

فراکتال راوزی چیست؟*

پیر آرنوکس** و ادموند هریس
مترجمان: علی نوروزی و سعید علیخانی

چکیده. بنا به یک سنت قدیمی می‌توان واژه‌های نمادین و نامتناهی را به سیستم‌های دینامیکی، نسبت داد. برعکس، برای واژه‌های نامتناهی تولید شده توسط یک روش جبری یا ترکیبیاتی، می‌توان نمایش‌های هندسی ارائه داد که این نمایش هندسی می‌تواند خانواده‌ای از مجموعه‌های خود متشابه با کران‌های فراکتالی باشد. به عنوان نمونه در این مقاله به مطالعه فراکتال‌هایی که فراکتال راوزی نامیده می‌شوند می‌پردازیم.

مقدمه

اعداد که در رابطه بازگشتی $F_1 = F_2 = 1$ ، $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ صدق می‌کنند، اعداد یا دنباله فیبوناتچی نامیده می‌شود. این دنباله برخلاف تعریف ساده‌اش امروزه کاربرد بسیاری پیدا کرده است. منظور از عدد طلایی که با τ نشان داده می‌شود، عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ می‌باشد که برابر با $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ می‌باشد. بنا به یک سنت قدیمی که به دوره‌ی هادامارد و مورس برمی‌گردد واژه‌های نمادین و نامتناهی را به سیستم‌های دینامیکی که از هندسه یا مکانیک می‌آیند، نسبت می‌دهند. برعکس ممکن است بخواهیم برای واژه‌های نامتناهی تولید شده توسط یک روش جبری یا ترکیبیاتی نمایش‌های هندسی ارائه دهیم. مثال‌های مقدماتی مانند واژه‌ی فیبوناتچی، سیستم‌های دینامیکی مشهوری را به ما می‌دهند، اما تعمیم طبیعی این مطلب ما را به خانواده‌ای متضاد از مجموعه‌های خود متشابه با کران‌های فراکتالی می‌رساند. در این مقاله به مطالعه فراکتالی که به فراکتال راوزی است، خواهیم پرداخت.

فراکتال راوزی

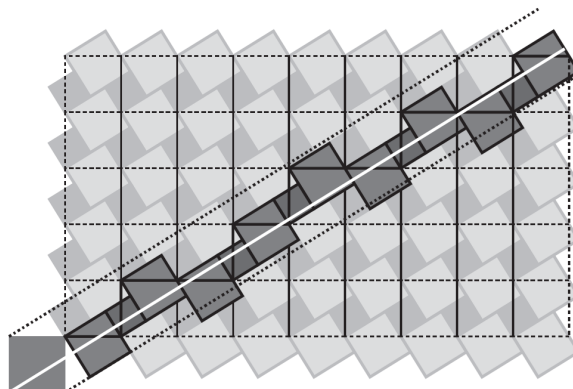
یک دنباله از واژه‌ها بر روی الفبای دو حرفی $\{a, b\}$ را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که با حرف a شروع شود و در هر مرحله a با ab و b با a جایگزاری شود. جبر مقدماتی به ما نشان می‌دهد که طول کلمات $a, ab, aba, abaab, \dots$ اعداد فیبوناتچی هستند و نسبت تکرار a و b به عدد طلایی $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ میل می‌کند. همچنین هر واژه، پیشوندی برای واژه‌ی بعدی است. به این طریق ما واژه‌ی فیبوناتچی را تعریف کردیم. واژه‌ی یکتای $abaababaab \dots$ که نسبت به قانون تعویض^۱ تغییر نمی‌کند.

* این مقاله ترجمه مقاله [۵] می‌باشد.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۵/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۴/۱۱
** نویسنده مسئول.

^۱ Rule Substitution

برای بدست آوردن درک بهتری از این واژه می‌توان آن را به صورت یک خط شکسته در صفحه نمایش داد. هر a (یا b) نشان دهنده‌ی یک گام به راست (یا یک گام به بالا) است. می‌بینیم (شکل ۱) که این خط شکسته نه تنها همانند انتظار شیب مجانبی $\frac{1}{\phi}$ را دارد بلکه یک تقریب گسسته خیلی خوب برای خط با شیب $\frac{1}{\phi}$ است.



