

پنجاه سال یکنوایی ماکسیمال

جاناناتان م. بوروین

مترجم: محمد حسین علی زاده

چکیده. قدمت نظریه‌ی عملگرهای یکنوای ماکسیمال در شرف پنجاه سالگی (یا در خاتمه‌ی پنجاه سالگی) است. قصد دارم تاریخچه‌ی این موضوع را به اختصار مرور کنم. سعی خواهم کرد توضیح دهم که چرا عملگرهای یکنوای ماکسیمال مهم و جالب هستند. این مرور را با توصیفی از پیشرفت‌های چشمگیری که طی دهه‌ی گذشته حاصل شده است، به پایان خواهم رساند.

۱. مقدمه و مفاهیم اولیه

در بخش ۲، مطابق با دیدگاه خودم، مطالب اصلی و نکات برجسته در یکنوایی ماکسیمال را در زیر بخش‌هایی برای پنج دهه، از سال ۱۹۵۹ تا ۲۰۰۹ بازگو خواهم کرد. در بخش ۳ عملاً یک قضیه اثبات خواهم کرد و در بخش ۴، مسائل باز مهم باقی‌مانده‌ی این نظریه را مطرح و نتیجه‌گیری خواهم نمود.

۱.۱. مفاهیم اولیه. یک عملگر یکنوا از فضای موضعاً محدب X -در این مقاله، ما تقریباً همواره آن را فضای نرم‌دار در نظر می‌گیریم- به‌توی دوگان توپولوژیک آن X^* است که با زیر مجموعه‌ی T از $X^* \times X$ مشخص می‌شود، بطوری که به‌ازای هر (x^*, x) و (y^*, y) در T

$$(1) \quad \langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0,$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ جفت دوگانی بین X^* و X است. در این‌جا از $(x^*, x) \in T$ برای مشخص کردن نمودار یک عملگر (تابع چند مقداری) بین X و X^* استفاده می‌کنیم و بطور معادل می‌نویسیم $x^* \in T(x)$ و یا بر حسب رابطه‌ی معکوس می‌نویسیم $x \in T^{-1}(x^*)$. دامنه

$$D(T) = \{x \in X : \exists x^* \in X^* \text{ s.t. } (x^*, x) \in T\},$$

و برد

$$R(T) = \{x^* \in X^* : \exists x \in X \text{ s.t. } (x^*, x) \in T\},$$

عبارات و کلمات کلیدی: یکنوایی ماکسیمال؛ آنالیز محدب؛ تابع فیتزباتریک؛ قضیه‌ی یوشایی مینتی؛ بهینه‌سازی.
دیرتخصصی رابط: —————

نوع مقاله: ترجمه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/XX/XX تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/XX/XX

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.xxxx>

هر دو تصویرهایی از T هستند. تاکید می‌کنیم که وقتی می‌نویسیم $S + T$ ، منظورمان جمع مینکوفسکی مجموعه‌ها نیست، بلکه جمع نقطه‌ای مقادیر عملگرهاست.^۱

عملگر یکنوای T ماکسیمال است هرگاه T در میان تمام روابط یکنوا به رابطه‌ی شمول بین مجموعه‌ها، ماکسیمال باشد. این مطلب بیان می‌کند که اگر $(y^*, y) \in X^* \times X$ چنان باشد که به‌ازای هر $(x^*, x) \in T$

$$(۲) \quad \langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0,$$

آنگاه $(y^*, y) \in T$ یا بطور معادل $y^* \in T(y)$. از این رو، ماکسیمال بودن جایگزین بسیار مفیدی برای بستر توپولوژیک است. از این به بعد X را یک فضای باناخ در نظر خواهیم گرفت زیرا این حالت، جالب‌ترین حالت برای مطالعه این نظریه است. نماد H را برای فضای هیلبرت به‌کار خواهیم برد. در مواردی که اشاره‌ای صریح به منبع یا مرجعی نکرده‌ایم از نمادهای [۱۲، فصل ۹] پیروی می‌کنیم که در آن می‌توان جزئیات تمام اثبات‌ها را دنبال کرد ([۸] را هم ببینید) و فهرست بیشتری از مراجع برای راحتی خواننده ارائه شده است. سه مثال انگیزه بخش محوری در این زمینه وجود دارند که در ادامه این فصل به آنها پرداخته می‌شود.

