

k -جبرهای متناهی نمایش و C^∞ -حلقه‌های متناهی مولد

زینب خان جانزاده و * علی معدنشقاف

چکیده. در این مقاله ابتدا به تبیین سیر تاریخی پیدایش توپولوژی زاریسکی روی حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها با ضرایب مختلط می‌پردازیم. سپس، برای حلقه‌ی جابجایی و یکدار مفروض k ، قصد داریم یکی از ساختارهای موجود روی دوگان رسته k -جبرهای متناهی نمایش را که می‌تواند به روش مشابهی به رسته $\mathbb{A}$ ، یعنی دوگان رسته‌ی همه‌ی C^∞ -حلقه‌های متناهی مولد، تعمیم داده شود معرفی کنیم. آن سایت زاریسکی است.

۱. مقدمه

هندسه جبری، مطالعه‌ی هندسه‌هایی است که از جبر، به ویژه از حلقه‌ها، می‌آیند. در هندسه جبری کلاسیک، جبر همان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها و هندسه، مجموعه‌ی صفرهای چندجمله‌ای‌ها می‌باشد که یک چندگونای جبری نامیده می‌شود. به عنوان نمونه، دایره واحد، مجموعه‌ی صفرهای چندجمله‌ای $1 - x^2 - y^2$ است که یک چندگونای جبری است، همین گونه، همه مقاطع مخروطی چنین هستند. به طور کلاسیک، یک چندگونای جبری به عنوان مجموعه‌ای از جواب‌های یک دستگاه از معادلات چندجمله‌ای روی اعداد حقیقی یا اعداد مختلط تعریف می‌شود. تعاریف مدرن از یک چندگونای جبری، این مفهوم را به چندین روش متفاوت تعمیم می‌دهند، حال آنکه هرکدام تلاش می‌کنند تا شهود هندسی ورای تعریف اولیه محفوظ بماند. یک مجموعه جبری مکان هندسی صفرهای یک گردایه از چندجمله‌ای‌ها می‌باشد. در حالت کلی، یک مجموعه جبری را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از چندگونای‌های جبری نوشت.

در سال ۱۹۵۲ میلادی یک ریاضیدان اهل کشور بلاروس به نام اسکار زاریسکی [۱۳]، یک توپولوژی روی یک چندگونای جبری دلخواه، را با گرفتن زیرمجموعه‌های جبری آن به عنوان مجموعه‌های بسته، معرفی کرد که اکنون به توپولوژی زاریسکی مرسوم است. از آنجایی که توپولوژی زاریسکی دارای تعداد مجموعه‌های باز بسیار کمتری از توپولوژی متریک معمولی می‌باشد، لذا این توپولوژی برای مطالعه‌ی معادلات چندجمله‌ای در هندسه جبری بسیار مناسب است [۱۱]. در هندسه جبری کلاسیک، توپولوژی زاریسکی برای چندگوناهای تصویری و آفین تعریف می‌شود [۱۰]. دقیقاً به عنوان موضوعی که خودش به مطالعه‌ی چندگوناهای تصویری و آفین تقسیم می‌شود، توپولوژی زاریسکی کمی متفاوت برای این دو، تعریف شده است. در اینجا فرض می‌کنیم که روی یک میدان جبری بسته ثابت k کار می‌کنیم، که در هندسه کلاسیک تقریباً همیشه اعداد مختلط می‌باشد.

عبارات و کلمات کلیدی. توپولوژی زاریسکی، k -جبر متناهی نمایش، C^∞ -حلقه‌ی متناهی مولد، توپولوژی گروتندیک روی یک رسته، سایت زاریسکی.

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۵/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۰/۱۵

در سال ۱۹۶۰ میلادی گروتندیک^۱ از تناظر بین نقاط یک چندگونا آفین و ایدال‌های ماکسیمال از حلقه مختصاتی^۲ آن استفاده کرد تا توپولوژی زاریسکی را به مجموعه‌ی ایدال‌های اول از یک حلقه‌ی جابجایی دلخواه تعمیم دهد. گروتندیک، اسکیم‌ها^۳ را به عنوان اشیای هندسی پایه‌ای تعریف کرد که رابطه یکسانی با هندسه‌ی یک حلقه بعنوان یک منیفلد با یک چارت مختصاتی دارد [۴]. زبان نظریه‌ی رسته‌ای در گرویدارده همان زمان، در پاسخ به نیازهای گسترده انتزاع در هندسه جبری، تکامل قابل ملاحظه‌ای یافت.

لازم به ذکر است که توپولوژی زاریسکی برای حلقه‌های ناجابجایی و حتی برای مدول‌ها به چندین روش تعمیم داده شده اند و مقالات زیادی در این رابطه وجود دارد.

در سرتاسر این مقاله همه حلقه‌ها جابجایی و یکدار فرض می‌شوند. نمادهای $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ به ترتیب نشان دهنده مجموعه اعداد حقیقی و مختلط می‌باشند. برای رسته مفروض C ، رسته دوگان آن را با C^{op} نشان می‌دهیم. همچنین رسته مجموعه‌ها و توابع بین آنها را طبق معمول با **Sets** نشان می‌دهیم. می‌دانیم که از هر مجموعه جزئی مرتب $(P, \leq)$ ، می‌توان یک رسته ساخت، بدین صورت که اشیای این رسته، همان اعضای مجموعه P بوده و برای هر x و y در P ، ریخت یکتای $f: x \rightarrow y$ در این رسته موجود است اگر و تنها اگر $x \leq y$. به عنوان مثال برای هر فضای توپولوژیک X ، گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌های باز در X را که با $\mathcal{O}(X)$ نمایش می‌دهیم یک رسته است. فرض کنیم k حلقه‌ای جابجایی و یکدار است. برای پیش نیازهای مربوط به k - جبرها خواننده را به مراجع [۷، ۱] و برای مطالعه جامعی از رسته‌ها و بافه‌ها خواننده را به مراجع [۸، ۲] ارجاع می‌دهیم.

بعضی از ساختارهای موجود روی رسته $((k - \text{Alg})_{\text{fp}})^{\text{op}}$ متشکل از k - جبرهای متناهی نمایش و دوگان k - جبر همریختی‌های بین آنها، قابل تعمیم به رسته $\mathbb{L} = ((C^\infty - \text{rings})_{\text{fg}})^{\text{op}}$ متشکل از C^∞ - حلقه‌های متناهی مولد و دوگان C^∞ - همریختی‌های بین آنها می‌باشند. یکی از این ساختارها، سایت زاریسکی^۴ است که در اینجا قصد داریم ساختار این سایت را روی هر یک از این رسته‌ها شرح دهیم.

در بخش دوم در ابتدا شکل کلاسیک از توپولوژی زاریسکی را روی حلقه $\mathbb{C}^n$ بیان نموده و با استفاده از آن نقاط خوش تعریفی توابع گویا به صورت $h = \frac{f}{g}$ ، که f و g چندجمله‌ای‌هایی از متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ با ضرایب در $\mathbb{C}$ اند، را با ساختن یک بافه روی مجموعه‌های باز زاریسکی در حلقه $\mathbb{C}^n$ دسته‌بندی می‌کنیم. در ضمن، این بافه برای هر میدان جبری بسته k نیز عیناً قابل تعریف روی حلقه k^n است. در ادامه نیز توپولوژی زاریسکی را روی مجموعه‌ی همه‌ی ایدال‌های اول از یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار دلخواه A معرفی می‌کنیم.

در بخش سوم، k - جبرها و k - جبرهای متناهی نمایش را تعریف می‌کنیم. خواهیم دید که هر $\mathbb{R}$ - جبر را می‌توان به صورت یک تابعگون حافظ حاصل ضرب‌های متناهی در نظر گرفت. خواهیم دید که C^∞ - حلقه‌ها در واقع تعمیمی از $\mathbb{R}$ - جبرها می‌باشند.

در بخش‌های پایانی، یعنی بخش‌های ششم و هفتم، نیز به معرفی C^∞ - حلقه‌ها خواهیم پرداخت. دیده می‌شود که C^∞ - حلقه‌ها در واقع تعمیمی از $\mathbb{R}$ - جبرها می‌باشند. سپس به معرفی رسته C^∞ - حلقه‌های متناهی مولد، یعنی $\mathbb{L}$ ، می‌پردازیم. همان‌گونه که خواهیم دید برای تعریف توپولوژی زاریسکی روی یک رسته نیاز داریم که رسته زمینه دارای عقب‌برها (و به طور معادل جلوبرها در رسته دوگان) باشد. از این جهت، احکامی در مورد آنها بیان و ثابت شده است. ساختار سایت زاریسکی روی آن را معرفی خواهیم کرد. (به لم‌های ۲.۷ و ۳.۷ و توضیحات پس از آن مراجعه کنید.) بنابراین دیده می‌شود که ساختار این سایت در واقع همان تعمیم سایت زاریسکی موجود روی رسته $((k - \text{Alg})_{\text{fp}})^{\text{op}}$ است.

¹ Grothendieck ² coordinate ring ³ schemes ⁴ Zariski site

۲. توپولوژی زاریسکی روی یک حلقه و بافه توابع گویا

در هندسه جبری، توپولوژی زاریسکی، یک توپولوژی است که برای چندگونا‌های جبری مورد استفاده قرار می‌گیرد. این توپولوژی به اسکار زاریسکی منسوب است و اهمیت ویژه‌ای در این شاخه از ریاضیات از سال ۱۹۵۰ میلادی پیدا کرده است.

۱.۲. تعریف کلاسیک. در هندسه جبری کلاسیک (یعنی، موضوع قبل از انقلاب گروتندیک در اواخر سال‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ میلادی) توپولوژی زاریسکی برای چندگونا‌های آفین و تصویری تعریف شده بود. درست همانند این شاخه که به مطالعه چندگونا‌های آفین و تصویری تقسیم‌بندی می‌شد، توپولوژی زاریسکی قدری متفاوت برای هر یک از این دو تعریف می‌شود. ما در اینجا فقط تعریف آن را برای چندگونا‌های آفین ذکر می‌کنیم و خواننده را برای تعریف در حالت چندگونا‌های تصویری به منابع موجود در مراجع ارجاع می‌دهیم.

