

تحقیقات ریاضی در دبیرستان: تجربه برنامه‌ریزی برای تحقیق در ریاضی، مهندسی و علوم** (بترمع)***

پاول اتینگف^۱، اسلاو اگروویچ^۲ و تانیا خوانووا^۳
مترجمین: علی اکبر محمدی حسن آبادی* و فیروزه محمدی حسن آبادی

چکیده. تحقیق اصیل ریاضی در سطح بالا توسط دانش‌آموزان دبیرستانی امکان‌پذیر است. به‌ویژه چنانچه روند برنامه تحقیقاتی مناسب انتخاب شده و زیر نظر مربیان با تجربه انجام شود منجر به تربیت محققان جوان می‌گردد. برنامه‌ریزی برای تحقیق در ریاضی، مهندسی و علوم، چنین تجربه‌ای را به اثبات رسانده است.

یک مجموعه متناهی از خطوط در فضای ۳-بعدی را در نظر بگیرید. یک اتصال، نقطه‌ای است که در آن سه تا از این خطوط (که در یک صفحه قرار ندارند) یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر L خط وجود داشته باشد، بیشترین تعداد اتصال‌های ممکن چقدر است؟ خوب، بیایید شانس‌مان را امتحان کرده، و به طور تصادفی K صفحه را انتخاب کنیم. هر دو صفحه یک خط، و هر سه تا از آنها، یک اتصال را به وجود می‌آورند. بنابراین، آنها $L := K(K-1)/2$ خط و $J := K(K-1)(K-2)/6$ اتصال را به وجود می‌آورند. اگر K بزرگ باشد، J تقریباً برابر $\sqrt[3]{L}$ است. سال‌ها حدس بر این بود که نمی‌توان تقریب خیلی بهتر از این را یافت، بدین مفهوم که اگر L بزرگ باشد، آنگاه $L \leq CL^{3/2}$ ، که در آن C یک مقدار ثابت است (به‌وضوح، $C \geq \sqrt[3]{2}$). این موضوع در سال ۲۰۰۷ توسط لری گو^۱ و نتزکتز^۲ ثابت شد و ورودی به هندسه تقاطعی^۳ بود. گو^۱ همچنین نشان داد که می‌توان $C = 10$ در نظر گرفت. آیا شما می‌توانید

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۸/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۳/۱۲

*** نوشته حاضر ترجمه مقاله زیر است:

P. Etingof, S. Gerovitch and T. khovanova, Mathematical Research in High School: The PRIMES Experience, Notices of the American Mathematical Society, 62 no. 8 (2015) 910-918.

** Program for Research In Mathematics, Engineering, and Science; web.mit.edu/primes.

مترجم: نویسندگان در مقاله مخفف PRIMES (Program for Research In Mathematics, Engineering and Science) را به کار برده‌اند و ما نیز از حروف اول فارسی شده یعنی بترمع (برنامه‌ریزی برای تحقیق در ریاضی، مهندسی و علوم) استفاده می‌کنیم.

¹ Pavel Etingof

پاول اتینگف استاد ریاضی مؤسسه صنعتی ماساچوست (MIT) و مشاور عالی تحقیقات بترمع است، آدرس پست الکترونیک او etingof@math.mit.edu است.

² Slava Gerovitch

اسلاو اگروویچ استادیار تاریخ ریاضی در مؤسسه صنعتی ماساچوست (MIT) و برنامه‌ریز بترمع است. آدرس پست الکترونیک او Slava@math.mit.edu می‌باشد.

³ Tanya khovanova

تانیا خوانووا استادیار ریاضی در مؤسسه صنعتی ماساچوست (MIT) و سرمربی بترمع است. آدرس پست الکترونیک او tnaya@math.mit.edu می‌باشد.

بهترش کنید؟ بله! بهترین نتیجه شناخته شده آن است که هر عدد $C > 4/3$ صدق می‌کند. این در سال ۲۰۱۴ توسط جوزف زوریر^۴، یک دانش آموز کلاس یازدهم از جزیره رد^۵ ثابت شد [۱۶].

اینجا مشکل دیگری پیش می‌آید. فرض کنید K و L اجسام محدبی در فضا باشند، و فرض کنید که می‌توانیم K را پشت L پنهان کنیم صرف‌نظر از اینکه از کجا به آنها بنگریم (مجازیم اجسام را جابه‌جا کنیم ولی مجاز نیستیم آنها را دوران بدهیم). آیا درست است که حجم K حداکثر برابر حجم L باشد؟ جواب دقیق، نه می‌باشد! کریستیناچن^۶، یک دانش‌آموز کلاس دهم از ماساچوست در سال ۲۰۱۱ نشان داد که نسبت حجم‌ها می‌تواند تقریباً $1/16$ باشد، که بهترین مقدار شناخته شده در حال حاضر است ([۵]: شکل ۱ را ببینید). بنابراین، آیا می‌تواند به میزانی دلخواه بزرگ باشد؟ نه! کریستینا، تانیا خووانووا، و دن کلین^۷ نشان دادند که نسبت حجم‌ها در هر ابعادی کمتر از ۳ می‌باشد [۶].



شکل ۱: دانش آموز بترمع کریستیناچن در حال نشان دادن تصویر جسم محدبی است که می‌تواند پشت یک هرم با حجم کمتر پنهان شود. (کنفرانس بترمع ۲۰۱۱).

جلد؟ آیا واقعاً ممکن است که دانش آموزان سال‌های دهم و یازدهم تحقیقات اصیل ریاضی انجام دهند؟

بله! کریستینا و جوزف، همانند صدها دانش آموز دیگر، تحقیقات خود در بترمع را انجام داده‌اند که از ژانویه ۲۰۱۱ در گروه ریاضی دانشگاه صنعتی ماساچوست مشغول اجرای آن بوده‌ایم. هر ساله، تعداد زیادی سؤال درباره برنامه‌مان، از جانب دانش‌آموزان با استعداد و والدین آنها و نیز از جانب مراکز علمی که می‌خواهند برنامه‌های مشابهی را تنظیم نمایند، دریافت می‌کنیم. اینجا می‌خواهیم به برخی از این سؤالات پاسخ دهیم، تا تجربیاتمان را در اختیار دیگران قرار دهیم، و به جامعه ریاضی خارج از برنامه‌مان بگوئیم که چگونه یک امر ظاهراً غیرممکن همچون تحقیقات اصیل ریاضی در واقع می‌تواند در دبیرستان به مرحله عمل درآید.

در پی چه نوع دانش‌آموزانی هستید؟ پسر می‌خواست بدانند که اگر نمره کامل در IMO را کسب نکرده باشد و اگر هنوز به اثبات وایل از قضیه آخر فرما تسلط نداشته باشد، آیا اصلاً درخواست عضویت بدهد؟

P.E.: اگر او عاشق ریاضی است، با کمال میل، بله! پیش‌زمینه‌هایی (همچون ریاضی عمومی) لازم است، ولی معمولاً همچنان که تحت راهنمایی‌های مربی خود پیش می‌رود، آنها را می‌آموزد. همچنین، بسیاری از دبیرستانی‌های نخبه در مسابقات ریاضی خوب می‌درخشند ولی محققین خوب همیشه در حل مسئله سریع نیستند. زمان، کوشش، و پشت‌کار لازم است تا پیش‌زمینه‌ها یادگرفته شود و راه‌های مختلف، که ممکن است بسیاری از آنها کارا نباشند، آزمایش شود. ما به دنبال دانش‌آموزانی با توانایی تحقیق در ریاضیات و علاقه‌مند به یادگیری، سخت کوش، و دارای تخیلات خلاق جهت پیشبرد آن تحقیقات هستیم و بالاتر از آنها، به دنبال آنهایی هستیم که دیوانه ریاضی‌اند.

⁴ Joseph Zurier ⁵ Rhode Island ⁶ Christina Chen ⁷ Dan Klain

چگونه دانش آموزان را انتخاب می‌کنید؟ دخترم می‌پرسد: برای اینکه قبول شود، آیا لازم است ماشینی باشد که قهوه را به قضیه تبدیل می‌کند؟

P.E.: ریاضیدانان هم انسان‌هایی هستند که ده درصد از مواقع قهوه را به قضیه تبدیل می‌کنند، و بقیه عمرشان را صرف کوشش‌های ناموفق برای اثبات قضایا می‌نمایند. و ما به دخترتان برای عضویت در انجمن خوش‌آمد می‌گوئیم.

S.G.: ما امتیازات المپیک، اهداف، توصیه‌ها، و نمرات را با دقت در نظر می‌گیریم، ولی قسمت اصلی، پذیرفته شدن در امتحان ورودی است. مجموعه مسائل آزمون ورودی را اواسط سپتامبر، که دو ماه دیگر است، پست می‌کنیم.