۱.۱.۱. زیر گرادیان‌های محدب. فرض کنید که f تابعی بسته^۲ و محدب بر یک فضای باناخ باشد، در این صورت زیر گرادیان f در نقطه‌ی x متعلق به دامنه‌ی f یعنی $\{x : f(x) < +\infty\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(۳) \quad \partial f(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in X\}.$$

همان‌گونه که مینتی^۳ در [۳۶] در حالت همواره مطالعه کرده بود، هرگاه $x^* \in \partial f(x)$ ، $y^* \in \partial f(y)$ را انتخاب کرده و دوبار (۳) را به کار ببریم در می‌یابیم که ∂f عملگری یکنواست (برای یک تابع احتمالاً نامحدب و سره‌ی^۴ f). مفهوم جدید زیر گرادیان مدرن مستقلاً توسط رُکافلار^۵

در [۳] و مِرّا (مترجم: رجوع کنید به^۶) توسعه داده شد. یکی از مثال‌های بسیار مهم نگاشت دوگانی

$$J_X(x) := \frac{1}{2} \partial \|x\|^2 = \{x^* \in X^* : \|x\|^2 = \|x^*\|^2 = \langle x, x^* \rangle\},$$

است. به‌ویژه $J_H = I$. خواص نگاشت دوگانی، نقش محوری در مطالعه‌ی هندسه‌ی فضای باناخ مربوطه دارند.

۲.۱.۱. عملگرهای خطی کج (چاوله). یادآوری می‌کنیم که عملگر خطی (تک-مقداری) غیر متقارن $T : X \rightarrow X^*$ نیمه‌معین مثبت است، هرگاه به‌ازای هر $x \in X$ ، $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ و کج است هرگاه به‌ازای هر $x \in X$ ، $\langle Tx, x \rangle = 0$. واضح است که هر عملگر نیمه‌معین مثبت عملگری یکنواست و لذا همه‌ی نگاشت‌های کج نیز چنین هستند. گوییم که نگاشت تک‌مقداری T روی خطوط نیمه‌پیوسته (پیوسته‌ی شعاعی)^۷ است هرگاه

$$\forall h \in X : \quad \langle \lim_{t \rightarrow 0^+} T(x + th) - T(x), h \rangle = 0.$$

^۱ مترجم: اگر A و B دو زیر مجموعه‌ی X باشند جمع مینکوفسکی آن‌ها به‌صورت تعریف می‌شود:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

^۲ مترجم: تابع $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را بسته گویند هرگاه اِبی‌گراف آن یک مجموعه‌ی بسته باشد.

^۳ مترجم: تابع f را سره گویند هرگاه دامنه‌ی آن ناتهی باشد.

^۴ Minty ^۵ Rockafellar ^۶ J. J. Moreau.: Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 255 (1962), pp. 2897–2899. ^۷ hemicontinuous

گزاره‌ی ساده‌ی بعدی مهم و گویاست زیرا به عنوان یک ابزار خوب نحوه‌ی به‌کارگیری یکنوایی را آشکار می‌سازد.

گزاره ۱. عملگریکنوای پیوسته‌ی شعاعی تک‌مقدار با دامنه‌ی کل فضای باناخ، ماکسیمال است.

اثبات. با به‌کارگیری (۲) فرض می‌کنیم به‌ازای هر $x \in X$

$$\langle y^* - T(x), y - x \rangle \geq 0.$$

به‌ویژه در حالت خاص به‌ازای هر $h \in X$ و $t > 0$

$$\langle y^* - T(y + th), y - (y + th) \rangle \geq 0.$$

لذا به‌ازای هر $h \in X$ و $t > 0$

$$\langle T(y + th) - y^*, h \rangle \geq 0,$$

و پیوستگی شعاعی نشان می‌دهد که $\langle T(y) - y^*, h \rangle \geq 0$. قضیه‌ی جداسازی نشان می‌دهد $(y^*, y) \in T$ که همان حکم مطلوب است. $\square$

این مطلب که به ازای هر تابع محدب، بسته و سره‌ی f بر یک فضای باناخ، ∂f ماکسیمال است گزاره‌ای است درست ولی اثبات آن دشوار است [۴۲] (این مطلب در فضاهای غیر کامل^۸ نادرست است [۱۲]). در حالت پیوسته اثبات بطور چشمگیری ساده‌تر است. داستان طولانی ساده سازی اثبات ماکسیمال بودن زیر گرادیان چندین دهه طول کشیده است. اخیراً اثبات بسیار ساده‌ای متعلق به آلوز^۹ و اسویتز^{۱۰} که فقط از روشهای آنالیز محدب مقدماتی استفاده شده است در [۱۲، فصل ۹] ارائه شده است.