چندگونا‌های آفین. برای چندجمله‌ای مفروض $f(x_1, x_2)$ با متغیرهای x_1 و x_2 و ضرایب مختلط، «مکان هندسی» (locus) آن منحنی جبری است که شامل همه‌ی نقاط (z_1, z_2) در صفحه مختلط $\mathbb{C}^2$ می‌باشد به قسمی که $f(z_1, z_2) = 0$. در حالت کلی‌تر، m چندجمله‌ای $f_1, \dots, f_m$ متعلق به حلقه‌ی چندجمله‌ای $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ یک مکان هندسی به صورت مجموعه‌ی زیر را بدست می‌دهد

$$(1) \quad V(f_1, \dots, f_m) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_i(z_1, \dots, z_n) = 0, \forall i = 1, \dots, m\}.$$

چنین مکان هندسی یک چندگونا‌ی آفین مختلط نامیده می‌شود. هر چنین چندگونا‌ی V یک ایدال در $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ تعیین می‌کند، یعنی، ایدال همه‌ی چندجمله‌ای‌هایی که در هر نقطه از V صفر می‌شوند. در جهت عکس نیز، یک ایدال I در حلقه‌ی چندجمله‌ای $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ به چندگونا‌ی زیر متناظر می‌شود

$$(2) \quad V(I) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(z_1, \dots, z_n) = 0, \forall f \in I\}.$$

به طور مشهود، برای ایدال $I = (f_1, \dots, f_m)$ ، تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های $f_1, \dots, f_m$ در $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ، داریم $V(I) = V(f_1, \dots, f_m)$.

متذکر می‌شویم که ایدال‌های متفاوت ممکن است چندگونا‌های یکسان تولید کنند. برای مشاهده‌ی این مطلب، در ابتدا تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. ایدال I از $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ را یک ایدال رادیکال می‌نامیم، هرگاه $I = \sqrt{I}$ که در آن

$$\sqrt{I} = \{f \mid f^n \in I \text{ که } n \geq 0 \text{ موجود است}\}.$$

به سادگی دیده می‌شود که $V(I) = V(\sqrt{I})$. قضیه‌ی مشهور صفرهای هیلبرت بیان می‌کند که ایدال‌های رادیکال متفاوت در $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ چندگونا‌های آفین متفاوت تولید می‌کنند؛ به عبارت دیگر، $\sqrt{I} \neq \sqrt{J}$ ایجاب می‌کند که $V(I) \neq V(J)$. ایدال‌های ماکسیمال در $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ دقیقاً ایدال‌های $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ می‌باشند که توسط عدد مختلط $a_1, \dots, a_n$ تعیین شده‌اند؛ در این صورت چندگونا‌ی متناظر یک مجموعه تک‌نقطه‌ای در $\mathbb{C}^n$ است که مولفه‌های آن $a_1, \dots, a_n$ می‌باشد که به وضوح یک چندگونا‌ی مینیمال است. هر ایدال اول P یک ایدال رادیکال است. چندگونا‌ی آفین متناظر $V(P)$ تحویل‌ناپذیر است، بدان معنا که به صورت اجتماع تعداد متناهی از چندگونا‌های آفین کوچکتر نمی‌باشد. از طرفی هر ایدال رادیکال می‌تواند به طور یکتا به صورت اشتراک تعداد متناهی از ایدال‌های اول نوشته شود. این بدان معنی است که هر چندگونا‌ی آفین مختلط به طور یکتا به صورت اجتماع تعداد متناهی از چنین چندگونا‌های تحویل‌ناپذیری است. (برای جزئیات بیشتر به قضیه‌های IV. ۶. ۵ و IV. ۶. ۴ از [۳] مراجعه نمایید.)

در دستگاه مختصات دکارتی معمولی با مولفه‌های x و y یک تابع گویای $f(x, y)/g(x, y)$ در کل صفحه تعریف شده نیست، بلکه تنها در نقاطی که مخرج آن مخالف صفر است، یعنی متمم چندگونای $V(g)$ ، قابل تعریف است. در مراتب بالاتر، چنین توابعی روی متمم از یک چندگونای $V(I)$ تعریف شده می‌باشند. بنابراین، طبیعی است که چنین متمم‌هایی بعنوان مجموعه‌های باز در یک فضای توپولوژیک در نظر گرفته شوند. البته اینها مجموعه‌های باز در توپولوژی استاندارد $\mathbb{C}^n$ نیز می‌باشند. اما می‌توان یک توپولوژی متفاوت روی مجموعه $\mathbb{C}^n$ معرفی کرد که در آن مجموعه‌های بسته دقیقاً $V(I)$ ها برای همه‌ی ایدال‌های I از $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ باشند؛ این مجموعه‌ها در اصول موضوعه مجموعه‌های بسته یک فضای توپولوژیک روی $\mathbb{C}^n$ صدق می‌کنند. این توپولوژی به «توپولوژی زاریسکی روی $\mathbb{C}^n$ » موسوم است. با توجه به پاراگراف قبل، می‌توان این توپولوژی را این‌طور نیز توصیف کرد که متمم‌های چندگونا‌های تحویل‌ناپذیر (معین‌شده توسط ایدال‌های اول P) تشکیل یک زیرپایه برای این توپولوژی را می‌دهند.

متناظر با توپولوژی زاریسکی یک «بافه‌ی ساختاری»^۵ استاندارد موجود است که آن را با $\mathcal{O}$ نمایش می‌دهیم. برای تعریف آن میدان $F = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ را به صورت مجموعه تمام توابع گویای صوری $h = f/g$ با $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ که g مخالف صفر است، در نظر می‌گیریم. گوییم تابع گویای h در یک نقطه $Q = (a_1, \dots, a_n)$ در $\mathbb{C}^n$ تعریف شده است اگر مجموعه باز زاریسکی W شامل Q موجود باشد، به قسمی که h را بتوان به صورت خارج قسمت $h = f/g$ نوشت که در آن چندجمله‌ای g در همه نقاط W صفر نمی‌شود. بنابراین در واقع تابع گویای صوری $h = f/g$ ، یک تابع واقعی $W \rightarrow \mathbb{C}$ را بدست می‌دهد که در کل مجموعه باز زاریسکی W تعریف شده است. اکنون فرض می‌کنیم U یک مجموعه باز زاریسکی دلخواه باشد، و $\mathcal{O}(U)$ را به صورت مجموعه همه توابع گویای h که در هر نقطه Q از U (در مفهوم فوق) تعریف شده باشند در نظر می‌گیریم. (زمانی که U مجموعه تهی است فرض می‌کنیم $\mathcal{O}(\emptyset)$ مجموعه‌ای با تنها یک نقطه باشد، که می‌توان آن را تابع گویای یکتای تعریف شده روی مجموعه تهی در نظر گرفت.) به وضوح مجموعه $\mathcal{O}(U)$ یک حلقه می‌باشد؛ در واقع، برای $U \neq \emptyset$ ، یک زیرحلقه از میدان F است. علاوه بر این، به طور آشکارا یک شمول $U' \subseteq U$ از مجموعه‌های باز زاریسکی یک هم‌ریختی $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U')$ از حلقه‌ها را بدست می‌دهد [هر $h \in \mathcal{O}(U)$ را به نقاط U' محدود می‌کند]. به وضوح با این تعریف، $\mathcal{O}$ یک پیش بافه است. اما برای اثبات بافه بودن $\mathcal{O}$ نیز برای هر پوشش $\{U_i\}_{i \in I}$ از مجموعه‌های باز زاریسکی U و هر خانواده از توابع سازگار $\{f_i \in \mathcal{O}(U_i)\}_{i \in I}$ ، به این مفهوم که برای هر $i, j \in I$ ، $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ ، می‌توانیم تابع $f: U = \bigcup U_i \rightarrow \mathbb{C}$ ، که در آن برای هر $x \in U_i$ ، $f(x) = f_i(x)$ ، را تعریف کنیم به طوری که برای هر $i \in I$ ، $f|_{U_i} = f_i$ ، و چون f را از طریق ضابطه‌ی f_i ها تعریف کرده‌ایم، لذا f با این خاصیت یکتاست.

۲.۲. تعریف امروزی. هندسه جبری امروزی [مدرن] به عنوان نقطه آغاز، طیف یک حلقه یعنی مجموعه ایدال‌های اول آن را در نظر می‌گیرد. برای حلقه‌ی جابجایی و یکدار A ، مجموعه‌ی همه‌ی ایدال‌های اول A را با $\text{Spec}(A)$ نمایش می‌دهیم. برای هر زیرمجموعه‌ی E از A ، قرار می‌دهیم $V(E) = \{P \in \text{Spec}(A) \mid E \subseteq P\}$. در این صورت خواهیم داشت:

(۱) اگر I ایدال تولید شده توسط زیرمجموعه E از A باشد، یعنی $I = (E)$ ، آنگاه $V(I) = V(E)$.

(۲) برای خانواده‌ی $\{E_i\}_{i \in I}$ از زیرمجموعه‌های A ، $V(\bigcup_{i \in I} E_i) = \bigcap_{i \in I} V(E_i)$.

(۳) $V(\mathbf{1}) = \emptyset$ ، $V(\mathbf{0}) = \text{Spec}(A)$.

(۴) برای هر دو ایدال I و J در A داریم $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

در این فرمول‌بندی، مجموعه‌های زاریسکی-بسته، مجموعه‌های به شکل

$$V(I) = \{P \in \text{Spec}(A) \mid I \subseteq P\}$$

هستند. این موضوع نشان می‌دهد که گردایه متشکل از تمام $V(I)$ ها، که I ایدالی از A است، در اصول موضوعه مجموعه‌های بسته‌ی یک فضای توپولوژیک صدق می‌کنند. بنابراین گردایه مجموعه‌های باز در $\text{Spec}(A)$ به صورت

$$\mathcal{O}(\text{Spec}(A)) = \{V(E)^c \mid E \subseteq A\}$$

تعریف می‌شوند، که در آن $()^c$ عمل متمم‌گیری مجموعه‌ها است. این توپولوژی را توپولوژی زاریسکی روی $\text{Spec}(A)$ می‌نامیم.