T.K.: اینها از آن نوع مسائل نیستند که بتوان به سرعت به آنها پرداخت: برخی از آنها، در دید اول می‌توانند حتی یک استاد ریاضی را هم شگفت زده کنند. از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که درباره یک مسئله فکر کنند، کتب و منابع مربوطه را بررسی نمایند، روز بعد دوباره فکر کنند، و دوباره و دوباره، تا اینکه روزی بالاخره به نتیجه رسیده، یک اثبات کامل با همه جزئیات را ثبت نمایند. این درگیری طولانی با مسائل ریاضی همانند یک روند تحقیقاتی است.

P.E.: در حقیقت، این شبیه سرگرمی مورد علاقه‌ام، قارچ چینی، است. ممکن است ساعت‌ها درون جنگل بدوی بدون اینکه چیزی ببینی و سپس به طور ناگهانی یک گنج واقعی پیدا می‌کنی. لازم است صبور باشی و بتوانی از روندی که طی می‌شود لذت ببری و هر چیز دیگری را فراموش کنی. نقاط مشترک فراوانی بین یک قارچ جمع‌کن خوب (شکارچی خوب قارچ) و یک ریاضیدان خوب وجود دارد.

آیا دانش‌آموزان بترمع به طور انفرادی کار می‌کنند یا به صورت گروهی؟

S.G.: اغلب پروژه‌ها انفرادی می‌باشد و هر دانش‌آموز دارای یک مربی است. با این وجود، دانش‌آموزان سال اول و دوم، معمولاً در گروه‌های دو نفره روی پروژه‌های مشترک کار می‌کنند. بحث‌های گروهی تحقیق را مهیج‌تر می‌کند و محرکی است برای دانش‌آموزان جوان‌تر و به آنها ورودی آرام‌تر به دنیای ریاضی عطا می‌کند. حتی در پروژه‌های انفرادی دانش‌آموزان تنها نیستند: آنها با مربیان خود و اعضاء هیأت علمی که پروژه‌ها را پیشنهاد کرده‌اند همفکری و همکاری می‌کنند. آنها تیمی تشکیل می‌دهند که در آن ریاضیدانان از سطوح مختلف مرتبه‌ای و تجربه‌ای به طور مساوی همکاری می‌نمایند. بدین ترتیب دانش‌آموزان بترمع شیوه همکاری و کارگروهی را یاد می‌گیرند.

P.E.: به طور خلاصه؛ انتخاب‌هایی برای هر دو دسته ریاضیدانان درون‌گرا (کسانی که هنگام تحقیق در ریاضی دوست دارند به کفش‌های خود نگاه کنند) و برون‌گرا (آنهايي که هنگام تحقیق در ریاضی دوست دارند به کفش‌های همکارانشان بنگرند) داریم، و البته همه دانش‌آموزان بترمع ترغیب می‌شوند تا به‌کرات به کفش‌های مربیانشان نگاه کنند.

پروژه‌ها را چگونه انتخاب می‌کنید؟ آیا به دانش‌آموز من می‌توان گفت که حدس اعداد اول دو قلو را حل کند؟

P.E.: مسائل باز معروف معمولاً پروژه‌های خوبی نیستند، ولی ما «پروژه‌های بازیچه» که دارای جوابی مشخص هستند را هم ارائه نمی‌دهیم. دانش‌آموزان در تحقیقی واقعی با همه نااطمینانی‌ها، ناامیدی‌ها، و شگفتی‌هایش، غرق می‌شوند. یافتن پروژه‌های به‌روز که کمترین پیش‌زمینه را لازم داشته باشند ماهرانه‌ترین قسمت کار در انجام بترمع می‌باشد. برخی ضوابط که در یک پروژه بترمع لازم می‌دانیم عبارتند از:

۱- شروعی دستیافتنی. وجود مراحل اولیه ساده برای شروع.

۲- انعطاف‌پذیری. امکان فکر کردن درباره سؤالات مرتبط و متعدد، امکان تغییر موضوع در صورت عدم دسترسی به نتیجه قابل قبول در موضوعی خاص، و امکان تغییر سؤالات در صورت خیلی مشکل بودن و به حد کافی جالب توجه نبودن آنها.

۳- عنصر (تجربگی) رایانه‌ای. امکان اکتشاف رایانه‌ای با هدف یافتن الگوها و پیشنهاد حدس‌ها. به این ترتیب می‌توان دانش‌آموزانی را که اغلب دارای مهارت‌های قوی برنامه‌ریزی هستند زودتر به انجام پروژه گمارد، هنگامی که آنها

هنوز دانش تجربی از ابزار نظری را ندارند. همچنین یادگیری مفاهیم ریاضی جدید مانند جبر و نظریه نمایش با استفاده از تجربه عملی یک دستگاه جبری (Computer Algebra System) CAS آسان تر است.

۴- ارتباط با مشاور. وجود یک ریاضیدان محقق علاوه بر مربی (معمولاً استاد یا محقق است که پروژه را پیشنهاد داده) که از طریق پست الکترونیک (e-mail) یا گاهاً حضوری راهنمای پروژه باشد. این ملاقات ها بسیار مؤثرند.

۵- تصور/انگیزه بزرگ. ارتباط، حداقل در سطح ایده ها، با گروه های وسیع تر و با تحقیقات دیگران.

۶- عنصر آموزش مطالب جانبی. پروژه می بایست دانش آموز را به مطالعه ریاضیات پیشرفته با روشی اصولی ترغیب نماید.

۷- انجام پذیری. انتظاری معقول که یک دانش آموز خوب در عرض چندماه به دست می آورد، نتایجی جدید که بتواند در یک کنفرانس سالانه بترمع در اواسط ماه می، ارائه کند و نیز بتواند نتایج قابل چاپ در عرض یک سال به دست آورد.

۸- آشنا بودن با برنامه یا حوزه تحقیقاتی مربی.

T.K.: قسمت مهم تحقیق، هنر ارائه مسئله از جانب خودتان و نه فقط پرداختن به حل مسائل دیگران است. وقتی دانش آموزان احساس می کنند که توانایی هدایت پروژه در مسیری جدید را دارند، خیلی هیجان زده شده، و احساس مالکیت نسبت به پروژه پیدا می کنند. آنگاه می توانند به خود اعتماد کرده و مسئله ای ارائه دهند، فارغ از شغلشان، در زندگی آینده آنها بسیار اهمیت دارد. به همین دلیل است که پروژه هایی انتخاب می کنیم که این قابلیت را داشته باشند.

P.E.: به نظر ساده می آید؟ خوب، اگر کمی وقت آزاد دارید یا کاری بهتر برای انجام دادن ندارید (مثلاً، در طی یک سخنرانی خسته کننده ریاضی که اصلاً نمی توانید دنبال کنید)، سعی کنید پروژه ای را که در بیشتر این شرایط صدق می کند طرح کنید و وقتی چنین کردید، لطفاً آن را برای ما بفرستید!

درست است که در بترمع ریاضیات و ترکیبیات مقدماتی برابری می کند؟ آیا دانش آموزان بترمع به جای یادگیری جبر، توپولوژی، هندسه، آنالیز، و نظریه اعداد، روی مسائل سخت المپیاد کار می کنند؟

P.E.: نه واقعاً، پروژه های زیادی در این زمینه ها داشته ایم به ویژه در جبر ناجابه جایی و نظریه نمایش. همچنین دانش آموزان بترمع درگیر این زمینه ها در بترمع شده و به مطالعه گروه ها می پردازند.

گفته می شود که بسیاری از پروژه های بترمع در ریاضیات گسسته است و دلیل آن است که در این زمینه، یافتن پروژه های جالب که نیاز به پیش زمینه اولیه کمی داشته باشند آسان تر است. با این وجود، آنها فقط مسائل سخت المپیک نیستند. بسیاری از آنها طوری طراحی شده اند که سؤالات اساسی را جواب دهند و افراد را برای یادگیری زمینه های دیگری که ریاضیات گسسته با آنها ارتباط عمیق دارد، تشویق کنند. خلاصه اینکه، سعی داریم به دانش آموزانمان وسعت و همچنین ممتاز بودن ریاضی را نشان دهیم.

جبر ناجابه جایی و نظریه نمایش در دبیرستان؟ پرداختن به سؤالات اساسی؟ شوخی نیست؟ می توانید چند مثال ارائه کنید؟

P.E.: از من می خواهید که تکنیکی باشم؟ بسیار خوب، چنین می کنیم. یک گروه از پروژه ها مربوط به نمایش جبرهای چردنیک^۸ گویا هستند. فرض کنیم G یک گروه متناهی و V نمایش با بعد متناهی آن روی یک میدان K باشد. در این صورت نمایش چردنیک گویای $H(G, V)$ را می توان تعریف کرد که عبارت باشد از تغییر قابل ملاحظه معینی^۹ از جبر $KG \rtimes D(V)$ ، حاصل ضرب نیم مستقیم گروه جبر G با جبر عملگرهای دیفرانسیلی روی V . برای مثال، اگر $V = K$ ، $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ، و مولد $s \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ روی مختص χ روی V به صورت $s(\chi) = -\chi$ عمل کند، آنگاه $H(G, V)$

^۸ Rational Cherednik algebras ^۹ Certain remarkable deformation

توسط s ، χ و عملگر دنکل $\partial_\chi - \frac{k}{\chi}s$ ^{۱۰} تولید می‌شود. در حال حاضر، نمایش‌های $H(G, V)$ موضوع تحقیقات فعال می‌باشند.

