

باسط چیست؟

پیتر سرنگ
مترجم: نفیسه رحمانی

چکیده. نوشته حاضر ترجمه مقاله زیر است:

P. Sarnak, What is... an expander?, *Notices Amer. Math. Soc.*, 51 no. 7 (2004) 762-763.

مقدمه مترجم

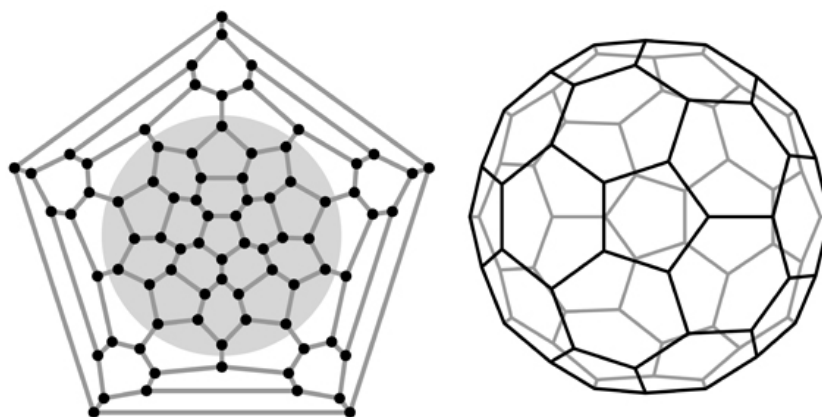
پراکندگی یک گراف همراه با همبندی بسیار قوی، ویژگی است که ساختار باسطها را مورد توجه قرار داد. این ساختار تناقض گونه موجودیت آنها را نیز تا مدت ها انکار می کرد. پس از مدتی اگرچه پینسکر^۱ توانست با یک بحث شمارشی وجود آنها را اثبات کند، اما هنوز برای شناختی گسترده، شخص نیاز به ساختاری صریح داشت. با ادامه این شناخت، این ویژگی، کاربرد باسطها را هرچه بیشتر در ریاضیات و علوم دیگر آشکار نمود. آنچه در این مقاله مورد نظر است ارائه یک تعریف رسمی است که رفته رفته توسط بسیاری تکمیل گردیده و ساختار باسطها را هرچه بیشتر روشن نموده است.

باسط چیست؟

منظور از گراف $X = (V, E)$ ، مجموعه ی متناهی V از راس ها و مجموعه ی E از زوج هایی از این رئوس است که یال نامیده می شود. به زبان عامیانه، یک باسط یک گراف شدیداً همبند پراکنده است. این وجه به ظاهر تناقض گونه ی شدیداً همبندی و در عین حال پراکندگی از یک سو وجود چنین گراف هایی را غیر شهودی و از سوی دیگر آنها را کاملاً مفید می سازد. از کاربردهای آن در ریاضیات محض، برای مثال، می توان به ساخت ساده گراف هایی با کمر (طول کوتاه ترین دور بسته بدون پیمایش معکوس) و عدد رنگی بزرگ (حداقل تعداد رنگ های لازم برای رنگ آمیزی رأس ها به طوری که رأس های مجاور رنگ های متفاوت داشته باشد) در ترکیبیات و به ساخت گروه های متناهی تولید شده که نمی توانند به طور یکنواخت در یک فضای هیلبرت نشانده شوند در آنالیز تابعی، اشاره نمود؛ مثال های نقض مربوط به حدس بام-کنز^۲ برای عمل گروه ها از جمله کاربردهای دیگر آن می باشد، اما نقش عمده باسطها در کاربردهایی در علم کامپیوتر نظری بوده است؛ در بین آنها می توان طراحی شبکه های ارتباطی بسیار کارا، ساختارهای کدهای تصحیح خطا، کدگذاری و کدگشایی بسیار کارآمد، غیر تصادفی کردن الگوریتم های تصادفی و تحلیل الگوریتم ها در نظریه گروه محاسباتی (برای مثال [۳]) و مراجع موجود در آن را ببینید) را نامبرد.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۲/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۶/۱۷

^۱ Pinsker ^۲ Baum-Connes



این گراف ۸۰ رأس دارد که نزدیک به بزرگترین گراف رامانوجان مسطح شناخته شده با ۸۴ رأس می‌باشد. کمر آن ۵ و ثابت انبساط آن $1/4$ است (چنانکه به صورت دایره سایه دار مشخص شده است)؛ λ_1 توسط گمبر^۳ محاسبه شده است که برابر با $2/81811\dots$ می‌باشد. این گراف را می‌توان با جمع کردن پنج ضلعی‌ها بر روی یک دوازده وجهی ساخت.