ممکن است فکر کنیم که عملگرهای کج، قدری با این قضیه بیگانه‌اند اما چنین نیست. اگر برنامه‌ی خطی $\min \langle c, x \rangle$ بطوری که $Ax \leq b$ و $x \geq 0$ نسبت به ترتیب مختصاتی در نظر گرفته شود، آنگاه معادله‌ی تغییراتی وابسته [۱۲، بخش ۳.۷]، به ماتریس کج

$$T := \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^* & 0 \end{bmatrix},$$

بستگی دارد. از این رو کل نظریه دوگانی برنامه ریزی خطی با عملگرهای کج در ارتباط است. طیف کاملی از طبقه‌بندی عملگرهای $-n$ یکنوا وجود دارد. تعریف فوق حالت -2 یکنواست و هنگامی که برای هر $n \in \mathbb{N}$ زیر گرادیان‌ها $-n$ یکنوا باشند عملگر را یکنوای دوری نامند [۵، ۱۲]. به‌عنوان مثال به‌ازای $\theta := \frac{\pi}{n}$ دوران غیر دوری

$$S_\theta := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

بوضوح $-n$ یکنواست. این مطلب ابتدا توسط آسپلاند^{۱۱} [۲] در مقاله‌ای با عنوانی فریبنده (غلط انداز) اثبات شد. اینک اثباتی مستدل و کاملاً تکنیکی بر اساس تابع فیتزباتریک دارد [۱۲].

^۸ incomplete ^۹ Alvez ^{۱۰} Svaiter ^{۱۱} Aspland

۳.۱۰۱. لاپلاسین (عملگر لاپلاس). در ابتدا معادلات با مشتقات جزئی عامل و انگیزه اصلی مطالعه‌ی عملگرهای یکنوای ماکسیمال بود [۱۴] و این مطالعه منحصراً در فضای سوبولف^{۱۲} انجام گرفت از این رو، فقط یک نمونه از آنچه ممکن است را ارائه می‌دهیم. به عنوان کاربردی از مطالعه آن‌ها در مورد وجود بردارهای ویژه برای معادلات بیضوی غیرخطی مرتبه دوم در $L_2(\Omega)$ ، مولفان مقاله‌ی [۲۲] فرض کردند $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ برای $(n > 1)$ ، یک مجموعه‌ی باز کراندار با مرزی متعلق به $C^{2,\alpha}$ به ازای $\alpha > 0$ باشد. آن‌ها فرض کردند که توابعی داریم $|a_i(x, u)| \leq \nu$ برای $1 \leq i \leq n$ و $|a_0(x, u)| \leq \nu|u| + a(x)$ به ازای $a \in L_2(\Omega)$ و $\nu > 0$ ؛ که در آن همه‌ی a_i ها در x اندازه‌پذیرند و در u (تقریباً همه جا) پیوسته‌اند. سپس آن‌ها مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی نرمال شده‌ی زیر را در نظر گرفتند

$$(۴) \quad \Delta u + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x, u) \right\} = 0, \quad x \in \Omega$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \text{bdry } \Omega, \quad \|u\|_2 = 1$$

که در آن $\Delta u = -\nabla^2 u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ عملگر لاپلاس کلاسیک است. برای قابل‌دسترس کردن این مسئله در چارچوب نظریه سوبولف، یک جواب ضعیف برای معادله (۴) به ازای $0 \leq \lambda \leq 1$ و وقتی که $u \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$ ، مورد نیاز است. در این چارچوب، به ازای هر $\tau > 0$ و هر $f \in L_2$ (با شرط $\|u\|_2 = 1$) وجود یک جواب

$$\Delta u + \tau u = f(x),$$

تضمین شده است. قضیه پوشایی مینتی (قضیه ۳) ایجاب می‌کند که $T := \Delta$ روی $L_2(\Omega)$ با دامنه‌ی $W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$ خطی و یکنوای ماکسیمال باشد. البته ابتدا باید یکنوایی را با استفاده از انتگرال‌گیری جزیه‌جز به شکل

$$\int_{\Omega} \langle \nu, \Delta u \rangle = \int_{\Omega} \langle \nabla \nu, \nabla u \rangle,$$

به ازای هر $\nu \in W^{-1,2}(\Omega)$ ، $u \in C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{1,2}(\Omega)$ بررسی کرد. حال می‌توان یک عملگر از نوع جایگزین فردهم برای (۴) فراهم ساخت [۳۲، قضیه ۱۰]. به روشی مشابه می‌توان ادعا کرد که به ازای $2 \leq p < \infty$ عملگر $-p$ لاپلاس Δ_p یکنوای ماکسیمال است هرگاه برای هر $u \in W^{-1,p}(\Omega)$ با شرط $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، عملگر $\Delta_p u$ با

$$\nabla_p u := -\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \in W^{-1,q}(\Omega),$$

تعریف شود.

