}$ ، همان طور که بیش از ۲۰۰۰ سال قبل توسط ارشمیدس معین شده بود.



شکل ۲: مقاطع - عرضی یک سم در جهت‌های x ، y ، z [منسوب به لینچ (۲۰۱۲)].

لینچ^۵ [۲۹] نشان داده است که چطور می‌توان حجم سم را با استفاده از انتگرال‌های یگانه محاسبه نمود. همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، محاسبه را می‌توان با انتگرال‌گیری یک مثلث، یک مربع مستطیل، یا یک قطاع در جهت به ترتیب x ، y ، z انجام داد. البته هر سه مسیر انتگرال‌گیری دارای نتیجه یکسان است: $4R^3/3 = \text{حجم سم}$.

^۳ Mathematica ^۴ MATLAB ^۵ Lynch



شکل ۳: قطاع یک مقطع مدور (قسمت سایه زده شده).

در ذیل این محاسبات را بدون در نظر گرفتن بعد نمایش می‌دهیم. هدف، انتگرال‌گیری هر مساحت روی مختصات متناظر می‌باشد؛ با استفاده از این روند برای رها سازی مختصات از بعد، داریم

$$\begin{aligned} (5) \quad V &= \int_{-1}^1 A_{triangle}(x) dx. \\ &= \int_0^1 A_{rect}(y) dy = \int_0^2 A_{segment}(z) dz. \end{aligned}$$

دومساحت اول عبارت است از

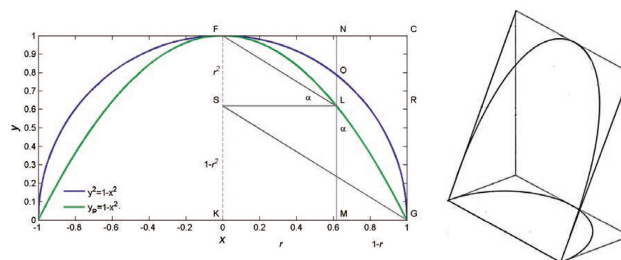
$$\begin{aligned} (6) \quad A_{triangle}(x) &= (1 - x^2). \\ A_{rect}(y) &= 2y\sqrt{1 - y^2}. \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که هر یک از این انتگرال‌ها برابر $V = \frac{4}{3}$ می‌باشد، که با برابری (۴) سازگار است. مساحت یک قطاع، همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است عبارت است از

$$(7) \quad A_{segment}(y) = \cos^{-1} y - y\sqrt{(1 - y^2)}.$$

ولی مایلیم از این تابع بر حسب z انتگرال بگیریم؛ با توجه به اینکه $z = 2y$ ، اگر قرار دهیم $\zeta = z/2$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} (8) \quad V &= 2 \int_0^1 A_{segment}(\zeta) d\zeta. \\ &= 2 \left[\zeta \cos^{-1} \zeta - \sqrt{1 - \zeta^2} + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - \zeta^2)^3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



شکل ۴: اثر سُم و سهمی ارشمیدس (چپ) و سُم و منشور (راست) .

در پایان، بیایید برای لحظه‌ای بر راه حل ارشمیدس تمرکز کنیم. او اساساً از روش مثلثی یاد شده استفاده می‌نمود، ولی ابزاری که ما اینک در دست داریم را نداشت. ارشمیدس مسئله جمع کردن مثلث‌ها در جهت x را در نظر گرفت تا حجم را به دست آورد، یعنی، آنچه ما به صورت زیر بیان کردیم

$$(9) \quad v = \int_{-1}^1 A_{triangle}(x) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx.$$

ارشمیدس در قضیه ۱۳ خود گفته است که انتگرالده در این برابری که از دایره، $y^2 = 1 - x^2$ مشتق شده است، همانطور که در خط سبز در شکل ۴ (بالا) دیده می‌شود، همان معادله سهمی در صفحه $x-y$ ، یعنی $y_p = 1 - x^2$ است. این در نماد گذاری کسر و نسبت مورد استفاده ارشمیدس عبارت است از، $MN : ML :: MO^2 : MN^2$. لذا، (صرفنظر از بعد) حجم سُم برابر است با مساحت قطاع. این ممکن است گیج کننده به نظر آید زیرا ظاهراً یک بعد را از دست داده‌ایم، یعنی ابزار رهاسازی بعد. در جهان همراه با بعد، این مسئله بر حسب کسرها بیان می‌شود. شکل ۴ (راست) حجم‌های سُم و منشور^۶ را نشان می‌دهد. حجم منشور به حجم سُم، همانند مساحت مستطیل قاعده به مساحت قطاع است، یعنی