از طرفی، اگر برای $a \in A$ ، $I = (a)$ ایدال تولید شده توسط عضو a باشد، آنگاه متمم $V(a)$ ها تشکیل یک پایه برای توپولوژی زاریسکی روی $\text{Spec}(A)$ می‌دهند. زیرا برای هر $S \subseteq A$ ، داریم:

$$\begin{aligned} V(S)^c &= \{P \in \text{Spec}(A) \mid S \not\subseteq P\} \\ &= \{P \in \text{Spec}(A) \mid \exists a \in S; a \notin P\} \\ &= \bigcup_{a \in S} \{P \in \text{Spec}(A) \mid a \notin P\} \\ &= \bigcup_{a \in S} V(a)^c \end{aligned}$$

یعنی بازهای پایه‌ای در این فضای توپولوژیک به صورت $\mathcal{O}_a = V(a)^c = \{P \in \text{Spec}(A) \mid a \notin P\}$ ، که $a \in A$ ، می‌باشند.

تعریف ۲.۲. برای حلقه جابجایی و یک‌دار A ، ایدال I از A را یک ایدال رادیکال می‌نامیم، هرگاه $I = \sqrt{I}$ که در آن

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ که } n \geq 0 \text{ موجود است}\}.$$

به سادگی دیده می‌شود که $V(I) = V(\sqrt{I})$. حال اگر $\text{Rad}(A)$ ، مجموعه متشکل از ایدال‌های رادیکال A ، را به صورت یک مجموعه جزئی مرتب با رابطه‌ی مشمولیت در نظر بگیریم، آنگاه تابع $\varphi: \text{Rad}(A) \rightarrow \mathcal{O}(\text{Spec}(A))$ ، با ضابطه‌ی $\varphi(I) = \mathcal{O}_I = \{P \in \text{Spec}(A) \mid I \not\subseteq P\}$ یک یکریختی از مجموعه‌های جزئی مرتب است (برای جزئیات بیشتر به گزاره ۲.۱۱.۲ از مرجع [۲] مراجعه نمایید). بنابراین در توپولوژی زاریسکی روی حلقه A ، تنها ایدال‌های رادیکال متفاوت، بازهای متفاوت ایجاد می‌کنند. $\text{Spec}(A)$ به همراه توپولوژی زاریسکی روی آن، طیف اول حلقه A نامیده می‌شود.

۳. k -جبرهای متناهی نمایش

برای حلقه جابجایی و یک‌دار k ، هنوز می‌توان چند گونا‌های جبری را در فضای n -بعدی «آفین» تعریف کرد. برای ایدال مفروض I در حلقه چندجمله‌ای $k[x_1, \dots, x_n]$ چندگونای متناظر آن $V(I)$ متشکل از همه نقاط $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ که $a_i \in k$ است، به قسمی که $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ برای هر $f \in I$ با این وجود، بخاطر اینکه همتای قضیه صفرهای هیلبرت در اینجا برقرار نیست، از این رو، به قدر کافی «نقاط» برای متمایز گرفتن چند گونا‌ها که می‌بایست متفاوت باشند موجود نیست. بنابراین می‌بایست نه تنها با خود چند گونا‌ها کار کنیم بلکه بایستی حلقه‌های خارج قسمتی نظیر آنها، $k[x_1, \dots, x_n]/I$ را نیز مورد مطالعه قرار دهیم.

حلقه A یک k -جبر [۶، تعریف IV. ۷. ۱] نامیده می‌شود هرگاه یک k -مدول چپ یکانی باشد و برای هر $s \in k$ و برای هر $a, b \in A$ ، تساوی $s(ab) = (sa)b = a(sb)$ برقرار باشد. به عبارت دیگر، A یک k -جبر است اگر و تنها اگر همریختی حلقه‌ای مانند $A \xrightarrow{f} k$ موجود باشد. ([۱، ص. ۲۹] را ملاحظه کنید). اکنون تعریف زیر را از [۷، ص. ۳۰۲] ملاحظه کنید.

تعریف ۱.۳. برای حلقه جابجایی و یک‌دار k ، جبر A یک k -جبر متناهی نمایش^۶ (به طور خلاصه k -جبر fp) نامیده می‌شود، هرگاه A یکرخت با حلقه‌ای به صورت $(f_1, \dots, f_m)/(k[x_1, \dots, x_n])$ باشد که در آن برای هر $1 \leq i \leq m$ ، $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$.

گیریم $(k - \text{Alg})_{\text{fp}}$ رسته همه این چنین جبرهایی باشد. مشاهده می‌کنیم که یکرخت از چنین جبرهایی، نگاشتی القایی، منتها در جهت معکوس روی چندگوناهای متناظر این جبرها بدست می‌دهد. از این‌رو، دوگان این رسته را در نظر خواهیم گرفت. افزون بر این متذکر می‌شویم که یک حلقه در این رسته احتمالاً دارای تعدادی عناصر پوچتون است؛ چنین عناصری برای دگرذیسی‌ها مورد استفاده واقع می‌شوند. این گونه عناصر روشی برای تشخیص این که به طور مثال چندگونای تعریف شده با معادله $x - y = 0$ را از چندگونای داده شده با معادله $(x - y)^2 = 0$ تمیز دهیم ارایه می‌کنند. در [۹، ص. ۱۵]، $\mathbb{R}$ -جبر A حلقه‌ای است که به هر نگاشت $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، داده شده توسط یک m تایی از چندجمله‌ای‌های $(p_1, \dots, p_m)$ با ضرایب حقیقی، نگاشت $A(p): A^n \rightarrow A^m$ را با ضابطه‌ی

$$A(p)(a_1, \dots, a_n) = (p_1(a_1, \dots, a_n), \dots, p_m(a_1, \dots, a_n)) = p(a_1, \dots, a_n)$$

نظیر می‌کند، به طوری که تحت این تناظر تصویرگرها، همانی‌ها و ترکیب‌ها حفظ می‌شوند. توجه کنید، از آن جایی که p_i ها نگاشت‌های چند جمله‌ای با دامنه $\mathbb{R}^n$ هستند، لذا اگر اعضای A^n را در آن‌ها قرار دهیم، اعمال بین آن‌ها در چند جمله‌ای‌های p_i ، در واقع همان اعمال $\mathbb{R}$ -جبر A خواهد بود.

حال اگر D را رسته‌ای در نظر بگیریم که اشیای آن $\mathbb{R}^n$ ها و ریخت‌های آن نگاشت‌ها با مولفه‌های چندجمله‌ای باشند که ضرایب حقیقی دارند، آنگاه A در واقع یک تابعگون به صورت $A: D \rightarrow \text{Sets}$ می‌باشد. از طرفی از آن جایی که A ، تصویرگرها را نیز حفظ می‌کند، لذا A ، به عنوان یک تابعگون، حافظ حاصل ضرب‌های متناهی نیز می‌باشد.

۴. توپولوژی گروتندیک روی یک رسته

در ادامه قصد داریم یک توپولوژی گروتندیک^۷ روی دوگان رسته $(k - \text{Alg})_{\text{fp}}$ ، یعنی $((k - \text{Alg})_{\text{fp}})^{\text{op}}$ ، تعریف کرده و آن‌را به صورت یک سایت در نظر بگیریم. برای این منظور در ابتدا تعریف توپولوژی گروتندیک را روی یک رسته کوچک بیان کرده و بعضی از قوانین موجود روی رسته $(k - \text{Alg})_{\text{fp}}$ ، که در اینجا مورد نیاز است، را در قالب چند لم بیان می‌کنیم. ابتدا با تعریف زیر از [۸، تعریف III. ۲. ۱] شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. برای رسته مفروض C ، تعریف می‌کنیم

(۱) یک غربال بر یک شی $C \in C$ ، گردایه‌ی R از ریخت‌هایی در C با هم دامنه‌ی C می‌باشد، با این خاصیت که اگر $R \in C$ ، $D \xrightarrow{f} C$ ، آنگاه برای هر ریخت $E \xrightarrow{g} D$ ، ریخت $f \circ g \in R$ که در آن $f \circ g: E \rightarrow C$ به عبارت بهتر، R یک ایدال راست است.

(۲) یک توپولوژی گروتندیک روی C ، تابعی مانند J است به طوری که به هر شی $C \in C$ ، گردایه‌ی $J(C)$ از غربال‌های روی C را نسبت می‌دهد به طوری که:

(الف) غربال ماکسیمال، یعنی $\{f \mid f \text{ با هم دامنه‌ی } C \text{ است}\}$ ، متعلق به $J(C)$ باشد.

(ب) (اصل پایداری) اگر $R \in J(C)$ و $D \xrightarrow{f} C$ ریخت دلخواهی در C باشد، آنگاه

$$f^*(R) := \{E \xrightarrow{g} D; f \circ g \in R\} \in J(D).$$

^۶ finitely presented ^۷ Grothendieck topology

ج) (اصل تعدی) اگر $R \in J(C)$ و S غربالی بر C باشد به طوری که برای هر $C \xrightarrow{f} D$ ، $f^*(S) \in J(D)$ ، آنگاه $S \in J(C)$.

منظور از یک سایت، جفت (C, J) متشکل از رسته کوچک C و یک توپولوژی گروتندیک J روی C است. هرگاه $S \in J(C)$ ، گوئیم S یک غربال پوششی است یا اینکه S شی C را می پوشاند (یا اینکه بخواهیم نقش J را هم مشخص کنیم می گوئیم S شی C را J -می پوشاند). همچنین می گوئیم غربال S بر C ریخت $f: D \rightarrow C$ را می پوشاند هرگاه غربال $f^*(S)$ شی D را بپوشاند.

مثال ۲.۴. یک فضای توپولوژیک X با مفهوم متداول پوشش در آن، مثالی از یک سایت است: مجموعه جزیی مرتب $\mathcal{O}(X)$ از زیر مجموعه های باز X را می توان به شکل معمول یک رسته در نظر گرفت (دقیقاً یک ریخت $U \rightarrow V$ موجود است اگر و تنها اگر $U \subseteq V$)، لذا یک غربال بر U به طور ساده خانواده S از زیرمجموعه های باز U با این ویژگی است که هرگاه $V' \subseteq V \in S$ ، نتیجه دهد $V' \in S$ (به عبارت بهتر، S از پایین بسته است). از این رو، می گوئیم S ، U را می پوشاند اگر و فقط اگر U مشمول اجتماع مجموعه های باز در S باشد (یعنی $U \subseteq \bigcup_{V \in S} V$). به سادگی می توان دید که این تعریف از «پوشش باز» در اصول موضوعه برای یک توپولوژی گروتندیک روی $\mathcal{O}(X)$ صدق می کند.