وقتی G گروه انعکاس مختلط^{۱۱} $G(m, r, n)$ باشد و $V = K^n$ (جاییکه $\text{char} K = p$)، با استفاده از روش‌های جبر ناجابه‌جایی، شیلا دواداس^{۱۲} و مربی‌اش استیون سام^{۱۳} نمایش تجزیه‌ناپذیر کمترین-وزن^{۱۴} $H(G, V)$ را مطالعه کرده، برای برخی از آنها فرمول‌های مشخصه‌ای را حدس زدند و در بسیاری از موارد این فرمول‌ها را ثابت کردند [۷]. در حالت کلی، این مسئله‌ای سخت است، که حل نشده است. حتی برای حالت $m = r$ و $n = 2$ (گروه‌های تقارن‌های یک چندضلعی منظم) هم این مسئله ساده‌ای نیست؛ در این حالت نتایج معین بیشتری توسط دانش آموز بترمع، کارل لیان^{۱۵} حاصل شد [۹].

فنگینینگ دینگ^{۱۶} و مربی ایشان، ساشا سیمبالیوک^{۱۷} نمایش‌های جبرهای چردنیک پیوسته که تعمیم $H(G, V)$ به حالتی هستند که در آن G یک گروه جبری تجزیه‌پذیر (به‌جای یک گروه متناهی) است را بررسی کردند [۸]. یعنی آنها حالتی را بررسی کردند که در آن $G = GL(n, \mathbb{C})$ و $V = \mathbb{C}^n$. آنها مرکز $H(G, V)$ را محاسبه کرده، نمایش‌های تجزیه‌ناپذیر با بعد متناهی را دسته‌بندی نموده، و کاراکترهای آنها را محاسبه کردند.

ساشوات کیشور^{۱۸} و مربی‌اش گوس لونرگان^{۱۹} نشان صورت هرمیتی متعارف را روی فضای $\text{Hom}(M_\lambda, M_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes M_{\lambda_n})$ مورد مطالعه قرار دادند، که در آن $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ اعداد حقیقی بوده و M_λ مدول ورما^{۲۰} برای جبرلی $\mathfrak{sl}_2$ می‌باشد. آنها حالاتی را دسته‌بندی نموده‌اند که در آنها این صورت معین است و نیز با به‌کارگیری فرمول نشان یک مسئله توپولوژیکی را حل کردند: کران‌های پائینی برای تعداد نقاط بحرانی فوق تابع^{۲۱} مدل گودین^{۲۲}

$$F(t_1, \dots, t_m, z_1, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} (t_i - t_j)^2 \prod_{i=1}^m \prod_{k=1}^n (t_i - z_k)^{-\lambda_k}$$

که در آن $m = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n - \lambda)$ را به دست آورید. آنها همچنین نتایج خود را به حالت گروه کوانتومی $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (که در آن $|q| = 1$) تعمیم دادند.

ما پروژه‌های جبری دیگری نیز داشته‌ایم. همراه با یانگی چن^{۲۳}، مکائیل زنگ^{۲۴} و مربی آنها، دیوید جردن^{۲۵}، توابع اثر را روی جبر $A_p := K[x, y, z]/(P)$ که در آن P یک چندجمله‌ای همگن عمومی^{۲۶} از درجه d و K یک میدان با مشخصه p می‌باشند را مورد مطالعه قرار دادیم [۴]. بنا بر تعریف، یک تابع اثر یک تابع خطی روی A_p است که روی براکت‌های پواسن^{۲۷}

$$\{f, g\} := \frac{\partial(p, f, g)}{\partial(x, y, z)}$$

صفر می‌شود. مسئله محاسبه سری هیلبرت فضای توابع اثر، یعنی، $h(z) := \sum_{n \geq 0} h_n z^n$ ، بود که در آن h_n بعد فضای توابع اثر از درجه n است. نتیجه می‌شود که برای p به حد کافی بزرگ، تابع $h(z)$ توسط فرمول عجیب زیر داده شده است:

$$h(z) = \frac{(1 - z^{d-1})^3}{(1 - z)^3} + z^{d-3} \left(\frac{1 - z^{pd}}{(1 - z^p)^3} + \frac{d(d-3)z^p}{1 - z^p} - 1 \right).$$

این فرمول را ما به طور تجربی یافتیم و سپس با استفاده از هندسه جبری و نظریه D - مدول‌ها آن را ثابت کردیم (و به حالت شبه همگن‌ها تعمیم دادیم).

¹⁰ Dunkl operator ¹¹ Complex reflection group ¹² Sheela Devadas ¹³ Steven Sam ¹⁴ Lowest weight irreducible representation
Devadas ¹⁵ Carl Lian ¹⁶ Fengining Ding ¹⁷ Sasha Tsymbaliuk ¹⁸ Sashwat Kishore ¹⁹ Gus Lonergan ²⁰ Verma module
²¹ master function ²² Gaudin model ²³ Yongyi chen ²⁴ Michael Zhang ²⁵ David Jordan ²⁶ Generic ²⁷ Poisson brackets

پروژه جبری دیگری مربوط به سری مرکزی پایینی یک جبر شرکت پذیر A بود: $L_1 = A$ ، $L_2 = [A, L_1]$ ، $L_3 = [A, L_2]$ ، و غیره. فی جین^{۲۸} و شوئی خت^{۲۹} در ۲۰۰۶ نشان دادند که اگر A در n مولد روی $\mathbb{Q}$ آزاد باشد، آنگاه $B_2 = L_2/L_3$ فضای صورت‌های دیفرانسیلی بسته با درجه زوج مثبت در n متغیر است. ما همراه با سوریا بهو پاتیزاجو^{۳۰}، بیل کوزماتول^{۳۱}، جیسون لی^{۳۲}، و مربی ایشان، دیوید جردن^{۳۳}، این نتیجه را به حالت ضرایب صحیح تعمیم داده، B_2 را بر حسب کوهومولوژی دی‌رحم^{۳۴} روی اعداد صحیح بیان کردیم [۱]. در پروژه دیگری، اسحاق کسپا^{۳۵} و مربی ایشان، یائل فرجیر^{۳۶}، خارج قسمت‌های $N_i := AL_i/AL_{i+1}$ را مورد مطالعه قرار داده و نشان دادند که اگر A یک جبر آزاد در $\chi_1, \dots, \chi_n$ روی یک میدان با مشخصه p به پیمانه روابط نوشته شده بر حسب $\chi_1^{p^{m_1}}, \dots, \chi_n^{p^{m_n}}$ باشد و اگر آبلای سازی A با بعد متناهی باشد، آنگاه N_i دارای بعدهای بخش‌پذیر بر $p^{\sum m_i}$ است [۱۰]. اثبات مبتنی بر نظریه نمایش جبرهای عملگرهای دیفرانسیلی با توان‌های تقسیم شده می‌باشد.

از جبر خسته شده‌اید؟ بفرمائید، این یک پروژه ترکیبیاتی است. یک معادله خطی r -منظم است اگر برای هر r -رنگ‌پذیری از اعداد صحیح مثبت، اعداد صحیح مثبت از یک رنگ وجود داشته باشند که در معادله صدق کنند. در ۲۰۰۵ فاکس^{۳۷} و رادوئی چیک^{۳۸} حدس زدند که معادله

$$\chi_0 + 2\chi_1 + \dots + 2^{n-1}\chi_{n-1} - 2^n\chi_n = 0,$$

برای هر $n \geq 1$ ، دارای یک درجه منظمی n می‌باشد، که حدس رادو^{۳۹} در سال ۱۹۳۳ را مورد بررسی قرار می‌دهد. در حالی‌که حدس رادو بعداً با یک فامیل متفاوت از معادلات مورد بررسی قرار گرفت، حدس فاکس-رادویی چیک باز باقی می‌ماند. این حدس (در یک صورت تعمیم یافته) توسط نوآه گلوویچ^{۴۰} به مربی‌گری لزلو لوواز^{۴۱} ثابت شده بود [۱۱].

S.G.: این ریاضی زیباست، ولی همانند "نتایج قبلی" و بخشی از پیشنهاد ما به نظر می‌آید. آیا آن را اینجا کپی کردید؟ این خواننده را کسل می‌کند! به آنها بگو که در شرایط یک بازی مهیج یا داستانی جذاب، دانش‌آموزان ما چه می‌کنند.