$$(10) \quad \text{مساحت قطاع/مساحت مستطیل} = \text{حجم سُم/حجم منشور}$$

ارشمیدس قبلاً نشان داده بود که $3/2 = \text{مساحت قطاع/مساحت مستطیل}$ و با توجه به اینکه $1/4 = \text{حجم مکعب/حجم منشور}$ ، دوباره داریم، $1/6 = \text{حجم مکعب/حجم سُم}$. قابل توجه اینکه، بر آن باوریم که در تحقیقات هر نخبه‌ای وارد شده‌ایم تا اشتباهات گذشته را جبران کنیم. در این کوشش اثری از ارشمیدس در نسبت طلایی را پیدا کرده‌ایم، ولی تنها هنگامی که $r = \frac{R}{\varphi}$ در شکل ۴ (بالا) توجه کنید که r از 0 تا R تغییر می‌کند. هیچ یک از دیگر نخبه‌های مندرج در این نوشته اشاره‌ای به این نکته نداشته‌اند که با استفاده از اندازه واقعی NF یا NL می‌توانید با به کارگیری مفهوم تشابه (یا در واقع همنهشتی) مثلث‌ها $\Delta GML \sim \Delta LSF$ ، نشان دهید که $r = \frac{1}{\varphi}$ ، و ارون نسبت طلایی: $NF : NL :: MN : MK :: ME : ED :: MO = 1/\sqrt{\varphi}$ ، و ضمناً،

اشکال متحرک و برنامه کامپیوتری

اشکال متحرک نشان داده شده در Curvebank.calstatela.edu/method/method.htm انتقال از مکعب به استوانه به سُم را نشان می‌دهد. هر یک، از ورق‌های عمودی با ضخامت Δx تشکیل شده است که حجم را می‌سازد. در دنباله آخر اشکال متحرک، مثلث‌ها به صورت لایه لایه از سُم دور می‌شوند تا درون آن نشان داده شود، یک انتگرال‌گیری برعکس

⁶ Prism

(به اصطلاح)، اگر بخواهید. اشکال متحرک به وسیله نسخه‌ای از برنامه متلب^۷ ایجاد شد. هر کدام از لایه‌ها از باندهایی به ضخامت Δx ساخته شده است؛ اینها به نحو مناسبی تنظیم شده‌اند تا وقتی روی هم انباشته می‌شوند به حالت پلکانی در نیایند. کد مربوطه نسبت (حجم سُم/ حجم مکعب) را گزارش می‌دهد و می‌توانید بررسی کنید که این مقدار به ۶ میل می‌کند هنگامی که پارامتر npts افزایش می‌یابد (که این نهایتاً به Δx ، ضخامت لایه، کاهش می‌یابد). برای مثال برای $npts=51$ به دست می‌آوریم $6/0024 = \text{حجم سُم/حجم مکعب}$ ، حال آنکه برای $npts=501$ داریم $6/000024 = \text{حجم سُم/حجم مکعب}$. به قول معروف، این محاسبات به حد کافی نزدیک به کار دولتی. همچنین فرض می‌کنیم که یک "سُم" به طور مشابه از یک متوازی‌السطوح دلخواه ساخته شود، لذا ترکیب یک استوانه مایل و برش-عرضی سهموی، به طور مشابه این نتیجه را می‌دهد که حجم سم برابر یک ششم حجم متوازی‌السطوح است. همه اینها با یک ماتریس 4×4 شروع می‌شود که نقاط درون یک متوازی‌السطوح را به یک مکعب تصویر می‌کنند. جزئیات را با خوشحالی به عهده خواننده می‌گذاریم.

چاپگرهای مدل D - ۳

تیم ما دو مجموعه از مدل‌ها را تولید کرده است- یک سُم اولیه به مقیاس کوچکتر، و یک سُم با اندازه متوسط، و نیز مکمل آن‌را، روی یک ماشین بزرگتر. سُم کوچکتر با ضخامت لایه $0/01$ اینچ توسط یک چاپگر Deezmaker Bukobot ساخته شد. درونش خصوصاً مشبک است و تمامی سطح دیواره‌هایش دارای ضخامت $0/05$ اینچ می‌باشد. سُم با اندازه متوسط و مکمل آن با استفاده از چاپگر uPrint SE Plus با دستور ضخامت $0/013$ اینچ به ازای هر لایه چاپ شد. صفحه مقسم مشترک برای هر دوی سُم و مکمل آن از طراحی حذف شد به طوری که مثل پیمانه‌ها^۸، مدل‌های فیزیکی نهایی را می‌توان از مایع پر کرد. روندهای چاپ، مشابه بود و با نمایش‌های کامپیوتری اشیاء هندسی شروع شد. در این حالت از یک برنامه معروف CAD (Computer Aided Design)، طرح کمکی کامپیوتری) به نام Solidworks استفاده شد تا نمایش‌های کامپیوتری سُم با اندازه متوسط و مکمل آن را تولید کند، که در آن هر ضلع از مکعب مورد استفاده ۱۰- اینچ بود (شکل‌های ۵ و ۶ را ملاحظه کنید). نرم افزار قادر به محاسبه خواصی همچون حجم، مساحت سطوح، و مرکز جرم هر مدل بود، و انجام چنین کاری موجب شد تا به طور مستقل بررسی کنیم که حجم سُم $1/6$ حجم مکعب است.