۲. یکنوایی ماکسیمال: تاریخ پنج دهه

عملگرهای یکنوا (یا توابع چند-مقداری) نخستین بار توسط جرج مینتی برای کمک به مطالعه‌ی انتزاعی شبکه‌های ارتباطی الکتریکی معرفی شد [۳۴]، سپس توسط فلیکس برودر^{۱۳} و مکتب ایشان در چارچوب معادلات با مشتقات جزئی به‌کار گرفته شد [۱۶]. من به‌شخصه مطالب زیادی را از کارهای اولیه‌ی زارانتونلو^{۱۴} یاد گرفتم، [۵۲] را ببینید. عملگرهای یکنوای ماکسیمال به سرعت در زیر گرادیان‌ها، بهینه‌سازی، نامساوی‌های تغییراتی، الگوریتم‌ها، اقتصاد ریاضی و غیره مورد استفاده قرار گرفتند. در سال ۱۹۶۸ شرح مفیدی از مرحله پیشروی موضوع توسط خود مینتی ارائه شد [۳۷]. در سال ۱۹۷۵ ایده اصلی-ولی نه به‌سادگی-در فضای هیلبرت و بطور کلی‌تر در فضای باناخ بازتابی^{۱۵} نمایان شد. برزیس^{۱۶} در [۱۴]، نیم گروه انقباضی عملگرها را مطالعه کرد و آن‌ها را با عملگرهای یکنوا

¹²Sobolev ¹³Felix Browder ¹⁴Zarantonello ¹⁵reflexive ¹⁶Brezi

مرتبط ساخت، در این مرحله وضعیت نظریه، رضایت‌بخش‌تر از نتایج ابتدایی برزیس در فضای هیلبرت بود. در خارج فضای هیلبرت نظریه‌ی مشابهی به عملگرهای تجمعی^{۱۷} توسعه داده شد.

۱۰۲. ۱۹۶۹-۱۹۵۹.

۱۰۱۰۲. مینتی. شاید خواننده‌ی کم توجه را بتوان به خاطر ندیدن موضوع آشکار جدید در مقاله‌ی اولیه‌ی مینتی^{۱۸} [۳۴] بخشید. به هر حال، چند سال بعد محققینی مانند مینتی، برودر (به‌ویژه با همکاری برزیس، هس^{۱۹} [۱۷] و دیگران)، آسپلاند [۲]، رکافلار، زاراتونلو [۵۱، ۵۳] شالوده‌ی نظریه‌ی جدید را به دقت پایه گذاری کردند. نخستین قضیه‌ی واقعاً مهم توسط مینتی [۳۵] ارائه و در حل معادلات به‌کار گرفته شد:

قضیه ۱. (قضیه پوشایی مینتی، ۱۹۶۲) اگر T روی فضای هیلبرت H پیوسته و یکنوا باشد، آنگاه

$$R(T + I) = H.$$

همان طوری که در بخش ۳.۱.۱ تشریح شد کاربرد یکنوایی در معادلات با مشتقات جزئی بیضوی عمدتاً به روش تقریبات گالرکین^{۲۰} در بعد متناهی بود. در ابعاد متناهی، نتایج اساسی پوشایی تحت مفروضات نحیف (ضعیف) می‌توانند طبق نظریه‌ی درجه^{۲۱} یا دیگر مفاهیم توبولوژیکی اثبات شوند. برای گذر حد، یکنوایی لازم و ضروری بود. یکی از نتایج ساده‌ی ماکسیمالیتی آن است که هر عملگر یکنوای ماکسیمال، نیمه بسته‌ی^{۲۲} دنباله‌ای است، یعنی^{۲۳}

$$(۵) \quad x_n^* \in T(x_n), \quad x_n^* \rightarrow_s x^*, \quad x_n \rightarrow_w x \implies x^* \in T(x),$$