تعریف رسمی از باسط به این صورت است که فرض کنید k یک عدد صحیح بزرگتر از ۲ باشد و X یک گراف k -منظم (به این معنی که هر رأس $v \in V$ دقیقاً دارای k همسایه می‌باشد). ثابت چيگر^۴ h از X به این صورت تعریف می‌شود:

$$h(X) = \min_{\emptyset \subset F \subset V} \frac{|\partial F|}{\min(|F|, |V - F|)},$$

جایی که ∂F مجموعه همه یال‌ها از F به مکمل آن، $V - F$ ، است و $|\partial F|$ عدد اصلی آن می‌باشد. همچنین X یک $[n, k, h]$ باسط نامیده می‌شود جایی که $|X| = n$. توجه کنید که $h > 0$ اگر و تنها اگر X همبند باشد و همچنین اگر $|F| \leq n/2$ باشد، آنگاه $|\partial F| \geq h|F|$ ؛ بنابراین اگر h کوچک نباشد، آنگاه هر زیر مجموعه‌ی F دارای تعداد زیادی همسایه خارج از F است (بنابراین نام باسط برای آن با معنی است).

توسط [خانواده] باسط‌ها، یک دنباله از چنین $[n, k, h]$ ‌هایی را در نظر می‌گیریم که $k > 0$ ، ε_0 ثابت باشد و $h \geq \varepsilon_0$ ، زمانی که $n \rightarrow \infty$. به سادگی می‌توان مشاهده کرد برای اینکه چنین اتفاقی رخ دهد باید k حداقل ۳ باشد (از این پس با این فرض کار را دنبال می‌کنیم). این مطلب که $h \geq \varepsilon_0 > 0$ ، این اطمینان را حاصل می‌کند که این گراف‌ها شدیداً همبندند در حالی که ثابت بودن k (و $|E| = \frac{kn}{2}$) پراکندگی آن‌ها را تضمین می‌کند.

شاید وجود باسط‌ها امری شگفت‌انگیز به نظر برسد. اولین اثبات از وجود آن‌ها توسط پینسکر ارائه شد که بر یک بحث شمارشی استوار بود. فضای احتمالی همه‌ی $X_{n,k}$ ‌ها (گراف‌های k -منظم که روی n رأس علامت‌گذاری شده‌اند)، جایی که $X_{n,k}$ با احتمال یکسان انتخاب می‌شوند را در نظر بگیرید. در این صورت به ازای $k \geq 3$ ، $\varepsilon(k) > 0$ موجود است به طوری که احتمال آن‌که $h(X_{n,k}) \geq \varepsilon$ ، زمانی که $n \rightarrow \infty$ ، به ۱ میل می‌کند.

در عمل، شخص نیاز به ساختاری ساده دارد. یک ابزار مفید برای بدست آوردن آن روش طیفی ذیل است. برای $X = X_{n,k}$ مفروض، A را ماتریس متقارن $n \times n$ که ستون‌ها و سطرهاى آن با رأس‌های $v \in V$ اندیس گذاری شده‌اند، در نظر بگیرید. اگر رأس v به رأس w متصل باشد، درایه v, w ماتریس A را ۱ و در غیر این صورت ۰ در نظر می‌گیریم. بردار $(1, 1, \dots, 1)$ یک بردار ویژه A با مقدار ویژه k است. مقادیر ویژه A حقیقی و در بازه $[-k, k]$ قرار دارد. $\lambda_1(k)$ را بزرگترین مقدار ویژه A بعد از k در نظر می‌گیریم. نامساوی‌های بعدی که مشابه نامساوی‌های چيگر و باسر^۵ در هندسه

⁴ Cheeger ⁵ Buser

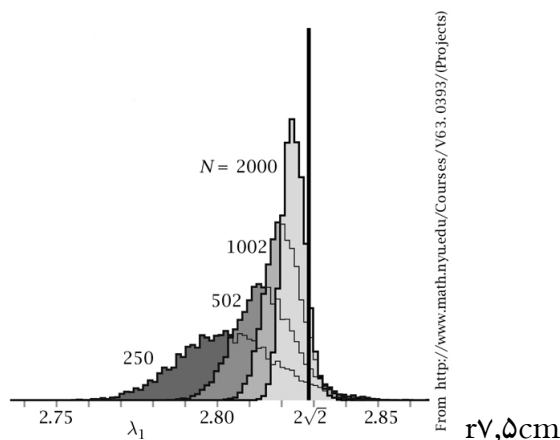
دیفرانسیل هستند، $h(X)$ را به شکاف میان $\lambda_1(X)$ و k مرتبط می‌کند که توسط تنر^۶، آلن^۷ و میلمن^۸ انجام گرفته است:

$$\frac{k - \lambda_1(X)}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2k(k - \lambda_1(X))}.$$

بنابراین $X_{n,k}$ یک خانواده انبساطی است اگر و تنها اگر یک کران پایین یکنواخت بر روی شکاف طیفی داشته باشد و هر چه این شکاف بزرگتر باشد، برای انبساط بهتر است. با استفاده از این موضوع و خارج قسمت گروه‌های گسسته ساده نامتناهی با خاصیت کاژدان^۹ T^1 (خاصیتی است که نمایش بدیهی در فضای نمایش‌های یک‌گانه متمایز می‌شوند)، مارگلِس^{۱۰} اولین مثال‌ها از باسط‌های ساده را ارائه کرده است. یک حد برای اینکه چه اندازه شکاف طیفی می‌تواند بزرگ باشد وجود دارد (آلن-بیانا^{۱۱}): برای k ثابت

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(X_{n,k}) \geq 2\sqrt{k-1}.$$

$\liminf$ بر روی همه $X_{n,k}$ گرفته می‌شود. یک $X_{n,k}$ (یا ترجیحا یک دنباله از چنین $X_{n,k}$ ‌ها با $n \rightarrow \infty$ و k ثابت) یک گراف رامانوجان^{۱۲} نامیده می‌شود، اگر $\lambda_1(X_{n,k}) \leq 2\sqrt{k-1}$.