شکل ۱: ساختار هندسی واژه فیبوناتچی

این مطلب به راحتی اثبات می‌شود. با توجه به قانون تعویض که با σ نشان می‌دهیم، ماتریس متناظر یعنی $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تنها یک جهت گسترش (جهت بردار ویژه که به آن جهت گسترش می‌گوییم.^۲) متناظر با مقدار ویژه ϕ و یک جهت انقباض^۳ متناظر با مزدوجش یعنی $\frac{1}{\phi}$ دارد. بنابراین نقاطی که به واژه‌های فیبوناتچی $\sigma^n(a)$ نسبت داده می‌شوند به فضای گسترش^۴ میل می‌کنند. به طور کلی‌تر هر واژه‌ی اولیه U از واژه متناهی فیبوناتچی را می‌توان به صورت

$$U = \sigma^k(i_k) \dots \sigma^k(i_1)i_0.$$

نوشت که در آن $i_0, i_1, \dots, i_k$ یک دنباله‌ی متناهی و i_n نیز حرف a و یا واژه‌ی تهی است. با استفاده از جهت بردارهای ویژه به عنوان محورهای مختصات، نقطه‌ی متناظر در این دستگاه توسط حاصل جمع‌های متناهی بدست می‌آید که در جهت گسترش همگرا هستند و تحت کران یک سری هندسی قرار دارند. بنابراین رئوس این خط شکسته درون یک فاصله‌ی کراندار از جهت گسترش قرار می‌گیرند.

بهتر از این، اگر با لغزاندن مربع واحد که گوشه‌ی سمت راست و بالایی آن بر روی مبدا قرار دارد در جهت گسترش یک راهرو رسم کنیم، خط شکسته درون این راهرو قرار گرفته و توسط آن مشخص می‌شود. این مطلب به ما کمک می‌کند تا یک تعریف محاسباتی از واژه فیبوناتچی ارائه دهیم: حرف n ام این واژه a است اگر $\lfloor (n+1)/\phi \rfloor - \lfloor n/\phi \rfloor$ برابر با ۱ باشد، اگر عبارت بالا برابر با ۰ باشد آنگاه حرف n ام این واژه b است. تعبیر فیزیکی این موضوع شبه بلورهای برش و تصویر هستند.^۴ بلور، یک شبکه‌ی متناوب در فضای اقلیدسی است. برای رسیدن به زیرمجموعه‌ای که به ساختار متناوب نزدیک بوده اما کاملاً متناوب نیست یک استوانه در $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید که جهت آن گنگ است و پایه‌ی آن (پنج‌جریه) نیز کراندار است. با تصویر کردن نقاط در فصل مشترک شبکه‌ی صحیح و این استوانه بر روی جهت گنگ، شبه بلور برش و تصویر متناظر با این استوانه بدست می‌آید^[۴]. برای واژه‌ی فیبوناتچی تصویر رئوس بر روی جهت انقباض یک مجموعه‌ی کراندار می‌باشد که بستر آن یک فاصله است. با تصویر کردن بر روی خط گسترش یک کاشی کاری

² Direction Contracting ³ Space Expanding ⁴ cut-and-project

خود متشابه به دست می‌آید که ساده‌ترین مثال ممکن از شبه بلور برش و تصویر می‌باشد و پنجره‌ی آن توسط فاصله‌ای که در جهت انقباض است مشخص می‌شود. (بستار یک واژه یعنی کلیه‌ی رشته‌هایی که از الحاق صفر یا چند بار این واژه بدست آمده‌است).^(۲)

یک ارائه‌ی دینامیکی نیز برای این مطلب وجود دارد. می‌توان واژه‌ی فیوناتچی را با پاک کردن حروف اول آن جابجا کرد. اگر بستار جابجایی-چرخشی^۵ واژه‌ی فیوناتچی برای توپولوژی طبیعی بر روی واژه‌های نامتناهی را در نظر گیریم یک سیستم دینامیکی خیلی ساده‌ی نمادین بدست خواهیم آورد که دامنه‌ی آن یک مجموعه‌ی شبه کانتور^۶ خواهد بود که پیوسته به فاصله‌ای که قبلاً به آن اشاره کردیم تصویر می‌کند. این تصویر کردن با توجه به عدد طلایی عمل جابجایی را به گردش تغییر می‌دهد. (با توجه به نامتناهی بودن واژه و متناهی بودن طول بازه‌ای که به آن تصویر می‌شود، عمل جابجایی تعریف شده بر روی واژه تبدیل به گردش در بازه می‌شود).^(۲)

به سادگی بر روی پنجره‌ای که با توجه به دو حرف به دو فاصله تقسیم شده قابل مشاهده است که نقطه‌ای که مربوط به راس بعدی از خط شکسته است از تعویض دو فاصله با هم بدست می‌آید. این انتقال فاصله‌ها مطابق با حرکت بسمت راست یا بالایی می‌باشد که به هر حرف نسبت داده شده است. در صورتی که دترمینان ماتریس مرتبط ± 1 باشد با تغییر قانون تعویض این خصوصیات همچنان برقرار می‌مانند.