تعریف ۳.۴. ([۸، تعریف III.۲.۲]) برای رسته کوچک C (با عقب برها)، یک پایه برای یک توپولوژی گروتندیک روی C ، تابعی مانند K است که به هر شی C از C ، گردایه $K(C)$ متشکل از یک یا چند خانواده از ریخت ها با هم دامنه C را نسبت می دهد به طوری که:

(۱) اگر $f: C' \rightarrow C$ یک یکرخیختی باشد آنگاه $\{f: C' \rightarrow C\} \in K(C)$.

(۲) پایداری تحت عقب بر: اگر $\{f_i: C_i \rightarrow C \mid i \in I\} \in K(C)$ ، آنگاه برای هر ریخت $g: D \rightarrow C$ ، فرض کنیم برای هر $i \in I$ ، شی $C_i \times_C D$ به همراه تصویرگرهای $C_i \times_C D \xrightarrow{\pi_{C_i}} C_i$ و $C_i \times_C D \xrightarrow{\pi_D} D$ یک عقب بر باشد، در این صورت $\{\pi_D: C_i \times_C D \rightarrow D\}_{i \in I} \in K(D)$ ، که در آن نمودار

$$\begin{array}{ccc} C_i \times_C D & \xrightarrow{\pi_D} & D \\ \pi_{C_i} \downarrow & & \downarrow g \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & C \end{array}$$

یک نمودار عقب بر در C است.

(۳) پایداری تحت ترکیب: اگر $\{f_i: C_i \rightarrow C \mid i \in I\} \in K(C)$ و اگر برای هر $i \in I$ ، خانواده $\{f_i \circ g_{ij}: D_{ij} \rightarrow C \mid i \in I, j \in I_i\} \in K(C)$ آنگاه $\{g_{ij}: D_{ij} \rightarrow C_i \mid j \in I_i\} \in K(C_i)$.

جفت (C, K) نیز یک سایت نامیده می شود. در ضمن، عناصر T از مجموعه $K(C)$ «خانواده های پوششی» یا به طور خلاصه «پوشش ها» برای این سایت نامیده می شوند.

اگر K یک پایه روی رسته C باشد آنگاه K یک توپولوژی J روی C با ضابطه

$$S \in J(C) \Leftrightarrow \exists R \in K(C); R \subseteq S$$

تولید می کند.

مثال ۴.۴. گیریم T رسته کوچکی از فضاهای توپولوژیک باشد که نسبت به حدهای متناهی بسته است، همچنین T شامل همه زیرفضاهای باز فضاهای موجود در T است. (به عنوان مثال، T را می توان رسته فضاهای هاسدورف جداپذیر در نظر گرفت). پایه K را روی T بدین شکل تعریف می کنیم که به ازای فضای توپولوژیک مفروض X ، $\{f_i: Y_i \rightarrow X\}$

$\mathbf{K}(X)$ اگر و فقط اگر Y_i زیر فضایی از X ، f_i نشان‌دهنده نظیر آن و $\bigcup_{i \in I} Y_i = X$ باشد. به این پایه یا به توپولوژی گروتندیک متناظر آن، «توپولوژی پوشش باز» روی رسته $\mathbf{T}$ از فضاها گفته می‌شود.

مثال ۵.۴. یادآور می‌شویم که یک جبر هیتینگ، شبکه‌ای مانند A است که به یک عمل استلزام $\Rightarrow$ مجهز شده است که در شرط

$$(۳) \quad a \leq (b \Rightarrow c) \text{ اگر و فقط اگر } a \wedge b \leq c$$

برای هر $a, b, c \in A$ صدق می‌کند. یک جبر هیتینگ کامل (cHa)، جبر هیتینگ است که به عنوان یک شبکه کامل باشد، بدین معنی که سوپریمم و اینفیمم هر خانواده از عناصرش را داراست.

اگر A یک cHa باشد و $\{a_i \mid i \in I\}$ و b عناصری از A باشند، در این صورت اتحاد زیر که به «اصل توزیع پذیری نامتناهی» مشهور است برقرار می‌باشد

$$(۴) \quad \bigvee_{i \in I} (b \wedge a_i) = b \wedge \bigvee_{i \in I} a_i.$$

این موضوع به سادگی از خاصیت (۳) نتیجه می‌شود، زیرا هرگاه $c \in A$ عضو دلخواهی باشد داریم

$$\begin{aligned} \bigvee_{i \in I} (b \wedge a_i) \leq c &\iff \forall i \in I, b \wedge a_i \leq c \\ &\iff \forall i \in I, a_i \leq (b \Rightarrow c) \\ &\iff \bigvee_{i \in I} a_i \leq (b \Rightarrow c) \\ &\iff b \wedge \bigvee_{i \in I} a_i \leq c \end{aligned}$$

برعکس، خواننده می‌تواند خود بررسی کند که اگر A شبکه‌ای باشد که در آن همه سوپریمم‌ها موجود باشد و در تساوی (۴) صدق کند، آنگاه A دارای ساختار یک جبر هیتینگ کامل است که در آن عمل استلزام $\Rightarrow$ به شکل

$$b \Rightarrow c = \bigvee \{a \in A \mid a \wedge b \leq c\}$$

تعریف می‌شود.

اکنون فرض کنیم A یک جبر هیتینگ کامل است. A را به شکل متداول به صورت یک رسته در نظر می‌گیریم (پس دقیقاً یک ریخت $a \rightarrow b$ وجود دارد اگر و فقط اگر $a \leq b$). در این صورت A را می‌توان به شکل زیر به یک پایه برای یک توپولوژی گروتندیک $\mathbf{K}$ مجهز ساخت که

$$\{a_i \mid i \in I\} \in \mathbf{K}(c) \iff \bigvee_{i \in I} a_i = c$$

(توجه کنید که در سمت چپ تساوی بالا، ما عضو $a_i \leq c$ را با ریخت متناظرش $a_i \rightarrow c$ یکی گرفته‌ایم.)

یک غربال S بر عضو $c \in A$ دقیقاً زیر مجموعه S از A متشکل از اعضای $b \leq c$ است به قسمی که $a \leq b \in S$ نتیجه دهد $a \in S$. در توپولوژی J حاصل از $\mathbf{K}$ ، یک غربال S بر عضو c ، عضو c را می‌پوشاند اگر و فقط اگر $c = \bigvee S$ بدین معنی که c سوپریمم عناصر S است. از این رو، این توپولوژی اغلب «توپولوژی سوپریمم» نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که در صورتی که A جبر زیر مجموعه‌های باز یک فضای توپولوژیک مفروض X باشد، این توپولوژی همان توپولوژی پوشش باز است.

۵. سایت زاریسکی روی دوگان رسته‌ی k -جبرهای متناهی نمایش

از [۱، گزاره ۳.۱] خاطر نشان می‌کنیم که متناظر با هر حلقه کسرهای $A[a^{-1}]$ ، یک همریختی جهانی $\eta_a : A \rightarrow A[a^{-1}]$ با ضابطه‌ی $\eta_a(b) = \frac{b}{1}$ ، موجود است. جهانی بودن آن نیز به این معنی است که برای هر همریختی حلقه‌ای $\varphi : A \rightarrow B$ ، که $\varphi(a)$ در B وارون‌پذیر است، همریختی حلقه‌ای یکتای $\psi : A[a^{-1}] \rightarrow B$ وجود است به طوری که $\psi \circ \eta_a = \varphi$ ، یعنی نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_a} & A[a^{-1}] \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & B \end{array}$$

در لم بعد می‌بینیم که عناصر حلقه کسرها را می‌توان به صورت هم‌مجموعه‌هایی از چندجمله‌ای‌ها روی حلقه زمینه در نظر گرفت. به عبارت بهتر،

لم ۱.۵. اگر A حلقه جابجایی و یک‌دار و $a \in A$ باشد آنگاه $A[a^{-1}] \cong A[x]/(ax - 1)$.

اثبات. می‌دانیم برای حلقه جابجایی و یک‌دار A و برای هر $a \in A$ ، حلقه کسرهای $A[a^{-1}]$ به صورت

$$A[a^{-1}] = \left\{ \frac{b}{a^n}; n \geq 0, b \in A \right\}$$

تعریف می‌شود. حال تعریف می‌کنیم:

$$\varphi : A[x] \rightarrow A[a^{-1}]; \varphi(f(x)) = c_0 + \frac{c_1}{a} + \frac{c_2}{a^2} + \cdots + \frac{c_n}{a^n}$$

که در آن $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$. به وضوح φ یک همریختی حلقه‌ای است. در ضمن φ با این تعریف پوشا نیز هست، زیرا برای هر $\frac{b}{a^n} \in A[a^{-1}]$ ، می‌توانیم چندجمله‌ای $f(x) = bx^n$ را در $A[x]$ اختیار کنیم به طوری که $\varphi(f(x)) = \frac{b}{a^n}$. از طرفی $\ker \varphi = \{f(x) \in A[x] \mid \varphi(f(x)) = 0\}$ ؛ در واقع اعضای $\ker \varphi$ چندجمله‌ای‌هایی مانند f هستند که وقتی مقدار آنها را در $x = \frac{1}{a}$ محاسبه می‌کنیم حاصل برابر صفر می‌شود، بنابراین همه‌ی چندجمله‌ای‌های موجود در $\ker \varphi$ باید در تجزیه آنها یکی از عامل‌ها به صورت $ax - 1$ باشند، پس $\ker \varphi = (ax - 1)$. اکنون حکم از قضیه اول یکرختی حلقه‌ها نتیجه می‌شود. $\square$

نتیجه ۲.۵. فرض کنیم A حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار و $a \in A$. اگر A یک k -جبر متناهی نمایش باشد آنگاه، $A[a^{-1}]$ نیز یک k -جبر متناهی نمایش است.

اثبات. حکم به سادگی با توجه به متناهی نمایش بودن $A[x]$ از لم قبل حاصل می‌شود. $\square$

در رسته $(k - \text{Alg})_{\text{fp}}$ ، شی هم حاصل ضرب برای هر دو k -جبر متناهی نمایش A و B ، ضرب تانسوری آنها، یعنی $A \otimes_k B$ ، می‌باشد (به [۶، ص. ۲۲۹] مراجعه کنید). بطور متداول، برای دو ریخت $f : A \rightarrow B$ و $g : A \rightarrow C$ ، جلوبر آنها را در این رسته با $B \otimes_A C$ نشان می‌دهیم.