توزیع فراوانی مقدارویژه λ_1 از ماتریس مجاورت در نمونه‌هایی از گراف‌های تصادفی ۳-منظم با اندازه N (داده‌ها توسط ناویکف^{۱۳} فراهم شده است)

با نگاهی به مطالب فوق، چنین گرانی حداقل به اندازه‌ای که شکاف طیفی انبساطی مورد نظر است، بهینه می‌باشد. این یک حقیقت خوشایند است که اگر $k = q + 1$ و q توانی از یک عدد اول باشد آنگاه گراف‌های رامانوجان موجود هستند. این ساختارها براساس توصیفات خیلی ساده، مانند گراف‌های کیلی $PGL(2, \mathbb{F}_q)$ می‌باشند [۱، ۲] (گراف‌های کیلی گراف‌هایی هستند که مجموعه رئوس آن، عضوهای یک گروه G و یال‌های آن متناظر با $g \rightarrow gg_1$ می‌باشند که در آن g_1 متعلق به مجموعه‌ای از مولدهاست). برای k که به این صورت نباشد یک سوال جالب وجود دارد: آیا گراف رامانوجان وجود دارد؟ فریدمن^{۱۴} اخیراً نشان داده است برای k ثابت و $\varepsilon > 0$ ، احتمال آنکه $\lambda_1(X_{n,k}) \leq 2\sqrt{k-1} + \varepsilon$ زمانی که $n \rightarrow \infty$ به ۱ میل می‌کند. بنابراین این گراف تصادفی به صورت مجانبی رامانوجان است. تعدادی از آزمایش‌های شمارشی جالب (نوکیف^{۱۵}، <http://www.math.nyu.edu/Courses/V63.0393/honorsmathlab/projects>) نشان داده‌اند که احتمال اینکه یک گراف تصادفی رامانوجان باشد مطابق با پادتقارنی بودن توزیع تریسی-ویدم^{۱۶} در تئوری ماتریس تصادفی (بویژه "دسته متعامد جمعی گاوسی") اندکی بزرگتر از ۵/۰ است.

⁶ Tonner ⁷ Alon ⁸ Milman ⁹ Kazhdan ¹⁰ Margulis ¹¹ Boppana ¹² Ramanujan ¹⁴ J.Friedman ¹⁵ T. Novikoff ¹⁶ Tracy-Widom

در مرجع [۳] نشان داده شده است که شخص چگونه می‌تواند "حاصلضرب زیگزاگی گراف" (مفهوم مرتبط با حاصلضرب نیم مستقیم گروه‌ها، زمانی که گراف‌ها کیلی می‌باشند) را بکار برد تا بدین وسیله ساختارهای ساده از باسط‌ها را ارائه دهد. ساختار آن‌ها از این خانواده به صورت استقرائی است که در آن از حاصلضرب زیگزاگی در هر مرحله استفاده می‌شود. این ساختار دارای انعطاف پذیری فوق العاده‌ای است که به آن‌ها اجازه می‌دهد باسط‌های ساده‌ای بسازند که مجموعه‌های کوچک را به طور تقریباً بهینه بسط می‌دهند (آن‌ها را "باسط‌های کم خسارت" می‌نامند). این پیچش اضافه در تعدادی از کاربردها مفید واقع می‌شود و این وجه را نمی‌توان از تحلیل شکاف طیفی نتیجه گرفت.

مراجع

- [1] A. Lubotzky, R. Phillips and P. Sarnak, Ramanujan graphs, *Combinatorica*, **8** (1988) 261–277.
- [2] G. Margulis, Explicit group-theoretic constructions of combinatorial schemes and their applications in the construction of expanders and concentrators, *Problems Inform. Transmission*, **24** (1988) 39–46.
- [3] O. Reingold, S. Vadhan and A. Wigderson, Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders, *Ann. of Math. (2)*, **155** (2002) 157–187.

نفیسه رحمانی

اصفهان، خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی

nf.rahmani@gmail.com

نفیسه رحمانی متولد شهریور ماه سال ۱۳۶۷ در شهر اصفهان می‌باشد. وی در سال ۱۳۸۵ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی دانشگاه اصفهان شد. سال ۱۳۸۹ در همان دانشگاه مقطع کارشناسی ارشد را تحت نظر دکتر علیرضا عبدالهی شروع نمود و در سال ۱۳۹۱ از پایان نامه خود در زمینه نظریه گروه‌ها دفاع نمود.