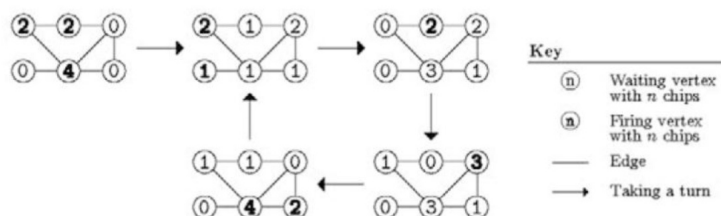
P.E.: خیلی خوب، اجازه دهید حداکثر تلاشم را بنمایم. هر روز یک مریخی^{۴۲} به هر یک از دوستانش یک پزوی مریخی^{۴۳} می‌دهد اگر به حد کافی ثروتمند باشد که بتواند چنین کند چه اتفاقی می‌افتد؟ این روند را "بازی پرتاب نیزه موازی"^{۴۴} می‌نامند (شکل ۲ را ببینید) و الگوی مهمی از حرکات روی گراف‌ها است. واضح است که در نهایت تناوبی می‌شود، ولی از آنجایی‌که غیرخطی است رفتاری پیچیده را می‌توان انتظار داشت. ولی، زیو اسکولی^{۴۵} همراه با مربی‌هایش، دامین جیانگ^{۴۶} و یان زنگ^{۴۷}، توانستند الگوهای متناوب ممکن را به طور کامل مشخص کنند [۱۵]. این یک نتیجه واقعاً زیبا است!

S.G.: شاید این روش خوبی برای پشتیبانی مالی بترمع باشد؟ تصور می‌کنم که این نمونه نه فقط برای پزوه‌های مریخی بلکه برای صورت حساب‌های یکصد دلاری زمینی‌ها هم صدق می‌کند؟ در این صورت فقط لازم است مطمئن شویم که بترمع دوستان ثروتمند کافی دارند.

P.E.: خوب، جای امیدواری هست. بر اساس این الگو، بترمع نیز می‌بایستی صورت حساب‌های یکصد دلاری بدهند. کل پول موجود در دستگاه مشخص شده است، لذا متأسفانه حقوق تهیه کننده برنامه می‌بایستی صفر شود!

²⁸ Feigin ²⁹ Shoikhet ³⁰ Surya Bhupatiraju ³¹ Bill Kuszmaul ³² Jason Li ³³ David Jordan ³⁴ De Rham ³⁵ Isaac Xia ³⁶ Yael Fregier ³⁷ Fox ³⁸ Radoicic ³⁹ Rado ⁴⁰ Noah Golowich ⁴¹ László lovász ⁴² Martian ⁴³ Peso ⁴⁴ Parallel chip-firing ⁴⁵ Ziv scully ⁴⁶ Damien Jiang ⁴⁷ Yan zhang

اما مطمئناً همه پروژه‌های شما در این سطح بالا نیستند. دیدم که یکی از آنها درباره “dessins d’enfants” است. اگر فرانسوی از یادم نرفته باشد، این عبارت به معنی “نقاشی‌های کودکان” است. آیا نقاشی کودکان احتمالاً می‌تواند درگیر ریاضی جدی شود؟



شکل ۲: پروژه بترمع ۲۰۱۱.

P.E. در حقیقت، این یکی از پروژه‌های پیشرفته‌تر ما است! کودک در اینجا الکساندر گروتندیک^{۴۸} (۱۹۲۸-۲۰۱۴) یکی از ریاضیدانان قرن بیستم، است. او در سال ۱۹۸۴ در برنامه مشهورش “Esquisse d’un programme” پیشنهاد کرد که گروه گالوای $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ را از طریق عملش روی مجموعه پوشش‌های متناهی صفحه مختلط که در $0, 1, \infty$ برش می‌خورد، مطالعه کند. او این چنین پوشش‌ها را با گراف‌های مسطح معینی به نام “dessins d’enfants” نمایش داد. یک مسئله مهم یافتن خواص پوشش‌ها است (یا به طور معادل نقاشی‌های گروتندیک) که اجازه می‌دهد نشان دهیم دو پوشش داده شده تحت عمل $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ هم‌ارز نیستند. راوی جاگادیسان^{۴۹} (با مربی‌گری آخیل متیسو^{۵۰}) خاصیت جدیدی از پوشش‌ها پیدا کرد که از خواص قبلی قوی‌تر است و با استفاده از آن یک کران پایین جدید برای تعداد مدارهای گالوا از نوع معینی رابه‌دست آورد [۱۲]. اگرچه این پوشش‌ها درباره “نقاشی‌های کودکان” است و مؤلف کلاس یازدهم بود، این نتیجه واقعاً مورد توجه ریاضیدانان با سابقه است!

چگونه دانش‌آموزان را با پروژه‌ها متناظر می‌کنید؟ آیا نظریه تناظر در اینجا مصداق دارد؟

P.E. بله، همیشه می‌توانیم یک تناظر خوب پیدا کنیم، که این به لطف حقیقت ریاضی غیرشهودی است که چنین تناظر خوبی وجود دارد و به سادگی دست‌یافتنی است: قضیه ازدواج پایدار^{۵۱}، که می‌گوید، در جهان ایده‌آل همه ازدواج‌ها پایدارند. در حقیقت، تنها دلیلی که جهان واقعی کمبود ایده‌آل دارد آن است که مردم به اندازه کافی ریاضی نمی‌دانند. **T.K.** ولی دانش‌آموزان با هوش بترمع به ندرت ایده‌آل دارند آن است که مردم به اندازه کافی ریاضی نمی‌دانند. مثلاً، بسیاری از متقاضیان در تقاضانامه خود اظهار می‌دارند که می‌خواهند روی نظریه ریمان کار کنند. بسیاری نظریه اعداد را به عنوان موضوع بسیار مورد علاقه‌شان مطرح می‌کنند، که می‌تواند نتیجه پرومیس^{۵۲}، پردیس ریاضی کانادا-آمریکا^{۵۳}، راس^{۵۴}، و سایر برنامه‌هایی باشند که به دانش‌آموزان نظریه اعداد پیشرفته یاد می‌دهند. ولی سطح پروژه‌های پیشرفته در نظریه اعداد معمولاً برای دانش‌آموزان دبیرستانی خیلی بالا است. به همین دلیل معقول نیست که همیشه انتخاب‌های متقاضیان را به همان صورت خواسته شده بپذیریم.

اما سعی می‌کنیم از تقاضانامه‌ها تمایلات واقعی و توانایی‌های دانش‌آموزان را سنجیده و پروژه‌هایی را بیابیم که تا جایکه ممکن است روی این تمایلات و توانایی‌ها نقش داشته باشند.

⁴⁸ Alexander Grothendiech (1928-2014) ⁴⁹ Ravi Jagadeesan ⁵⁰ Akhil Mathew ⁵¹ Gale-shapley ⁵² PROMYS ⁵³ Canada-USA Math Camp ⁵⁴ ROSS

همچنین، یک دانش آموز متوسط بترمع برنامه ریز بهتری نسبت به یک استاد ریاضی MIT است و بسیاری از پروژه هایمان دارای یک قسمت محاسباتی است. لذا هنگام انتخاب پروژه ها علاوه بر پیش زمینه های ریاضی به پیش زمینه های برنامه ریزی نیز توجه می کنیم.

S.G.: بیشتر دانش آموزان به این نتیجه می رسند که در زمینه هایی کار کنند که هیچگاه قبلاً درباره آنها نشنیده اند، زیرا آن زمینه ها جایی هستند که پروژه های خوبی وجود دارد. به همین صورت، همچنان که پیش می رویم، با توجه به توانایی، آمادگی، و پیشرفت دانش آموز، سختی هر پروژه را تنظیم می کنیم. بدین ترتیب هر دانش آموز لذت اثبات یک قضیه نو را کشف می کند.

چگونه مربی ها را پیدا می کنید و آنها را با پروژه ها و دانش آموزان سازگار می نمائید؟ آیا دانش آموزان بترمع مربی ها را از تحقیق خود می رانند و شخصیت آنها را خراب می کنند؟

S.G.: مربی های بترمع نوعاً از فارغ التحصیلان ریاضی و گاهاً پسا دکترا و یا اعضاء هیأت علمی می باشند که تمایل و توانایی کار با دانش آموزان دبیرستانی را دارند. به دنبال مربیانی با توانایی تدریس و دارای شخصیتی متمایز هستیم که بتوانند نقش الگوهای مؤثر را داشته باشند. همچنین سعی می کنیم پروژه ها و دانش آموزان را با نوع تحقیق مربیان سازگار کنیم، خواه مفهومی باشند و خواه سوق داده شده به سمت حل مسئله.

بالاخره، برای اطمینان از اینکه بترمع از شخصیت و تحقیق مربی خرده نمی گیرد، مربیان را تشویق می کنیم تا پروژه هایی مرتبط با تحقیقات خودشان پیشنهاد کنند. این نه فقط کیفیت مربی گری را بهبود می بخشد بلکه همچنین مربیان را قادر به ترکیب مربی گری خود با تحقیقاتشان می سازد که اغلب منجر به انتشار مقاله مشترک با دانش آموزان می گردد. لذا نه فقط مربیان به تجربه رهبری با ارزش خود می افزایند بلکه یک مقاله مشترک نیز به لیست انتشارات خود افزوده، موقعیت خویش را در بازار شغلی محکم تر می نمایند.