لم ۳.۵. فرض کنیم A و B دو k -جبر متناهی نمایش، $a \in A$ و $h: A \rightarrow B$ یک k -جبر همریختی باشد. برای نمودار جلوبر زیر

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_a} & A[a^{-1}] \\ h \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A[a^{-1}] \otimes_A B \end{array}$$

که در آن η_a همریختی جهانی متناظر با $A[a^{-1}]$ است، داریم $A[a^{-1}] \otimes_A B \cong B[h(a)^{-1}]$.

اثبات. برای اثبات این مطلب، ثابت می‌کنیم که $B[h(a)^{-1}]$ نیز، در رسته $(k - \mathbf{Alg})_{fp}$ ، جلوبر نمودار زیر می‌باشد.

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_a} & A[a^{-1}] \\ h \downarrow & & \downarrow \nu \\ B & \xrightarrow{\eta_{h(a)}} & B[h(a)^{-1}] \end{array}$$

که در آن $\nu: A[a^{-1}] \rightarrow B[h(a)^{-1}]$ همریختی حلقه‌ای با ضابطه‌ی $\nu(\frac{c}{a^n}) = \frac{h(c)}{h(a)^n}$ و $\eta_{h(a)}$ همریختی جهانی مربوط به حلقه $B[h(a)^{-1}]$ است. (خوش تعریفی و همریختی بودن ν به راحتی از تعریف آن نتیجه می‌شود.) در این صورت با توجه به این که شی جلوبر، در حد یکرختی، یکتاست [۲، ص. ۵۲]، یکرختی مورد نظر ثابت می‌شود. اولاً در اینجا برای هر $c \in A$ داریم

$$\nu \circ \eta_a(c) = \nu(\frac{c}{1}) = \frac{h(c)}{1} = \eta_{h(a)} \circ h(c)$$

پس $\nu \circ \eta_a = \eta_{h(a)} \circ h$ یعنی نمودار (۵) جابه‌جایی است. حال برای اثبات جلوبر بودن $B[h(a)^{-1}]$ ، برای هر k -جبر متناهی نمایش D و هر دو k -جبر همریختی $\varphi: B \rightarrow D$ و $\psi: A[a^{-1}] \rightarrow D$ به طوری که $\psi \circ \eta_a = \varphi \circ h$ ، همریختی

$$\omega: B[h(a)^{-1}] \rightarrow D; \omega(\frac{b}{h(a)^n}) = \varphi(b)\psi(\frac{1}{a^n})$$

را تعریف می‌کنیم. با توجه به k -جبر همریختی بودن φ و ψ ، به سادگی دیده می‌شود که ω نیز یک k -جبر همریختی است. حال برای هر $\frac{c}{a^n} \in A[a^{-1}]$ داریم

$$\begin{aligned} \omega \circ \nu(\frac{c}{a^n}) &= \omega(\frac{h(c)}{h(a)^n}) = \varphi(h(c))\psi(\frac{1}{a^n}) \\ &= \psi(\frac{c}{1})\psi(\frac{1}{a^n}) = \psi(\frac{c}{a^n}) \end{aligned}$$

در تساوی‌های فوق، تساوی آخر به دلیل همریختی حلقه‌ای بودن ψ برقرار است. در ضمن برای هر $b \in B$ ،

$$\omega \circ \eta_{h(a)}(b) = \omega(\frac{b}{1}) = \varphi(b)$$

و از آن جایی که ω را به کمک ضابطه‌ی φ و ψ تعریف کرده‌ایم، لذا ω با خواص فوق یکتاست و بنابراین حکم ثابت می‌شود. □

لم ۴.۵. برای هر k -جبر A و برای هر دو عضو $a, b \in A$ ، $A[a^{-1}][b^{-1}] \cong A[(ab)^{-1}]$.

اثبات. متناظر با این حلقه‌های کسرها، دو همریختی جهانی $\nu : A \rightarrow A[a^{-1}][b^{-1}]$ و $\eta_{ab} : A \rightarrow A[(ab)^{-1}]$ موجودند، که در آن ترکیب دو همریختی جهانی $\eta_a : A \rightarrow A[a^{-1}]$ و $\eta'_b : A[a^{-1}] \rightarrow A[a^{-1}][b^{-1}]$ می‌باشد. از طرفی، از آن جایی که $\eta_{ab}(a) = \frac{a}{b}$ دارای وارون $\frac{b}{ab}$ و $\eta_{ab}(\frac{b}{a}) = \frac{b}{a}$ دارای وارون $\frac{a}{ab}$ در $A[(ab)^{-1}]$ می‌باشند، لذا $\eta_{ab}(a)$ و $\eta_{ab}(\frac{b}{a})$ در $A[(ab)^{-1}]$ وارون پذیر بوده و بنابر خاصیت جهانی $A[a^{-1}][b^{-1}]$ ، متناظر با η_{ab} ، همریختی یکتای $\varphi : A[a^{-1}][b^{-1}] \rightarrow A[(ab)^{-1}]$ با ضابطه $\varphi(d/a^m b^t) = \eta_{ab}(da^m b^t)/(\eta_{ab}(a)\eta_{ab}(b))^{m+t}$ ، موجود است به طوری که $\eta_{ab} \circ \varphi = id$ (۱، گزاره ۳.۱).

از سوی دیگر، از آن جایی که $\nu(ab) = \frac{ab}{1}$ دارای وارون $\frac{1}{ab}$ در $A[a^{-1}][b^{-1}]$ می‌باشد، لذا $\nu(ab)$ نیز در $A[a^{-1}][b^{-1}]$ وارون پذیر بوده و بنابر این طبق خاصیت جهانی $A[(ab)^{-1}]$ متناظر با ν ، همریختی یکتای $\psi : A[(ab)^{-1}] \rightarrow A[a^{-1}][b^{-1}]$ با ضابطه $\psi(d/(ab)^m) = \nu(d)/\nu(ab)^m$ ، موجود است به طوری که $\psi \circ \eta_{ab} = \nu$. حال از آن جایی که $(\psi \circ \varphi) \circ \nu = \nu$ و $\eta_{ab} \circ \varphi = id$ ، لذا با توجه به خاصیت جهانی $A[a^{-1}][b^{-1}]$ ، $\psi \circ \varphi = id$ و بنابر خاصیت جهانی $A[(ab)^{-1}]$ ، $\varphi \circ \psi = id$. بنابراین φ و ψ وارون یکدیگرند و حکم ثابت است. $\square$

همان‌گونه که قبلاً نیز در بخش ۴ به آن اشاره شد، اکنون قصد داریم توپولوژی گروتندیک روی دوگان رسته‌ی k -جبرهای متناهی نمایش، یعنی $((k - \mathbf{Alg})_{\text{fp}})^{\text{op}}$ ، را با ساختن یک پایه توصیف کنیم. برای انجام این کار، پایه K برای توپولوژی گروتندیک روی رسته $((k - \mathbf{Alg})_{\text{fp}})^{\text{op}}$ را این‌طور تعریف می‌کنیم که برای هر k -جبر متناهی نمایش A ، یک پوشش A ، دوگان خانواده‌ای متناهی به شکل $\{\eta_i : A \rightarrow A[a_i^{-1}] \mid i = 1, \dots, n\}$ (با تقریب یکرختی) است که در آن هر $A[a_i^{-1}]$ حلقه‌ای از کسرها است. همان‌گونه که در ابتدای این بخش ذکر شد، نگاشت‌های $\eta_i : A \rightarrow A[a_i^{-1}]$ برای $1 \leq i \leq n$ ، همریختی‌های جهانی (طبیعی) هستند و $1 \in (a_1, \dots, a_n)$ ، یعنی $a_1, \dots, a_n$ حلقه A را تولید می‌کنند.

قضیه ۵.۵. K پایه‌ای برای یک توپولوژی گروتندیک روی رسته $((k - \mathbf{Alg})_{\text{fp}})^{\text{op}}$ است.

اثبات. شرایط یک پایه را در اینجا بررسی می‌کنیم

(۱) چون $A[1^{-1}] = A$ و عضو همانی 1 ، A را تولید می‌کند لذا دوگان نگاشت همانی خانواده پوشش تک عنصری خواهد بود یعنی، $\{A \rightarrow A[1^{-1}] = A\}^{\text{op}} \in K(A)$.

(۲) پایداری تحت عقب‌بر: اگر دوگان خانواده‌ی $\{\eta_i : A \rightarrow A[a_i^{-1}] \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ متعلق به $K(A)$ باشد، یعنی $1 \in (a_1, \dots, a_n)$ و برای هر i ، η_i ها همریختی‌های جهانی باشند، آنگاه برای هر k -جبر همریختی $h : A \rightarrow B$ ثابت می‌کنیم دوگان خانواده $\{\theta_i : B \rightarrow A[a_i^{-1}] \times_A B \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ متعلق به $K(B)$ می‌باشد.