شکل ۶



شکل ۵

⁷ MATLAB ⁸ Scoop

مراجع

- [1] J. L. Heiberg, Eine Neue Archimedeshandschrift, *Hermes*, **42** no. 2 (1907) 235–303.
- [2] J. L. Heiberg and H. G. Zeuthen, *Eine Neue Schrift des Archimedes*, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1907 321–363.
- [3] T. L. Heath, *The Method of Archimedes :Recently Discovered by Heiberg*, Cambridge, 1912.
- [4] T. L. Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements, **1, 2, 3**, Dover, 1956.
- [5] Great Books of The Western World, Robert Maynard Hutchins, ed., Mortimer J. Adler, Ass. ed., II: Euclid, Archimedes, Apollonius of Perga, Nicomachus, Encyclopedia Britannica, 1952.
- [6] E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, with a new bibliographic essay by Wilbur R. Knorr, Princeton University Press, 1987 p. 459
- [7] R. Netz, K. Saito and N. Tchernetska, *A New Reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest*, (Part I), *SCIAMSVS*, **2** (2001) 9–29.
- [8] A New Reading of Method Proposition 14: Preliminary Evidence from the Archimedes Palimpsest (Part 2), *SCIAMSVS*, **3**, (2002) 109–125.
- [9] R. Netz, The Works of Archimedes, Volume 1, Cambridge, 2004.
- [10] R. Netz and W. Noel, The ARCHIMEDES CODEX, Da Capo Press, 2007.
- [11] R. Netz and W. Noel, Natalie Tchernetska and Nigel Wilson, The ARCHIMEDES Palimpsest, Walters Art Museum and Cambridge, **1,2**, 2011.
- [12] S. Stein, Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka, Mathematical Association of America, 1999.
- [13] The Archimedes Palimpsest, Christie's (Auction catalog), **502**, Park Avenue, New York, 1998.
- [14] S. H. Gould, The Method of Archimedes, *American Mathematical Monthly*, Volume 62, 1955, pp. 473–476.
- [15] J. L. Heiberg, translated by D. C. Macgregor, *Mathematics and Physical Science in Classical Antiquity*, Chapters in the History of Science II, Charles Singer, ed., Oxford, 1922.
- [16] Archimedes Text Sold for 2 Million, *The New York Times*, October 30, 1998, p. A22.
- [17] Carol Vogel, Eureka, *The New York Times*, February 19, 1999.
- [18] Big Literary Find in Constantinople, *The New York Times*, July 16, 1907, p. 1.
- [19] Archimedes text goes to unnamed buyer for 2.2 m, *Kathimerini*, Athens, 1998, p. 1.
- [20] Half-leaf of a 10th century codex, translated by Nigel Wilson, Cambridge University Library, Add.1879.23.
- [21] W. R. Knorr, The Method of Indivisibles in Ancient Geometry, *Vita Mathematica* (R. Calinger, ed.,) Mathematical Association of American, 1996 pp. 71–74.
- [22] C. H. Edwards Jr., The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, 1979 68–76.
- [23] Archimedes Comes to America, *Science*, **284** (1999) p. 2083.
- [24] I. Boserup (ed.), Københavns Universitet 1479–1979: Klassisk filologi efter 1899, **8** (1992) 367–374
- [25] S. B. Gray, A Centennial Celebration of Two Great Scholars, *Notices of the American Mathematical Association*, **55** (2008) 776–783.
- [26] J. L. Berggren, The Archimedes Codex, Book Review, *Notices of the American Mathematical Association*, **55** 2008 943–947.
- [27] J. Stewart, *Calculus*, 5ed, Thomson, Brooks/Cole, 2003, p. 888.
- [28] A. Alexander, Infinitesimal, *Scientific American / Farrar, Straus and Giroux*, 2014 107–111.
- [29] P. Lynch, "Sharing a Pint" *ThatsMaths* thatsmaths.com/2012/12/13/sharing-a-pint/
- [30] PBS (2003) *Infinite Secrets*, NOVA Science Programming, Original PBS Date: September 30, 2003

علی اکبر محمدی حسن آبادی

اصفهان، بهارستان، خیابان فرشته، دانشگاه شیخ بهایی

aamohaha@yahoo.com

دکتری ریاضی (گرایش نظریه گروه‌ها) از دانشگاه ویلز انگلستان سال ۱۳۵۵. عضو هیات علمی دانشگاه شیخ بهایی اصفهان.



فیروزه محمدی حسن آبادی

اصفهان، بهارستان، خیابان فرشته، دانشگاه شیخ بهایی

arsh_kebriya15@yahoo.com

کارشناسی ارشد مترجمی زبان انگلیسی از دانشگاه اصفهان سال ۱۳۹۰. مدرس دانشگاه شیخ بهایی اصفهان