T.K.: برخی مربیان می گویند بعد از اینکه به دانش آموزان دبیرستانی روش تحقیق را آموختند، آنها بالاخره خودشان نیز آن را می فهمند!

آیا دانش آموزانی از ایالات دیگر می پذیرید؟ از کشورهای دیگر چگونه؟ از سیارات، فضاها، یا کرات دیگر چه؟

S.G.: در دو سال اول، بترمع برنامه ای برای دانش آموزان محلی بود. در سال ۲۰۱۳ تصمیم گرفتیم آزمایشی انجام دهیم. در یک بررسی گسترده پنج دانش آموز را انتخاب و پروژه های تحقیقاتی ایشان را به صورت اینترنتی، با استفاده از ابزارهای نرم افزاری و سخت افزاری با هدف همکاری های اینترنتی (روی خط)، راهنمایی کردیم. این تجربه یک موفقیت بود و سال بعد بخش بترمع - آمریکا^{۵۵} را برای سیزده دانش آموز گسترش دادیم، که دو نفر از آنها تحت راهنمایی یک عضو هیأت علمی از دانشگاه ایلینویز در پردیس اوربانا^{۵۶} بودند. امسال تعداد دانش آموزان خارج از ایالت به پانزده تن رسید، و برای اینکه به خواسته مان برسیم با اعضای هیأت علمی از دانشگاه های متعدد از جمله کنی^{۵۷} و سنی^{۵۸} در استونی بروک^{۵۹} همکاری می کنیم.

بخش بترمع آمریکا نه فقط موقعیت های تحقیقاتی برای دانش آموزان مستعد ریاضی در سراسر کشور فراهم می سازد، بلکه آزمایشگاهی برای آزمایش روش های جدید در مورد رهبری های تحقیقاتی از راه دور نیز هست و همچنین کمک می کند تا بترمع به دیگر دانشگاه ها در ایالات متحده و فراتر از آن هم گسترش یابد. هم اکنون، برنامه ریزی برای تشکیل بخشی از بترمع در اروپا در جریان است.

⁵⁵ PRIMES-USA ⁵⁶ University of Illinois at Urbana-Champaign ⁵⁷ CUNY ⁵⁸ SUNY ⁵⁹ Stony-Brook

P.E.: و، بله، در حال حاضر بترمع در خارج از کشور هم در حال تشکیل شدن است. ابتداءً، رهبر حساس برنامه‌مان مایل نبود، ولی او را متقاعد کردم که پیش برود. ولی ممکن است دانش‌آموزان دبیرستانی غیربومی (خارجی) وجود داشته باشند که بیش از استادان دانشگاه صنعتی ماساچوست MIT ریاضی بدانند. بنابراین، من تلاش برای اثبات فرضیه ریمان تحت راهنمایی یک مربی دبیرستانی از آن‌سر راه شیری را پیشنهاد می‌کنم.

آیا صلاح است یک دانش‌آموز ریاضی به این زودی تحقیق را شروع کند؟ آیا بهتر نیست وقت بیشتری صرف کند تا ریاضیات پیشرفته‌تری بخواند و یاد بگیرد؟

P.E.: در بسیاری موارد بله، بهتر است. خواندن متون ریاضی و یادگیری، قسمت‌های اساسی زندگی حرفه‌ای هر ریاضیدانی است. اینها نکات کلیدی مهم در تمام سنین می‌باشد. در حقیقت، یکی از بزرگترین ریاضیدانان قرن بیستم، آی. ام. گلفاند^{۶۰}، در نودمین جشن تولدش گفت: «من یک دانشجوی ریاضی هستم».

این یک واقعیت است که یادگیری برای دانش‌آموزان بسیار حیاتی است. برای بسیاری از دانش‌آموزان، مطالعه هدایت شده بسیار جذاب‌تر و مفیدتر از وارد شدن آنی به تحقیق می‌باشد. ما متقاضیان بترمع را به دقت ارزیابی کرده و تحقیق را تنها برای آنهایی توصیه می‌کنیم که آماده باشند. برای بیشتر دانش‌آموزان جوان‌تر گروه‌های ۲-۳ نفره تشکیل می‌دهیم تا یک کتاب سطح بالای ریاضی را همراه با یک مربی مطالعه کنند. تخصیص دادن سال اول بترمع به امر مطالعه هدایت شده، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا در سال‌های بعدی پایه‌ای برای حمله به مسائل تحقیقاتی بسازند.

پروژه‌های بترمع همچنین به شیوه‌ای طراحی شده‌اند که مطالعه ریاضیات پیشرفته‌تری را طلب می‌کنند. قبل از اینکه پروژه شروع شود، دانش‌آموزان یک ماه را به مطالعه پیش‌زمینه‌ها می‌پردازند و این مطالعات را همراه با تحقیقات نیز ادامه می‌دهند. یک مسئله تحقیقاتی، انگیزه شدید و علاقه‌مندی به یادگیری زمینه‌های جدیدی از ریاضیات را سبب می‌شود.

S.G.: ما گروه‌های مطالعه را به حرفه‌ای‌ترها که قبل از رفتن به کالج فقط یک نیم سال را در بترمع گذرانده‌اند نیز توصیه می‌کنیم. پس از انجام یک پروژه تحقیقاتی (در سطح) پایین‌تر، دانش‌آموزان بترمع اغلب در گروه‌های مطالعه می‌مانند تا دانش ریاضی خود را گسترش دهند. ما آنها را تشویق می‌کنیم تا زمینه‌های ماورای موضوع تحقیقاتی خودشان را بشناسند. امسال، چهل درصد از دانش‌آموزان محلی بترمع در گروه‌های مطالعه هستند، حال آنکه شصت درصد آنها روی پروژه‌های تحقیقاتی کار می‌کنند.

برنامه زمانبندی شما چگونه است؟ آیا یک سال کامل خیلی طولانی نیست؟ آیا دانش‌آموزان بترمع اصلاً زندگی می‌کنند؟

P.E.: یک سال خیلی هم کوتاه است! همگی می‌دانیم که ماه‌ها و گاهی سال‌ها طول می‌کشد تا یک قضیه خوب ثابت شود یا یک مقاله خوب نوشته شود و در تمام این مدت همزمان با انجام ریاضی زندگی هم می‌کنید! یک ریاضیدان مشهور گفت که برای رسیدن به یک قضیه که دارای ارزش باشد، می‌بایستی برای حداقل چندین هفته بی‌خوابی بکشی. این چیزی است که سعی کرده‌ام به همسرم بفهمانم، و می‌پذیرم که در این راه موفقیت چندانی نداشته‌ام.

S.G.: دوره بترمع یک سال تقویمی (دوازده ماه) طول می‌کشد.

ماه ژانویه دوره مطالعه است: مربی‌ها به دانش‌آموزان خود از طریق پست الکترونیک یا اسکایپ (Skype) منابع پیش‌زمینه و تمرین می‌دهند. در اول فوریه همه دانش‌آموزان محلی و والدین آنها را برای یک دیدار کاری دعوت می‌کنیم، که در این دیدار دانش‌آموزان مربیان خود را ملاقات کرده و با سایر دانش‌آموزان آشنا می‌شوند. در این گردهم‌آیی، پاول^{۶۱} نکاتی را در مورد تحقیق در ریاضی برای حضار بیان می‌دارد که در وب سایت بترمع هم قابل دسترسی است.

⁶⁰ I. M. Gelfand ⁶¹ Pavel

P.E.: این یک سخنرانی واقعاً مهیج است، به‌ویژه برای دانش‌آموزان بعدی (با این فرض که نکات مذکور از سالی به سال دیگر تغییر نمی‌کند، زیرا آنها همیشه با ارزشند).

S.G.: ترم بهاره دوره فعالیت تحقیقاتی است. دانش‌آموزان و مربیان به طور هفتگی ملاقات کرده، پیشرفت‌ها را مورد بحث قرار می‌دهند و اهداف برنامه‌های هفته بعد را مشخص می‌کنند. ملاقات‌ها معمولاً یک ساعت و نیم طول می‌کشد، ولی از آنجایی‌که دانش‌آموزان و مربیان درباره ایده‌های جدید هیجان زده می‌شوند، این بحث‌ها بیشتر هم به طول می‌انجامد. دانش‌آموزان تشویق می‌شوند تا بین هفته‌ها یا هر زمانی که برایشان سؤال پیش آید یا گیری داشته باشند، از طریق پست الکترونیک با مربیان‌شان تماس بگیرند.

T.K.: در این دوره، متناوباً پروژه‌ها را بازبینی کرده، و اگر لازم باشد، تغییراتی را پیشنهاد می‌دهم.