برای این منظور، ابتدا توجه می‌کنیم که عقب‌برها در رسته $((k - \mathbf{Alg})_{\text{fp}})^{\text{op}}$ ، یا همان جلوبرها در رسته $(k - \mathbf{Alg})_{\text{fp}}$ ، ضرب‌های تانسوری می‌باشند، پس شی عقب‌بر $A[a_i^{-1}] \times_A B$ ، در رسته $((k - \mathbf{Alg})_{\text{fp}})^{\text{op}}$ ، را می‌توانیم به صورت $A[a_i^{-1}] \otimes_A B$ نیز نمایش دهیم. از طرفی شی $A[a_i^{-1}] \otimes_A B$ در واقع شی جلوبر در رسته $(k - \mathbf{Alg})_{\text{fp}}$ برای نمودار زیر می‌باشد.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_i} & A[a_i^{-1}] \\ h \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

در ضمن بنابر لم ۳.۵، $A[a_i^{-1}] \otimes_A B \cong B[h(a_i)^{-1}]$ و از آن جایی که $1 \in (a_1, \dots, a_n)$ ، لذا

$$1 = h(1) \in (h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

علاوه براین، از آن جایی که $B[h(a_i)^{-1}]$ شی جلوبر برای نمودار فوق می‌باشد، لذا برای هر $1 \leq i \leq n$ ، θ_i ها هم‌ریختی‌های جهانی می‌باشند. بنابراین ثابت کردیم که

$$\{\theta_i : B \longrightarrow A[a_i^{-1}] \otimes_A B \cong B[h(a_i)^{-1}] \mid i \in \{1, \dots, n\}\}^{op} \in K(B)$$

(۳) پایداری تحت ترکیب: فرض کنیم دوگان خانواده $\{\eta_i : A \longrightarrow A[a_i^{-1}] \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ متعلق به $K(A)$ باشد و فرض کنیم برای هر i ، دوگان خانواده‌ی

$$\{\nu_j : A[a_i^{-1}] \longrightarrow A[a_i^{-1}][c_{ij}^{-1}] \mid j \in \{1, \dots, z_i\}\}$$

متعلق به $K(A[a_i^{-1}])$ باشد، که در آن $c_{ij} \in A[a_i^{-1}]$ ، $1 \in (c_{i1}, \dots, c_{iz_i})$ و ν_j ها هم‌ریختی‌های جهانی می‌باشند. از آن جایی که برای هر i و j ، $1 \leq j \leq z_i$ و $1 \leq i \leq n$ ، لذا $c_{ij} \in A[a_i^{-1}]$ ، $c_{ij} = b_{ij}/a_i^{m_{ij}}$ ، به ازای یک $m_{ij} \geq 0$. از سوی دیگر، هر عضو $A[a_i^{-1}][c_{ij}^{-1}]$ نیز به صورت

$$(r/a_i^m)/(b_{ij}/a_i^{m_{ij}})^l = (ra_i^{m_{ij}l})/(a_i^m b_{ij}^l)$$

می‌باشد، لذا بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توانیم به جای حلقه $A[a_i^{-1}][c_{ij}^{-1}]$ ، حلقه $A[a_i^{-1}][b_{ij}^{-1}]$ را در نظر بگیریم. پس به جای هم‌ریختی‌های جهانی ν_j ، نیز می‌توان هم‌ریختی‌های جهانی $\theta_j : A[a_i^{-1}] \longrightarrow A[a_i^{-1}][b_{ij}^{-1}]$ را در نظر گرفت. از طرفی بنابر لم ۴.۵، داریم $A[a_i^{-1}][b_{ij}^{-1}]A[(a_i b_{ij})^{-1}]$. بنابراین، با توجه به اینکه دوگان خانواده ν_j ها متعلق به $K(A[a_i^{-1}])$ بوده و به جای حلقه $A[a_i^{-1}][c_{ij}^{-1}]$ حلقه $A[a_i^{-1}][b_{ij}^{-1}]$ را در نظر گرفته‌ایم، دوگان خانواده $\{\theta_j : A[a_i^{-1}] \longrightarrow A[(a_i b_{ij})^{-1}] \mid j \in \{1, \dots, z_i\}\}$ متعلق به $K(A[a_i^{-1}])$ می‌باشد. حال برای اثبات شرط (۳) در تعریف پایه‌ی یک توپولوژی گروتندیک، در واقع می‌خواهیم ثابت کنیم که دوگان خانواده

$$\{\theta_j \circ \eta_i : A \longrightarrow A[(a_i b_{ij})^{-1}] \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, z_i\}\}$$

متعلق به $K(A)$ می‌باشد، یعنی باید ثابت کنیم که $1 \in (a_1 b_{11}, \dots, a_1 b_{1z_1}, \dots, a_n b_{n1}, \dots, a_n b_{nz_n})$ و $\theta_j \circ \eta_i$ ها هم‌ریختی‌های جهانی می‌باشند. اولاً با توجه به جهانی بودن η_i ها و θ_j ها، $\theta_j \circ \eta_i$ نیز جهانی می‌باشند. در ضمن، از آن جایی که $1 \in (c_{i1}, \dots, c_{iz_i})$ ، به عنوان ایدالی از $A[a_i^{-1}]$ ، بنابراین $\gamma_1, \dots, \gamma_{z_i}$ در $A[a_i^{-1}]$ موجودند به طوری که

$$1 = \gamma_1 c_{i1} + \dots + \gamma_{z_i} c_{iz_i} = \gamma_1 (b_{i1}/a_i^{m_{i1}}) + \dots + \gamma_{z_i} (b_{iz_i}/a_i^{m_{iz_i}})$$

می‌باشد، لذا با در نظر گرفتن $1 \in A[a_i^{-1}]$ ، $t_{ij} = \gamma_j/a_i^{m_{ij}} \in A[a_i^{-1}]$ ، $1 = t_{i1} b_{i1} + \dots + t_{iz_i} b_{iz_i}$ بوده و بنابراین $1 \in (b_{i1}, \dots, b_{iz_i})$ ، به عنوان ایدالی در $A[a_i^{-1}]$ می‌باشد. از آن جایی که برای هر i هر کدام از t_{ij} ها، با $1 \leq j \leq z_i$ ، به صورت کسرهایی می‌باشند که مخارج آنها توانی از a_i است لذا عدد طبیعی k_i ، موجود است به طوری که $a_i^{k_i} \in (a_i b_{i1}, \dots, a_i b_{iz_i})$ به عنوان ایدالی از A (در واقع $\{k_i = \max\{m_{ij} \mid 1 \leq j \leq z_i\}\}$) از سوی دیگر، $1 \in (a_1, \dots, a_n)$ و در نتیجه $1 = \sum_{i=1}^n d_i a_i$ که در آن $d_i \in A$ به ازای $1 \leq i \leq n$. حال با انتخاب $k > \max(k_i)$ خواهیم داشت:

$$1 = \left(\sum_{i=1}^n d_i a_i\right)^k \in (a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n})$$

اما این ایدال آخری مشمول در ایدال تولید شده توسط همه‌ی $a_i b_{ij}$ ها در A است. لذا با توجه به آنچه گفته شد $1 \in (a_1 b_{11}, \dots, a_1 b_{1z_1}, \dots, a_n b_{n1}, \dots, a_n b_{nz_n})$ و بنابراین

$$\{\theta_j \circ \eta_i : A \longrightarrow A[(a_i b_{ij})^{-1}] \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, z_i\}\}^{op} \in K(A)$$

□

و حکم ثابت است.

۶. C^∞ -حلقه‌های آزاد و متناهی مولد

C^∞ -حلقه‌ها در واقع تعمیمی از مفهوم $\mathbb{R}$ -جبرها هستند. از [۹، ص. ۱۵] خاطر نشان می‌کنیم که A یک C^∞ -حلقه نامیده می‌شود هرگاه نه تنها متناظر با همه‌ی نگاشت‌های چندجمله‌ای، بلکه متناظر با هر نگاشت هموار $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، نگاشت $A(f): A^n \rightarrow A^m$ موجود باشد به طوری که تصویرگرها، نگاشت‌های همانی و ترکیب‌ها تحت این تناظر حفظ شوند، یعنی:

الف) $A(\pi_i) = \pi_i$ برای هر $1 \leq i \leq n$ ، که در آن $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تصویرگر مختصاتی i ام است
 ب) $A(id_{\mathbb{R}^n}) = id_{A^n}$ ، که در آن $id_{\mathbb{R}^n}$ و id_{A^n} به ترتیب توابع همانی روی $\mathbb{R}^n$ و A^n هستند،
 پ) اگر $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ دو تابع هموار باشند آنگاه $A(q \circ p) = A(q) \circ A(p)$.
 متذکر می‌شویم که از تعریف به سادگی نتیجه می‌شود که برای پیدا کردن یک C^∞ -حلقه مانند A کافی است $A(f)$ را برای هر نگاشت هموار $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، یعنی به ازای $m = 1$ ، تعریف کنیم.
 منظور از یک C^∞ -همریختی نیز یک همریختی حلقه‌ای است که نگاشت‌های هموار متناظر را حفظ کند، یعنی برای دو C^∞ -حلقه A و B ، همریختی حلقه‌ای $\varphi: A \rightarrow B$ یک C^∞ -همریختی است هرگاه برای هر نگاشت هموار $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ نمودار زیر جابجایی باشد.

$$(۶) \quad \begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi^n} & B^n \\ A(f) \downarrow & & \downarrow B(f) \\ A^m & \xrightarrow{\varphi^m} & B^m \end{array}$$

نکته ۱.۶. ویلیام لوویر^۸ ریاضیدان بزرگ آمریکایی، ساختار یک C^∞ -حلقه را این طور بیان می‌کند که، اگر ∞ را رسته‌ای در نظر بگیریم که اشیای آن فضاها $\mathbb{R}^n$ که $n \geq 0$ و ریخت‌های آن همه‌ی توابع هموار باشند، آنگاه یک C^∞ -حلقه‌ی A ، در واقع یک تابعگون حافظ حاصل ضرب‌های متناهی به صورت $\text{Sets} \rightarrow A: \infty$ است. همچنین یک C^∞ -همریختی نیز، چیزی جز یک تبدیل طبیعی بین دو تابعگون از نوع فوق نیست.

با توجه به نکته فوق برای هر C^∞ -حلقه A ، از آن جایی که اعمال جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی به عنوان نگاشت‌های $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ روی $\mathbb{R}$ هموارند، لذا ریخت‌هایی در ∞ می‌باشند. حال اگر تصاویر اعمال جمع و ضرب $\mathbb{R}$ تحت تابعگون A را به عنوان اعمالی روی مجموعه‌ی $A(\mathbb{R})$ در نظر بگیریم، در این صورت $A(\mathbb{R})$ ساختار یک حلقه جابجایی را خواهد داشت که آن را نیز دومرتبه با A نمایش می‌دهیم. در حقیقت، C^∞ -حلقه A (به مفهوم نظریه جبری لوویر) به هر شی $\mathbb{R}^n$ از رسته ∞ ، مجموعه $A(\mathbb{R})^n$ ، که به صورت A^n نمایش داده می‌شود، را نظیر می‌کند.

قضیه ۲.۶. یک ایدال I (به معنای حلقه‌ای متداول آن) در یک C^∞ -حلقه A یک C^∞ -همنهشتی است. از این رو، همریختی کانونی $p: A \rightarrow A/I$ یک ساختمان C^∞ -حلقه‌ای روی A/I القا می‌کند و p یک C^∞ -همریختی است.