اگر تعداد حروف را افزایش دهیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ قانون سه حرفی زیر را در نظر بگیرید:

$$b \rightarrow ac, c \rightarrow aa, aa \rightarrow ab$$

این قانون دوباره یک واژه‌ی متناهی تولید می‌کند و بنا به قضیه‌ی "پرون-فروبنیوس"^۷ خط شکسته‌ی مربوط به آن اکنون در فضای سه بعدی یک جهت مجانبی دارد. از آنجایی که تمامی مقادیر ویژه به جز مقدار ویژه پیشرو ضریبی اکیداً کوچکتر از ۱ دارند، با توجه به همین اثبات می‌توان نشان داد که خط شکسته درون یک فاصله‌ی کراندار در جهت گسترش قرار می‌گیرد.

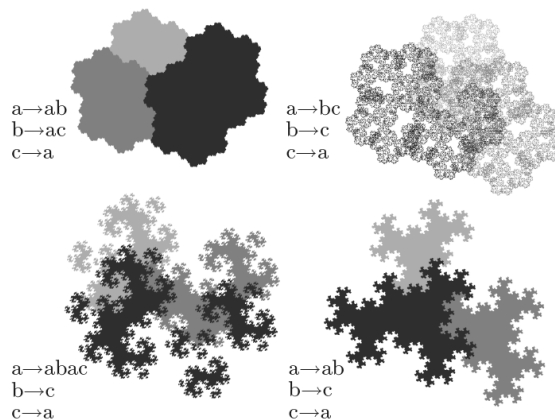
تعریف

این تعریف در ابتدا توسط "جرارد راووزی"^۸ در سال ۱۹۸۲ ارائه شده است. یک فراکتال راووزی (که به آن کاشی مرکزی نیز می‌گویند) بستار تصویر رئوس خط شکسته، بر فضای انقباض در طول خط گسترش است [۳]. استفاده از کلمه‌ی فراکتال ممکن است کمی گمراه کننده باشد، چرا که این مجموعه بستار درون خودش است و همان ابعاد صفحه انقباض را دارد. این کران‌ها هستند که تشکیل فراکتال می‌دهند. فراکتال راووزی خواص بسیار جالبی دارد. اولاً خود متشابه است، به طور دقیق‌تر می‌توان گفت که با توجه به داشتن سه حرف به سه قسمت تقسیم شده که جواب‌های "دستگاه توابعی با نمودار جهت دار"^۹ هستند. دوماً این سه تکه هم تشکیل یک الگوی متناوب و هم تشکیل یک الگوی خود متشابه (یعنی یک الگوی کوچک که در مقیاس‌های بزرگ‌تر تکرار می‌شود).^(۲) و غیر متناوب (یعنی هیچ انتقال تقارنی ندارد. انتقال تقارنی، ناوردای یک سیستم معادلات تحت یک انتقال است).^(۲) از صفحه انقباض می‌دهند. در آخر این خط شکسته تمامی نقاط صحیح در منشوری که از انتقال فراکتال راووزی در امتداد خط گسترش بدست آمده است را به هم متصل می‌کند. این نقاط بر روی یک کاشی‌کاری خود متشابه از خط گسترش تصویر می‌شوند که تشکیل یک شبه بلور برش و تصویر می‌دهند.

این سه قسمت را می‌توان به دو شکل در کنار هم قرار داد تا تشکیل یک فراکتال راووزی دهند و تعویض جای این سه قسمت تشکیل یک سیستم دینامیکی می‌دهد. این سیستم توام با یک چرخش چنبره و همچنین سیستم دینامیکی نمادین

⁵ Shift-Orbit ⁶ cantor-like set ⁷ Perron-Frobenius ⁸ Gerard Rauzy ⁹ graph-directed iterated function system

است که از قانون تعویض بدست آمده است. با توجه به این سه تکه می‌توان سه منشور تعریف کرد که یک دامنه‌ی بنیادی برای شبکه‌ی صحیح در فضای سه بعدی است. همچنین می‌توان یک تقسیم ماکاروف^{۱۰} برای خودریختی سه-چنبه که مربوط به ماتریس تعویض قانون است نیز تعریف کرد.