S.G.: دوره فعالیت تحقیقاتی با ارائه در یک کنفرانس بترمع سالانه که در آخرین تعطیلات آخر هفته قبل از روز قربانیان جنگ ۶۲ در MIT برگزار می‌شود، به اوج خود می‌رسد (شکل‌های ۱ و ۳ را ببینید). قبل از کنفرانس، دانش‌آموزان گزارشی تحقیقاتی تهیه می‌کنند، که شامل مقدمات، نتایج قبلی، بیان مسئله، و نتایج جدید می‌باشد. از آنجا که کنفرانس در وسط دوره سالیانه برگزار می‌شود، دانش‌آموزان تحقیقات جاری خود را معرفی می‌کنند. آنها بازخوردهایی که در کنفرانس به دست آورده‌اند را در کارهای آینده خودشان به کار می‌برند. کنفرانس، با سخنرانی‌هایی درباره ریاضیات، علوم، کامپیوتر، و زیست‌شناسی محاسباتی در حضور حضار فعالی که شامل دانشجویان فارغ‌التحصیل، پسادکتر و اعضاء هیأت علمی می‌باشد، دو روز طول می‌کشد. دانش‌آموزان بترمع، و خانواده‌ها، که بسیاری از آنها محققین دانشگاهی یا صنعت هستند، نیز دعوت شده‌اند؛ آنها اغلب سؤالات جالبی می‌پرسند و کنفرانس را به پایان می‌برند در حالیکه کاملاً تحت تاثیر قرار گرفته‌اند.



شکل ۳: پاول اتینگوف و تانیا خوانووا همراه با شرکت‌کنندگان کنفرانس ۲۰۱۳.

تعطیلات تابستانه دوره فعال مطالعه مستقل است. دانش‌آموزان و مربیان برنامه‌ریزی می‌کنند تا وقتی در شهر هستند با یکدیگر ملاقات کنند، و وقتی از هم دورند با پست الکترونیک با هم تماس بگیرند یا هنگامی که هوا مناسب باشد کنار دریا رفته استراحت کنند. ما همچنین دانش‌آموزان بترمع را تشویق می‌کنیم تا از موقعیت‌های دیگری استفاده کنند، مثل شرکت در یک اردوی ریاضی تابستانه، که باعث گسترش دانش آنها می‌شود و تنها برای اینکه تازه نفس، در پاییز به تحقیق باز گردند، موقتاً (برای استراحتی کوتاه) از پروژه خود فاصله بگیرند.

پاییز دوره نوشتن است. دانش‌آموزان لازم است با مربیان‌شان ملاقات کنند، تا پروژه‌شان را نهایی کرده، یک مقاله نوشته، و نتایج خود را خلاصه کنند. این زمانی است، که در آن می‌توانیم به دانش‌آموزانمان بیاموزیم که ریاضی بنویسند، که یکی از اهداف مهم بترمع می‌باشد. بسیاری از مقالات بترمع به مسابقات ملی علوم و بخش پوسترهای دانشجویان دوره کارشناسی MAA-AMS در کنفرانس مشترک ژانویه ارسال می‌گردد.

T.K.: گاه‌ها در پایان پروژه دانش‌آموز و مربی با یک حدس زیبای بزرگ مواجه می‌شوند که نتایج آنها را تعمیم می‌دهد. این حدس مثل ستاره‌ای است که جلو آنها می‌درخشد. وقتی سال بترمع تمام می‌شود، آنها نمی‌توانند توقف کنند و به کارشان ادامه می‌دهند تا حدس را ثابت کنند.

آیا دانش‌آموزان می‌توانند برای دومین سال بمانند؟

S.G.: بله، هر سال تعدادی از دانش‌آموزان برای سالی دیگر می‌مانند. این به دانش‌آموزان جوان‌تر اجازه می‌دهد تا به عنوان محقق پرورش یابند.

یک مثال: بیل کوزمائول^{۶۳} چهار سال در بترمع بود. پس از ورودش در بترمع که دانش‌آموز کلاس نهم بود، دو مقاله مشترک در سال‌های اول و دوم، یک پروژه مستقل در سال سوم، و یک گروه مطالعه در سال چهارم داشت. بیل، چهار مقاله تألیف کرد که به arxiv.org فرستاد (دو تا از آنها در مجله جبر^{۶۴} و مجله الکترونیکی^{۶۵} ترکیبایی چاپ شد)، فینالیست محلی زیمنس ۲۰۱۱ و ۲۰۱۲ و Davids Fellow ۲۰۱۳، و برنده سومین جایزه Intel STS ۲۰۱۴ بود. او اکنون دانشجوی سال دوم استانفورد است.

P.E.: در حقیقت علاوه بر اثبات قضایای متعدد، بیل یک لغت انگلیسی تازه معرفی کرد. در معرفی خود نوشت: "احساس عجیبی داشتم وقتی در روزهای پایانی نوشتن مقاله بودم، در این احساس فرورفتم و می‌خواستم همه چیز زندگی را کنار بگذارم و در باقیمانده آن روز آواز بترمع^{۶۶} بخوانم."

آیا تحقیق ریاضی در دبیرستان و در خارج از بترمع هم امکان‌پذیر است؟

P.E.: حتماً. یک هدف آن است که دانش‌آموزان خودشان کار کنند و مربیان فعال در تحقیق آنها را سرپرستی کنند. همچنین، برنامه‌های تابستانی چنین موقعیت‌هایی را ارائه می‌دهند: RSI (برای پروژه‌های تک نفره)، PROMYS، پردیس ریاضی کانادا-آمریکا^{۶۷}، و غیره (برای پروژه‌های گروهی).

اگر بشنوید که رقیب دارید، آیا هدف‌تان کنار گذاشتن آنها است؟

P.E.: در حقیقت، هدف ما آن است که هر تعدادی از آنها را که ممکن باشد وارد کار کنیم، و به همین دلیل است که به این سؤالات در اینجا پاسخ می‌دهیم. هر سال مجبوریم به تعدادی از متقاضیان قوی جواب رد بدهیم، که حیف است. امیدواریم که به زودی موقعیت‌های بیشتری همانند بترمع ایجاد شوند: این دانش‌آموزان می‌بایست برای رسیدن به آرزوهایشان شانس داشته باشند!

برنامه‌های شما چقدر متفاوت از *ROSS, Canada-USA Math Camp, PROMYS, RSI*، و سایر برنامه‌های تابستانی است؟ کدامیک را فرزند من باید انتخاب کند؟

S.G.: تفاوت اساسی در آن است که برنامه‌های تابستانی در چند هفته فشرده شده‌اند، حال آنکه بترمع برای تمامی سال در جریان است. این امر اجازه می‌دهد که تحقیق به یک روال طبیعی، با زمان کافی برای آزمون و خطا، یادگیری پیش‌زمینه‌های بیشتر، و نوشتن یک متن با جزئیات بر اساس استانداردهای فنی، انجام گیرد.

T.K.: یکی چند هفته کافی نیست. بهترین ایده‌های من زیر دوش به ذهنم می‌آیند. قادر نخواهم بود که تحقیقی را در یک برنامه تابستانی تمام کنم، زیرا بحد کافی دوش وجود ندارد!

⁶³ Bill Kuszmaul ⁶⁴ Journal of Algebra ⁶⁵ Electronix Journal of combenatorics ⁶⁶ Primesing ⁶⁷ Canada-U.S.A math Camp

P.E.: دقیقاً. و به اندازه کافی آب گرم در یک آبگرمکن وجود ندارد. همسرم گله‌مند است که آب گرم برای هیچ‌کس دیگر باقی نمی‌گذارم، و این گران و خیلی غیر بهداشتی است. شاید می‌بایست راهی پیدا کنم تا بین نیازهای فامیل و زیست محیطی با نیاز انجام ریاضیات خوب توازنی برقرار کنم!

S.G.: خوب. مثال ارشمیدس به وضوح نشان می‌دهد که یک حمام، در حالی که کمترین ضایعات را دارد، می‌تواند به همان اندازه برای یک ریاضیدان محرک باشد.

اما مسائل حمام به کنار، برنامه‌های تابستانی به دانش‌آموزان تجربه‌ای عالی می‌دهد. آنها دوره‌های کوتاه مدت متعددی را انتخاب می‌کنند و با دامنه وسیعی از عناوین ریاضی آشنا می‌شوند، که برای تحقیقات آینده آنها مفیدند و فرزند شما در واقع نیازی ندارد که انتخاب کند! بترمع برنامه انعطاف‌پذیری در تابستان دارد، که به دانش‌آموزان ما اجازه حضور در برنامه‌های تابستانی را می‌دهد، و ما شدیداً آنها را به انجام این کار تشویق می‌کنیم، زیرا این دو تجربه یکدیگر را تقویت می‌کنند. برای مثال دانش‌آموزان بترمع که در RSI حضور می‌یابند اغلب روی پروژه‌های مربوط به بترمع‌شان کار می‌کنند، که تأثیر هر دو برنامه را تشدید کرده و اغلب مقاله‌های نهایی بسیار قوی‌تر نتیجه آن است.