اثبات. برای هر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ نگاشت $A/I(f): (A/I)^n \rightarrow A/I$ را با ضابطه

$$A/I(f)(a_1 \bmod I, \dots, a_n \bmod I) = A(f)(a_1, \dots, a_n) \bmod I$$

تعریف می‌کنیم. هر گاه $a_i \equiv b_i \bmod I$ برای هر $1 \leq i \leq n$ ، در این صورت $a_i - b_i \in I$ ، برای هر $1 \leq i \leq n$. اما بنابر لم هادامار [۹] نگاشت‌های هموار $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ موجودند به قسمی که $x = (x_1, \dots, x_n)$ و

^۸ F. W. Lawvere

$\mathbb{R}^n$ در $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) g_i(x, y).$$

چون A این تساوی را حفظ می کند بنابراین

$$A(f)(a_1, \dots, a_n) - A(f)(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) A(g_i)(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in I$$

لذا

$$A/I(f)(a_1 \bmod I, \dots, a_n \bmod I) = A/I(f)(b_1 \bmod I, \dots, b_n \bmod I).$$

بنابراین $A/I(f)$ خوش تعریف است. بررسی خواص دیگر ذکر شده در قضیه راست هستند. $\square$

حال وقت آن رسیده است که در اینجا مثال‌هایی از C^∞ -حلقه‌ها ذکر کنیم.

مثال ۳.۶. C^∞ -حلقه $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ، حلقه‌ای است که مجموعه زمینه آن، مجموعه تمام توابع هموار $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ می باشد و اعمال جمع و ضرب حلقه‌ای نیز در آن به صورت جمع و ضرب نقطه‌ای در $\mathbb{R}$ تعریف می شوند. به مفهوم لوویر نیز، $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ یک تابعگون به صورت $\text{Sets} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n): C^\infty$ می باشد که به هر تابع هموار $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ، تابع

$$\varphi_*: (C^\infty(\mathbb{R}^n))^m \rightarrow (C^\infty(\mathbb{R}^n))^k$$

را با ضابطه‌ی $\varphi_*(f_1, \dots, f_m) = \varphi \circ (f_1, \dots, f_m)$ نظیر می کند.

مثال ۴.۶. حلقه‌ی دوگان اعداد، یعنی حلقه‌ی

$$\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R}[X]/(X^2) = \{a + b\varepsilon; a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

نیز یک C^∞ -حلقه است.

در اینجا، قبل از معرفی ساختار $\mathbb{R}[\varepsilon]$ به شکل لوویر، باید توجه داشته باشیم که هر نگاشت هموار $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ با استفاده از لم هادامار، برای یک نگاشت هموار h ، می تواند به صورت $g(x) = g(0) + xg'(0) + x^2h(x)$ نمایش داده شود، که در آن g' مشتق g است. بنابراین داریم:

$$(V) \quad g(x) \bmod (x^2) = g(0) + xg'(0) \bmod (x^2).$$

به عبارت دیگر، g به پیمانه x^2 یک چند جمله ای است. بنابراین $\mathbb{R}[\varepsilon] \cong C^\infty(\mathbb{R})/(x^2)$. لذا با توجه به قضیه ۲.۶، $\mathbb{R}[\varepsilon]$ دارای ساختار C^∞ -حلقه‌ای القا شده از $C^\infty(\mathbb{R})$ می باشد. بنابراین تابعگون $\text{Sets} \rightarrow C^\infty: \mathbb{R}[\varepsilon]$ ، به هر نگاشت هموار $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، نگاشت $f(x_1, \dots, x_n): C^\infty(\mathbb{R})/(x^2)^n \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})/(x^2)$ را با ضابطه‌ی زیر نسبت می دهد.

$$\begin{aligned} f_*(g_1 \bmod (x^2), \dots, g_n \bmod (x^2)) &= f \circ (g_1, \dots, g_n)(\varepsilon) \bmod (x^2) \\ &= f \circ (g_1, \dots, g_n)(0) + \varepsilon(f \circ (g_1, \dots, g_n))'(0) \bmod (x^2) \\ &= f(g_1(0), \dots, g_n(0)) + \\ &\quad \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(0), \dots, g_n(0)) \cdot g'_i(0) \bmod (x^2) \end{aligned}$$

که در تساوی‌های فوق، از آن جایی که $\mathbb{R}[\varepsilon]$ دارای ساختار C^∞ -حلقه‌ای القا شده از $C^\infty(\mathbb{R})$ می باشد، لذا با توجه به **مثال ۳.۶**، تساوی اول برقرار بوده و از طرفی با توجه به رابطه (V) و از آنجایی که نگاشت $f \circ (g_1, \dots, g_n) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ، تساوی سوم بنابراین تساوی دوم برقرار می باشد. در ضمن، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای و این که $\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ ، تساوی سوم

برقرار است.

اکنون در اینجا می‌خواهیم برای $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ، به عنوان یک C^∞ -حلقه آزاد، یک پایه بسازیم. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۵.۶. C^∞ -حلقه $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ، متشکل از توابع هموار با n متغیر، یک C^∞ -حلقه‌ی آزاد با n مولد است که این مولدها همان خانواده‌ی تصویرگرهای $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، π_i ، برای $1 \leq i \leq n$ ، هستند.

اثبات. [۹، گزاره I.۱.۱]. □

حلقه A را یک C^∞ -حلقه متناهی مولد می‌نامیم هرگاه A با حلقه‌ای به شکل $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ یکرخت باشد. گیریم $(C^\infty - \text{rings})_{fg}$ رسته C^∞ -حلقه‌های متناهی مولد و C^∞ -همریختی‌های بین آنها باشد. این حلقه‌ها از این جهت جالب توجه هستند که C^∞ -همریختی بین آنها را می‌توان به سادگی توصیف نمود. به این موضوع در بخش بعد می‌پردازیم.

۷. سایت زاریسکی روی دوگان رسته C^∞ -حلقه‌های متناهی مولد

در این بخش به جنبه هندسی C^∞ -حلقه‌ها خواهیم پرداخت. به عنوان گام اول رسته $\mathbb{L}$ از مکان‌های هندسی یا C^∞ -چند گونا‌های صوری را معرفی می‌کنیم. اینها دقیقاً دوگان‌های C^∞ -حلقه‌های متناهی مولدند. به بیان بهتر، رسته $\mathbb{L}$ را دوگان رسته C^∞ -حلقه‌های متناهی مولد در نظر می‌گیریم. هر شی $\mathbb{L}$ را یک مکان هندسی نامیده و آن را با ℓA نمایش می‌دهیم که به آن دوگان صوری A می‌گوییم. در ضمن برای هر دو C^∞ -حلقه متناهی مولد $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ و $B = C^\infty(\mathbb{R}^m)/J$ ، منظور از یک ریخت $\ell A \rightarrow \ell B$ در $\mathbb{L}$ ، یک C^∞ -همریختی $A \rightarrow B$ است. همان‌گونه که در بخش قبل متذکر شدیم C^∞ -همریختی‌های از این نوع به روشنی قابل توصیف‌اند. به لم زیر توجه کنید.

لم ۱.۷. برای دو C^∞ -حلقه‌ی متناهی مولد $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ و $B = C^\infty(\mathbb{R}^m)/J$ ، مجموعه‌ی تمام ریخت‌ها به شکل $\ell A \rightarrow \ell B$ در $\mathbb{L}$ ، در تناظر یک به یک با مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم‌ارزی از توابع هموار $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، φ می‌باشد، که در ویژگی زیر

$$(A) \quad f \in I \implies f \circ \varphi \in J$$

صدق می‌کنند. ضمناً می‌گوییم φ و φ' هم‌ارزند، اگر برای تصویرگرهای $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، π_i ، که $1 \leq i \leq n$ ، داشته باشیم $\pi_i \circ \varphi - \pi_i \circ \varphi' \in J$.

اثبات. در ابتدا ثابت می‌کنیم که متناظر با ریخت دلخواه $\ell A \rightarrow \ell B$ در $\mathbb{L}$ ، یک کلاس هم‌ارزی از توابع هموار $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، φ موجود است به طوری که در رابطه (A) صدق می‌کند. برای این منظور، از آنجا که $\mathbb{L} = ((C^\infty - \text{rings})_{fg})^{op}$ ، بنابراین هر ریخت $\ell A \rightarrow \ell B$ در $\mathbb{L}$ ، در واقع متناظر با یک C^∞ -همریختی

$$\bar{\varphi} : C^\infty(\mathbb{R}^n)/I \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m)/J$$

در رسته C^∞ -حلقه‌های متناهی مولد می‌باشد. از طرفی بنابر قضیه ۵.۶، $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ توسط مجموعه

$$\{\pi_i \bmod I \mid 1 \leq i \leq n\}$$

تولید می‌شود. بنابراین مجموعه‌ی

$$\{h_i \bmod J \mid h_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}\}_{1 \leq i \leq n}$$

مولدی برای $Im \bar{\phi}$ خواهد بود، که در آن $\bar{\phi}(\pi_i \bmod I) = h_i \bmod J$. لذا متناظر با نگاشت $\bar{\phi}$ ، نگاشت هموار $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ را با مولفه‌های $\varphi = (h_1, \dots, h_n)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(f \bmod I) &= \bar{\phi}(f \circ (\pi_1, \dots, \pi_n) \bmod I) \\ &= f \circ (h_1, \dots, h_n) \bmod J \\ &= f \circ \varphi \bmod J.\end{aligned}$$

در ضمن، اگر $f \in I$ ، آنگاه با توجه به هم‌ریختی بودن $\bar{\phi}$ ، $f \circ \varphi \in J$. از طرف دیگر، متناظر با هر کلاس هم‌ارزی $[\varphi]$ که در رابطه (۸) صدق می‌کند، نیز می‌توانیم C^∞ -هم‌ریختی

$$\bar{\phi}: C^\infty(\mathbb{R}^n)/I \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m)/J$$

را با ضابطه‌ی

$$\bar{\phi}(f \bmod I) = f \circ \varphi \bmod J$$

تعریف کنیم. از آن جایی که φ و φ' هایی که به پیمانه‌ی J دارای مولفه‌های یکسان هستند، هم‌ارز در نظر گرفته شده‌اند، با توجه به رابطه (۸)، $\bar{\phi}$ خوش‌تعریف می‌باشد. $\square$

اکنون با در نظر گرفتن $R = \ell C^\infty(\mathbb{R})$ ، به عنوان خط اعداد حقیقی، از آنجایی که $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ و R^n هر دو دارای n مولد می‌باشند، لذا داریم $R^n \cong \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)$. پس در رسته $\mathbb{L}$ ، مکان هندسی صوری متناظر به هر شی $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ را می‌توانیم به صورت

$$\begin{aligned}\ell A &= \{x \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f(x) = 0, f \in I \text{ هر } f\} \\ &= \{x \in R^n \mid f(x) = 0, f \in I \text{ هر } f\}\end{aligned}$$

نیز نمایش دهیم. به این دلیل رسته $\mathbb{L}$ را گاهی اوقات رسته C^∞ -چندگونا‌های صوری نیز می‌نامیم. برای تعریف توپولوژی گروتندیک روی رسته $\mathbb{L}$ به عقب‌برها در این رسته یا به طور معادل به جلوبرها در رسته $(C^\infty - \text{rings})_{fg}$ نیاز داریم. برای این منظور در ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۲.۷. مکان تک نقطه‌ای $\ell C^\infty(\mathbb{R})/(x) = \{x \in R \mid x = 0\}$ ، شی نهایی در رسته $\mathbb{L}$ است.