شکل ۲: مثال‌هایی از فراکتال‌های راووزی

فراکتال راووزی را می‌توان برای هر قانون تعویضی که ضرایب همگی مقادیر ویژه ماتریس مرتبط با آن به جز یکی کوچکتر از ۱ باشند (که به آن قوانین تعویض "پیزوت"^{۱۱} نیز می‌گویند) و دترمینان آن هم ± 1 باشد تعریف کرد. تمام مثال‌هایی که آورده شد در این شرایط صدق می‌کنند. شکل ۲ را ببینید. این مطلب باعث بوجود آمدن مساله‌ی اصلی حل نشده در این حیطه می‌شود:

حدس پیزوت

کاشی کاری یک بعدی که از هر قانون تعویض دلخواه پیزوت بر روی d حرف بدست آمده باشد و دترمینان آن ± 1 باشد یک شبه بلور برش و تصویر است.

این حدس در بسیاری از حیطه‌ها ظاهر شده و فرمول بندی‌های متفاوتی دارد. فرمول بندی دینامیکی نشان می‌دهد که سیستم نمادین (یا کاشی کاری جاری) که به چنین قانون تعویضی مربوط باشد دارای طیف گسسته‌ی خالص است. این مطلب برای دو حرف توسط "بارگ"^{۱۲} و "دایاموند"^{۱۳} به اثبات رسیده است. با وجود اینکه این مساله برای حروف بیشتر هنوز باز است، الگوریتمی وجود دارد که نشان می‌دهد این مطلب برای هر قانون تعویض خاصی برقرار است. این حدس چند پیامد مهم به همراه دارد. این پیامدها شامل به وجود آمدن یک کاشی کاری خود متشابه و تقسیم ماکاروف برای تمام خودریختی‌های تعریف شده توسط یک ماتریس می‌باشد.

تعمیم‌های مختلفی از این مطلب ارائه شده است. برای دترمینان‌های غیر واحد به مساله یک مولفه‌ی حسابی اضافه می‌شود و می‌توان برای آن یک فراکتال راووزی با استفاده از فضای p -تایی تعریف کرد. اخیراً یک چهارچوب چند بعدی برای کاشی کاری قوانین تعویض ارائه شده است که به آن خانواده‌های پیزوت گفته می‌شود. در این حالت خط گسترش با فضای زمینه کاشی کاری تعویض می‌شود. همچنین به جای مقادیر ویژه پیشرو، ماتریس بسط داده شده‌ی قانون تعویض

¹⁰ Makarov ¹¹ Pisot ¹² Barg ¹³ Diamond

قرار می‌گیرد (ماتریسی که با توجه به تعویض خط گسترش بدست آمده است). می‌توان ماتریس جدیدی تشکیل داد که تمامی مزدوج‌های بزرگتر از ۱ ماتریس بسط، یک مقدار ویژه در این ماتریس جدید باشند و تعداد آنها نیز با هم برابر باشد. حدس پیزوت را می‌توان به چنین ماتریسی نیز تعمیم داد.

مراجع

- [1] M. Barge and J. Kwapisz, Geometric theory of unimodular Pisot substitutions, *Amer. J. Math.*, **128** no. 5 (2006) 1219–1282.
- [2] N. Pytheas Fogg, edited by V. Berthé, S. erenczi, C. Mauduit and A. Siegel, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, **1794**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [3] G. Rauzy, Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, **110** no. 2 (1982) 147–178.
- [4] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press 1995.
- [5] P. Arnoux and E. Harriss, What is a Rauzy fractal?, *Notice of the AMS*, **61** no. 7 (2014) 768–770.

سعید علیخانی

یزد، دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، صندوق پستی ۷۴۱-۸۹۱۹۵
alikhani@yazd.ac.ir

سعید علیخانی، دانشیار گروه ریاضی محض دانشکده ریاضی دانشگاه یزد است. تحقیقاتش در حوزه نظریه گراف و ترکیبیات جبری می‌باشد و مقالاتی توصیفی در حوزه آموزش ریاضی و عمومی کردن ریاضی در نشریه‌های آموزش ریاضی و اتحاد معلمان به رشته تحریر در آورده است. ایشان عضو هیات تحریریه خبرنامه انجمن ریاضی ایران بوده و مقالات و گزارش‌های متعددی را در خبرنامه به چاپ رسانده‌اند. ایشان مدیر مسئول و عضو هیات تحریریه نشریه ساختارهای جبری و کاربردهای آن که توسط دانشگاه یزد انتشار می‌یابد، نیز می‌باشند.



علی نوروزی

یزد، دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، صندوق پستی ۷۴۱-۸۹۱۹۵
alinoroozics@gmail.com

علی نوروزی دانشجوی کارشناسی علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی دانشگاه یزد است. او علاقه زیادی به تحقیق و مطالعه مقالات ریاضی که در ارتباط با علوم کامپیوتر هستند، دارد. ایشان در ترجمه مقالاتی از خبرنامه انجمن ریاضی ایران، همکار دکتر سعید علیخانی بوده‌اند.