چگونه موفقیت‌ها را ارزیابی می‌کنید؟

S.G.: هر ساله دانش‌آموزان بترمع جوایز متعددی در مسابقات ملی علوم از جمله در مسابقاتی با سطح علمی خیلی بالا کسب می‌کنند. برای مثال، در چهار سال، بترمع مدعی دریافت بیست و چهار Siemens و پانزده جایزه نهایی Intel STS بوده است. جوایز اول و دوم در زمیمنس ۲۰۱۴ و نیز جوایز اول و دوم و سوم برای تحقیقات بنیادی در Intel STS ۲۰۱۵ به بترمع تعلق گرفت. مهم‌تر از آنها انتشارات است: دانش‌آموزان ما هفتاد و یک مقاله نوشتند، که چهل عدد از آنها را به arxiv.org فرستادند، و پانزده عدد را در مجلات دانشگاهی با سطح علمی بالا چاپ کردند. محک دیگر، ورود به دانشگاه‌ها است: در حقیقت، همه فارغ‌التحصیلان ما به دانشگاه‌های سطح بالا می‌روند و آنها جزء بهترین دانشجویان هستند. بالاخره، در دو سال اخیر تعداد تقاضاها در بترمع سه برابر شده است. ولی بالاتر از همه اینها، ما احساس می‌کنیم که به هدفمان رسیده‌ایم و آن زمان‌بست که دانش‌آموزان ما مزه تحقیق در ریاضی را چشیده و عاشق ریاضی شده باشند.

T.K.: وقتی که این بچه‌ها رشد کردند، ظرف چند سال، معیار نهایی موفقیت مشخص می‌شود. آنها شگفت‌آورند! من افتخار می‌کنم که با بهترین ریاضیدانان نسل آینده کار می‌کنم.

آیا هدف شما کسب بیشترین تعداد جایزه است؟

P.E.: نه واقعاً. به دانش‌آموزانمان می‌گوئیم که خیلی روی برنده‌شدن در مسابقات تمرکز نکنند و توضیح می‌دهیم که تحقیقات ریاضی بیشتر جنبه همکاری دارد تا مسابقه (بیشتر رفاقتی است تا رقابتی). ولی رقابت‌ها به عنوان یک عامل انگیزشی و تنظیم برنامه مفیدند. لازم است آنها مقاله‌ای بنویسند که در فاصله زمانی معینی توسط داوران خوانده شود، و این، مؤثر خواهد بود. همچنین مسابقات Siemens و Intel STS در برنامه‌ریزی فعالیت‌های فینالیست‌ها بسیار مؤثر است. فینالیست‌ها با یکدیگر ملاقات کرده و کارشان را با داورهای مجرب مورد بحث قرار می‌دهند. بعضی از داوران محققان حرفه‌ای سطح بالا در زمینه پروژه‌های خود می‌باشند. همچنین فینالیست‌ها مطالب فراوانی از یکدیگر یاد می‌گیرند. و نکته آخر که کم اهمیت هم نیست، آنها خیلی خوش می‌گذرانند!

آیا انتظار دارید که تمامی دانش‌آموزان ریاضی بترمع محققان ریاضی شوند؟ اگر چنین نشود آیا این را به عنوان یک شکست در نظر می‌گیرید؟

T.K.: نه الزاماً. ممکن است بعضی از آنها بخواهند علوم کامپیوتر، حقوق، تجارت، پزشکی و دیگر رشته‌ها را بخوانند. آنها پیش ما آمده‌اند تا استعدادشان را امتحان کنند و سعی کنند ببینند تحقیق ریاضی چگونه است، و صرف‌نظر از اینکه چه مسیری را انتخاب می‌کنند این تجربه برایشان با ارزش می‌باشد. مواردی داشته‌ایم که در آنها دانش‌آموزان آنقدر از تحقیق ریاضی لذت می‌بردند که برنامه زندگی‌شان را عوض کرده و تصمیم گرفته‌اند ریاضیدان شوند و دانش‌آموزانی داشته‌ایم که متوجه شده‌اند نمی‌خواهند ریاضیدان شوند. آنها هدیه‌ای برای ریاضی دارند ولی قلبشان آنجا نیست. و خیلی مفید است که قبل از رفتن به دانشگاه متوجه این امر بشوند.

لذا اطمینان حاصل کردن از اینکه کسی می‌خواهد ریاضیدان شود، الزام برنامه ما نیست. کاوش عاقلانه و خواهان شکوفاشدن بسیار بسیار مهم هستند.

در راستای گسترش جامعه ریاضی چه می‌کنید؟

S.G.: در سال ۲۰۱۳، حلقه بترمع که یک برنامه غنی ریاضی برای دانش‌آموزان کوشای سال دومی و سال اولی از دبیرستان عمومی اوربان است را تشکیل دادیم. با کار در گروه‌های کوچک تحت راهنمایی دانشجویان سال اول MIT، شرکت‌کنندگان در حلقه بترمع زیبایی‌های تفکر ریاضی و لذت حل یک مسئله مطرح را کشف کردند. دانش‌آموزان حلقه مباحث سطح بالا در هندسه، احتمال، ترکیبیات، نظریه گروه‌ها، و غیره را مورد مطالعه قرار می‌دهند؛ مقاله‌های توصیفی تهیه کرده، آنها را در کنفرانس‌های کوچک در MIT ارائه می‌کنند. حلقه بترمع از هشت دانش‌آموز در ۲۰۱۳ به پانزده تن در ۲۰۱۵ گسترش یافت. از بین حلقه دانش‌آموزان فعلی ۶۰ درصد دختر و ۲۷ درصد از آمریکای لاتین، و ۱۳ درصد آفریقایی-آمریکایی هستند (شکل ۴ را ببینید).



شکل ۴: کنفرانس حلقه بترمع ۲۰۱۳: دانش‌آموزان حلقه بترمع اوموتوپوسی اویدجی و تیریک سیلوا در حال سخنرانی درباره نظریه احتمال.

در سال ۲۰۱۵، بخش جدیدی به نام Math ROOTS را تشکیل دادیم که یک اردوی تابستانه دوازده روزه به میزبانی MIT برای دانش‌آموزان دبیرستانی متعهد انتخاب شده در سطح کشور با پیش زمینه‌های مدنظر و علاقه‌مند به تجربه‌های خلاق ریاضی است. در این بخش، دانش‌آموزان ایده‌های ریاضی جدیدی کشف می‌کنند و از طریق یک سری کلاس‌ها، فعالیت‌های گروهی و دعوت از سخنرانان، مهارت حل مسئله را یاد می‌گیرند. این سخنرانان توسط تیمی با تجارب مختلف که هم تحقیقات ریاضی انجام می‌دهند و هم مسابقات ریاضی برگزار می‌کنند رهبری می‌شوند.

هدف حلقه بترمع و Math ROOTS، گسترش جامعه ریاضی با یاری رساندن به دانش‌آموزان قوی با پیش زمینه‌های معین و گسترش علاقه‌شان به ریاضی و گماردن آنان در مسیر رشته‌ای ریاضی محور در دانشگاه است.

آیا دانش‌آموزان از برنامه شما لذت می‌برند؟

S.G.: هر ساله نظرات دانش‌آموزان درباره برنامه را جمع‌آوری و به وب سایت بترمع در صفحه «معرفی‌نامه» می‌فرستیم. در ذیل دو نمونه از این نظرات را می‌آوریم:

”در شروع برنامه بترمع در ژانویه سال گذشته، تا حدی مضطرب بودم که نکند قادر به کشف مطلب جدیدی نشوم. ولی چنین نگرانی‌ها مطمئناً بی‌مورد بود. طی چند ملاقات اول، مربی‌ام برای من و همکارم پیش‌زمینه‌های لازم را فراهم کرد تا با روش‌های عمومی آشنا شویم. به فاصله دو ماه، برخی از حدس‌های خودمان را بر اساس شبیه‌سازی‌های کامپیوتری فرموله کردیم، و چندی نگذشت که حتی قادر به ارائه اثبات‌هایی برای برخی از این حدس‌ها شدیم.“



شکل ۵: دانش‌آموزان Math ROOTS: (چپ به راست) جوسوسیکان، بن بنیگتون- برندن، تراجان هموندز، آددین اوترو- اوقبجی .

”احساس نشست و فکر کردن درباره مسائل، بدون این که چیزی در ذهن داشته باشیم را دوست داشتم. این موقعیتی بدون نگرانی بود و من اینجا شکوفا شدم. بترمع یک برنامه عالی است- این روشی فوق العاده برای شروع تحقیق در سنین جوانی، با کمک متخصصینی که باور نکردنی می‌باشند و مربیانی که عاشق ریاضی و علمی هستند که شما مشغول انجامشان هستید و به شما کمک می‌کنند تا بیشتر و بیشتر یاد بگیرید، می‌باشد. خیلی خوشحالم که اراده کردم که به بترمع بپیام، و این واقعاً زندگی مرا به عنوان یک دانش‌آموز و یک ریاضیدان عوض کرده است.“

T.K.: بسیاری از دبیرستان‌ها نگران دانش‌آموزانی هستند که رد می‌شوند و نگران دانش‌آموزان باهوشی نیستند که خسته و بی‌حوصله می‌شوند. در برنامه ما هیچ‌کس خسته و بی‌حوصله نمی‌شود.