اثبات. نتیجه از این حکم به دست می‌آید که $\ell C^\infty(\mathbb{R})/(x) \cong C^\infty(\{*\})$. [۹، ص. ۷۲] $\square$

اگر A و B دو C^∞ -حلقه باشند شی هم حاصل ضرب آنها را به صورت $A \otimes_\infty B$ و نگاشت‌های شمول کانونی مربوطه را با $A \xrightarrow{i_A} A \otimes_\infty B \xleftarrow{i_B} B$ نشان می‌دهیم. حال برای هر دو C^∞ -حلقه متناهی مولد $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ و $B = C^\infty(\mathbb{R}^m)/J$ ، در لم بعد می‌خواهیم شی هم حاصل ضرب آنها را معرفی کنیم.

لم ۳.۷. برای هر دو C^∞ -حلقه متناهی مولد $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ و $B = C^\infty(\mathbb{R}^m)/J$ در رسته $(C^\infty - \text{rings})_{fg}$ ، شی هم حاصل ضرب آنها به صورت

$$C^\infty(\mathbb{R}^n)/I \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^m)/J \cong C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)/(I, J)$$

است که در آن (I, J) ایدال تولید شده توسط مجموعه‌ی $\{f \circ \pi_1; f(w) \in I\} \cup \{g \circ \pi_2; g(x) \in J\}$ ، با تصویرگرهای

$$\mathbb{R}^n \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^m$$

می‌باشد.

□

اثبات. [۹، ص. ۲۲].

حال می‌خواهیم هم‌برابرساز دو ریخت در رسته‌ی $(C^\infty - \text{rings})_{\text{fg}}$ را به‌دست آوریم. فرض کنیم

$$\Phi, \Psi : C^\infty(\mathbb{R}^n)/I \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m)/J$$

دو C^∞ -همریختی باشند. بنا به لم ۱.۷، Φ و Ψ به ترتیب متناظر به دو نگاشت هموار $\varphi(x), \psi(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ هستند. فرض کنیم K ایدال تولیدشده توسط مجموعه

$$\{f \circ (\varphi - \psi)(x) \mid f(w) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\} \cup \{g(x) \mid g(x) \in J\}$$

باشد. فرض کنیم $i_\Psi^* : C^\infty(\mathbb{R}^m)/J \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m)/K$ -همریختی القایی توسط نگاشت همانی $id_{\mathbb{R}^m}(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یعنی

$$i_\Psi^*(g(x) \bmod J) = g(x) \bmod K.$$

با توجه به تعریف K ، i_Ψ^* خوش‌تعریف است. همچنین $i_\Psi^* \Phi = i_\Psi^* \Psi$ زیرا برای هر $f(w) \bmod I$ داریم:

$$\begin{aligned} i_\Psi^* \Phi(f(w) \bmod I) &= f \circ \varphi \circ id_{\mathbb{R}^m}(x) \bmod K \\ &= f \circ \psi \circ id_{\mathbb{R}^m}(x) \bmod K \\ &= i_\Psi^* \Psi(f(w) \bmod I) \end{aligned}$$

توجه می‌کنیم که چون $f \circ (\varphi - \psi)(x) \in K$ لذا تساوی دوم برقرار است. اکنون فرض کنیم $\Theta : C^\infty(\mathbb{R}^m)/J \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^t)/L$ ، $\Theta \Phi = \Theta \Psi$ -همریختی باشد که پس بنا به لم ۱.۷، Θ متناظر به یک نگاشت هموار $\theta(z) : \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}^m$ می‌باشد. چون $\Theta \Phi = \Theta \Psi$ ، لذا برای هر $f(w) \bmod I$ داریم

$$(۹) \quad f \circ \varphi \circ \theta(z) \bmod L = f \circ \psi \circ \theta(z) \bmod L.$$

حال نگاشت هموار $\theta(z) : \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$\eta : C^\infty(\mathbb{R}^m)/K \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^t)/L$$

C^∞ -همریختی متناظر با آن باشد. یعنی، برای $f(x) \bmod K$ داریم $\eta(f(x) \bmod K) = f \circ \theta(z) \bmod L$. در این صورت η خوش‌تعریف است. زیرا اگر $f(x) \in K$ آنگاه نگاشت‌های $g_1(w), \dots, g_r(w) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ، $h_1(x), \dots, h_l(x) \in J$ و $\nu_1(x), \dots, \nu_l(x), \mu_1(x), \dots, \mu_r(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ موجودند به قسمی که

$$f(x) = \sum_{i=1}^r (g_i \circ (\varphi - \psi)(x)) \mu_i(x) + \sum_{j=1}^l h_j(x) \nu_j(x).$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(\theta(z)) = \sum_{i=1}^r g_i \circ (\varphi - \psi)(\theta(z)) \mu_i(\theta(z)) + \sum_{j=1}^l h_j(\theta(z)) \nu_j(\theta(z))$$

توجه می‌کنیم که در سطر آخر برای هر $1 \leq i \leq r$ ، چون $g_i(w) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لذا بنا بر رابطه (۹) به‌دست می‌آوریم $g_i \circ (\varphi - \psi)(\theta(z)) \in L$. در ضمن از آنجایی که برای هر $1 \leq j \leq l$ ، $h_j(x) \in J$ لذا بنا بر خوش‌تعریفی Θ ، $h_j(\theta(z)) \in L$. از طرفی نگاشت‌های $\mu_i(\theta(z))$ و $\nu_j(\theta(z))$ متعلق به $C^\infty(\mathbb{R}^t)$ می‌باشند. بنابراین با توجه به ایدال بودن

L خواهیم داشت $f(\theta(z)) \in L$.

حال ثابت می‌کنیم $\Theta \circ i^* = \eta$. برای این منظور، برای هر $f(x) \bmod J$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\eta \circ i^*(f(x) \bmod J) &= f \circ id_{\mathbb{R}^m}(\theta(z)) \bmod L \\ &= f(\theta(z)) \bmod L \\ &= \Theta(f(x) \bmod J).\end{aligned}$$

حال از آنجایی که η را براساس ضابطه‌ی Θ تعریف نموده‌ایم، لذا η یکتا می‌باشد. بنابراین $C^\infty - \text{حلقه } C^\infty(\mathbb{R}^m)/K$ به همراه $C^\infty - \text{همریختی } i^*$ شی هم‌برابرساز Φ و Ψ می‌باشد.

بنابراین با توجه به لم‌های ۲.۷ و ۳.۷ و توضیحات فوق، جلوبورها در رسته $\mathbb{L} = (C^\infty - \text{rings})_{\text{fg}}^{\text{op}}$ موجودند. (به قضیه ۲.۸.۲ از [۲] مراجعه کنید).

اکنون با توجه به مطالب بیان شده می‌توان همانند آنچه که برای رسته $((k - \text{Alg})_{\text{fp}})^{\text{op}}$ عمل شد، سایت زاریسکی را روی رسته $\mathbb{L}$ ساخت. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۴.۷. برای مکان هندسی صوری A ، خانواده‌ی $\{g_i : \ell A[a_i^{-1}] \rightarrow \ell A\}_{i=1}^n$ (با تقریب یکریختی) متعلق به $K(A)$ است که K پایه سایت زاریسکی روی رسته $\mathbb{L}$ می‌باشد، اگر و تنها اگر عناصر $a_1, \dots, a_n \in A$ موجود باشند به طوری که $1 \in (a_1, \dots, a_n)$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، g_i ها همان دوگان $C^\infty - \text{همریختی‌های جهانی}$ $A[a_i^{-1}] : A \rightarrow A[a_i^{-1}]$ باشند.

□

اثبات. اثبات مشابه قضیه ۵.۵ است [۹، لم VI.۱.۱].

۸. تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از داور محترم به خاطر راهنمایی‌های ارزنده بسیار سپاس‌گزاری می‌نمایند.

مراجع

- [1] M. F. Atiyeh and I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [2] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebras 1 and 3*, Cambridge University Press, 1994.
- [3] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [4] A. Grothendieck, *The cohomology theory of abstract algebraic varieties*, Proc. Internat. Congress Math., Cambridge Univ. Press, New York, 1960 103–118.
- [5] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [6] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [7] R. Lavendhomme, *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*, Kluwer, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [8] S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [9] I. Moerdijk and G. E. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, 1358, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1999
- [11] M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, New York, Cambridge University Press, 1988.
- [12] B. R. Tennison, *Sheaf Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, England-New York-Melbourne, 1975.
- [13] O. Zariski, *The Fundamental Ideas of Abstract Algebraic Geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 2 1950 77–89.

زینب خان جان زاده

سمنان - میدان دانشگاه - روبروی پارک جنگلی سوکان - دانشگاه سمنان - دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی
z.khanjanzadeh@students.semnan.ac.ir

زینب خان جان زاده متولد شهریور ماه ۱۳۶۳ در شهر بابل است. وی در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه زنجان شد و همچنین در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه سمنان شد. وی هم اکنون دانشجوی دکتری ریاضی در آن دانشگاه می باشد.

علی معدنشکاف

دانشگاه سمنان - دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی
amadanshekaf@semnan.ac.ir

علی معدنشکاف دانشیار گروه ریاضی دانشگاه سمنان است. وی در سال ۱۳۷۸ از دانشگاه تربیت مدرس تهران در مقطع دکتری ریاضی گرایش جبر فارغ التحصیل شد. در حال حاضر علائق پژوهشی وی نظریه نمایش تکواریها، نظریه گراف و نظریه توپوسها است.