S.G.: نه حتی رهبر برنامه! بترمع از بدو شروعش چهار برابر شده است و هم‌اکنون به راستی بیش از یکصد همراه دارد. امور اجرایی و برنامه‌ریزی آن، به همان اندازه پروژه‌هایش چالش‌زاست.

چه کسی هزینه بترمع را پرداخت می‌کند؟

S.G.: بترمع برای دانش‌آموزان مجانی است، و به همین دلیل است که برای MIT اصلاً مجانی نیست. اما افراد خیر دارای قلب‌های بزرگ برای آن هزینه می‌کنند. بزرگترین قلب‌ها متعلق به گروه علوم ریاضی NSF و گروه ریاضی MIT (شخصاً، مدیر قبلی آن مایک سیپسر^{۶۸}، که اکنون رئیس دانشکده است، و مدیر فعلی آن، تام مروکا^{۶۹}) می‌باشد که از بدو ایجاد بترمع حمایت‌های جدی نموده‌اند. NIH، مؤسسه ریاضی کلی^{۷۰}، بنیاد سیمونز^{۷۱}، بنیاد روزنباوم^{۷۲}، بعضی شرکتها و مؤسسات خیریه خصوصی نیز کمک‌های خوبی کرده‌اند. قابل توجه است که، جرج لوزتیک^{۷۳}، پروفیسور ریاضی در MIT و برنده جایزه ۲۰۱۴ شاول^{۷۴} در ریاضی، به عنوان اولین حامی، قسمتی از جایزه خود را به بترمع تخصیص داد. این

⁶⁸ Mike Sipser ⁶⁹ Tom Mrowka ⁷⁰ Clay Mathematics Institute Golowich ⁷¹ Simons Foundation ⁷² Rosenbaum Foundation

⁷³ George Lusztig ⁷⁴ Shaw

امر مربی‌گری جرج لوزتیک در بترمع را به دنبال داشت. هرساله تعداد زیادی از این نوع مربی‌گری اهدا می‌شود تا مسئله مربی‌گری خارق‌العاده سال‌های گذشته ادامه یابد.

P.E.: در حقیقت، مادامی که همگی ما فعالانه درباره ریاضی فکر می‌کنیم، رهبری برنامه‌مان می‌بایست سرسختانه در این مورد بیندیشد که چگونه افراد بیشتری با قلب‌های بزرگ پیدا کند و او مطمئناً کمک شما را قدردان خواهد بود!

عنوان یکی از مقالات تحقیقی بترمع « غول شیرینی عروسکی مشغول بازی است^{۷۵} » می‌باشد. آیا این یک مقاله جدی ریاضی است یا واقعاً درباره شیرینی عروسکی است؟ آیا برای تحقیق خود، شیرینی عروسکی آماده می‌کنید؟ T.K.: این کاملاً جدی است! غول عروسکی (شکل ۶) تنها یک روش سرگرم‌کننده برای معرفی رده خاصی از مسائل ترکیبیاتی است. به این معنی که تعداد زیادی پارچ و شیرینی عروسکی وجود دارند. غول عروسکی مجاز است در یک حرکت برخی پارچ‌ها را انتخاب کرده و تعداد یکسانی از شیرینی‌های همه آنها بردارد. این سؤال که «با مفروض بودن تعداد شیرینی‌ها در پارچ‌ها، کمترین تعداد حرکات لازم برای تخلیه همه پارچ‌ها چند تا است؟» توسط لیخ ماری براسول^{۷۶}، دانش‌آموز بترمع سال ۲۰۱۳ مورد مطالعه قرار گرفت ([۲]؛ [۳]: شکل ۶ را ببینید). همراه با دانش‌آموز دیگری، جوشوا کسیونک^{۷۷} (بترمع ۲۰۱۴)، مسئله غول عروسکی را به یک بازی تبدیل کرده و کشفیات جالبی کردیم [۱۴].



شکل ۶: دانش‌آموز بترمع لیخ ماری براسول با غول شیرینی عروسکی (کنفرانس بترمع سال ۲۰۱۳).

P.E.: پس از شرکت در کنفرانسمان، استاد ریاضی MIT ریچارد استانی^{۷۸} مشاهده کرد که نوع خاصی از غول عروسکی (آن که شیرینی‌ها را فقط از پارچ‌های متوالی می‌خورد) متناظر با ترکیبیاتی از دستگاه ریشه‌های^{۷۹} A_{n-1} مربوط به جبرلی ساده $sl(n)$ است. در حقیقت، شایع شده بود که این نوع عروسک اساساً به درخواست خود من در گروه بیولوژی MIT طراحی شده بود تا دانش‌آموزان را به یادگیری جبرلی تشویق کند!

S.G.: گرچه تحقیق غول عروسکی واقعاً نیازی به عروسک‌ها ندارد، آنها را در طی کنفرانس سالانه بترمع در ماه می، که حضور شما را در آن خوش‌آمد می‌گوئیم، آماده می‌کنیم. در حقیقت، پاول^{۸۰} هر ساله، شب قبل از کنفرانس با ماشین به کستکو^{۸۱} می‌رود و ون^{۸۲} خود را برای شرکت‌کنندگان پر از شیرینی عروسکی می‌کند. این موجب می‌شود تا همگی ما از داشتن انواع مختلفی از شیرینی خوشمزه لذت ببریم. آنها به عنوان کاتالیزری در تبدیل قهوه به قضیه عمل می‌کنند!

⁷⁵ Cookie monster plays Games ⁷⁶ Leigh Marie Braswell ⁷⁷ Joshua Xiong ⁷⁸ Richard Stanley ⁷⁹ Root systems ⁸⁰ Pavel Costco ⁸¹ Van

مراجع

- [1] S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W. Kuszmaul and J. Li, Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields, *J. Algebra*, **372** (2012) 251–274.
- [2] L. M. Braswell and T. Khovanova, On the Cookie Monster Problem, <http://arXiv:1309.5985>.
- [3] L. M. Braswell and T. Khovanova, Cookie Monster devours Naccis, *College Math. J.*, **45** no. 2 (2014) 129–135.
- [4] Y. Chen, P. Etingof, D. Jordan and M. Zhang, Poisson traces in positive characteristic, <http://arXiv:1112.6385>.
- [5] C. Chen, Maximizing volume ratios for shadow covering by tetrahedra, <http://arXiv:1201.2580>.
- [6] C. Chen, T. Khovanova and D. A. Klain, Volume bounds for shadow covering, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **366** no. 3 (2014) 1161–1177.
- [7] S. Devadas and S. Sam, Representations of rational Cherednik algebras of $G(m, r, n)$ in positive characteristic, *J. Commut. Algebra*, **6** no. 4 (2014) 525–559.
- [8] F. Ding and A. Tsymbaliuk, Representations of infinitesimal Cherednik algebras, *Represent. Theory*, **17** (2013) 557–583.
- [9] C. Lian, Representations of Cherednik algebras associated to symmetric and dihedral groups in positive characteristic, arXiv:1207.0182.
- [10] Yael Fregier and Isaac Xia, Lower Central Series Ideal Quotients Over F_p and Z , <http://arXiv:1506.08469>.
- [11] N. Golowich, Resolving a Conjecture on degree of regularity of linear homogeneous equations, *Electro. J. Combin.* **21** (2014), no. 3.
- [12] R. Jagadeesan, A new $\text{Gal}(\)$ -invariant of dessins d'enfants, <http://arXiv:1403.7690>.
- [13] Shashwat Kishore and Augustus Lonergan, Signatures of Multiplicity Spaces in tensor products of sf_2 and $\text{Uq}(\text{sf}_2)$. Representations, arXiv:1506.02680.
- [14] T. Khovanova and J. Xiong, Cookie Monster plays games, arXiv:1407.1533.
- [15] T.-Y. Jiang, Z. Scully and Y. X. Zhang, Motors and impossible firing patterns in the parallel chipfiring game, *SIAM J. Discrete Math.*, **29** (2015) 615–630.
- [16] J. Zurier, Generalizations of the Joints Problem, math.mit.edu/research/highschool/primes/materials/2014/Zurier.pdf

علی اکبر محمدی حسن آبادی

اصفهان، بهارستان، خیابان فرشته، دانشگاه شیخ بهایی

aamohaha@yahoo.com

دکتری ریاضی (گرایش نظریه گروه‌ها) از دانشگاه ویلز انگلستان سال ۱۳۵۵. عضو هیات علمی دانشگاه شیخ بهایی اصفهان.



فیروزه محمدی حسن آبادی

اصفهان، بهارستان، خیابان فرشته، دانشگاه شیخ بهایی

arsh_kebriya15@yahoo.com

کارشناسی ارشد مترجمی زبان انگلیسی از دانشگاه اصفهان سال ۱۳۹۰. مدرس دانشگاه شیخ بهایی اصفهان