و این خاصیت دقیقاً همان ویژگی است که برای بسیاری از روش‌های تقریب لازم است. یک توصیف مطلوب از این موضوع را می‌توان در [۲۰] یافت. گزارشی بسیار جامع‌تر از وضعیت حدود ۲۰ سال پیش را می‌توان در [۵۴] یافت. گویم که یک فضای باناخ دارای خاصیت برودر-گوده^{۲۴} است هرگاه هر نگاشت غیرانبساطی^{۲۵}، نه لزوماً خود نگاشت، روی هر مجموعه‌ی بسته‌ی محدب و کراندار آن فضا، نیمه بسته باشد. نشان داده می‌شود که فضای هیلبرت دارای خاصیت برودر-گوده است [۲۹]؛ جالب‌تر آنکه اگر نرم هیلبرتی فضای $\ell^2(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}$ را با نرم معادل $\|(x, r)\| := \max(\|x\|_2, |r|)$ جایگزین کنیم، دارای این خاصیت (برودر-گوده) نیست [۲۹]. به همین ترتیب، با توجه به

$$(۶) \quad 0 \in T(x) + \partial\delta_c(x) \iff \exists x^* \in T(x), \quad x \in C, \quad \sup_{c \in C} \langle x^*, c - x \rangle \leq 0,$$

یک نامساوی تغییراتی که در سمت راست رابطه (۶) ارائه شده است، به یک شمول مجموعه‌ای در سمت چپ تقلیل داده می‌شود. در اینجا δ_c تابع نشانگر محدب است که روی C مقدار صفر و در غیر این صورت مقدار $+\infty$ می‌گیرد.

برای داشتن امیدی به استفاده از نظریه‌ی عام، باید معلوم می‌شد که تحت شرایط معقولی بر T و C ، عملگر تعریف شده با $T_c(x) := T(x) + \partial\delta_c(x)$ هنوز ماکسیمال است. لذا، طبیعی بود که به ماکسیمال بودن زیر گرایان‌ها امید داشته باشند و همچنین منتظر قضیه‌ی "مجموع" در راستای قضیه ۲ در زیر بخش بعدی باشند. بالاخره تاکید می‌کنیم که حتی اگر T تک مقدار و T_c هموار باشد هیچ یک از دو حکم اخیر بر قرار نیستند.

^{۱۸} در Math. Reviews نظریه‌دان گراف، فرانک هاردی برای این مقاله سه پاراگراف نقد ارائه کرده است که ایشان دو پاراگراف را از چکیده‌ی مقاله‌ی مینتی آورده و در پایان چنین نتیجه‌گیری کرده است. "تنها قضیه‌ی جدید نظریه‌ی گراف به‌شکل زیر است. فرض کنید N یک شبکه (گراف سودار) باشد که شاخه‌های (خطوط سودار) آن به سه مجموعه‌ی A ، B و C افراز شده‌اند و گیریم که شاخه‌ی b از مجموعه‌ی B مشخص شده است. در این صورت N یا شامل یک دور شامل b است که شامل هیچ خطی از C نیست که در آن همه‌ی خطوط B به طور مشابه سودار شده‌اند یا شامل یک هم‌دور (cocycle) b است که شامل هیچ خطی از A نیست که در آن همه‌ی خطوط B بطور مشابه سودار شده‌اند. علاوه بر آن این قضیه، در نظریه‌ی گراف دارای ذات جالبی است که به کاربردهای مهمی در برنامه ریزی خطی و غیر خطی منجر می‌شود و حالتی پایا در حل شبکه‌های غیر خطی دارد (تعاریف بسیاری برای معرفی کردن این نتایج لازم است که اینجا گنجایش آن‌ها را ندارد)".
^{۲۳} مترجم: همگرایی قوی و ضعیف برترتیب با نمادهای $\rightarrow_s$ و $\rightarrow_w$ نشان داده می‌شوند.

۲۰۲. ۱۹۶۹-۱۹۷۹.

۱۰۲۰۲. رکافلار. در حالی که یکنوایی ماکسیمال اکنون نقش بزرگی در بهینه‌سازی و آنالیز محدب ایفا می‌کند، در کتاب کلاسیک آنالیز محدب ۱۹۷۰ تری رکافلار فقط بصورت گذرا به یکنوایی اشاره شده است [۴۳]. با این حال، همزمان رکافلار گام‌های بسیار بلندی را در نظریه‌ی عملگرهای یکنوا در فضاهای بازتابی برداشته بود. ایشان در [۴۱] مفهوم یکنوایی دوری را معرفی کرد. تابع محدب

$$(v) \quad f_T(x) := \sup \left\{ \langle x_n^*, x - x_n \rangle + \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_{k-1}^*, x_k - x_{k-1} \rangle : x_k^* \in T(x_k), n \in \mathbb{N} \right\},$$

را در نظر بگیرید که در آن سوپریمم روی تمام چنین زنجیره‌هایی گرفته می‌شود. f_T را تابع رکافلار می‌نامیم. با استفاده از این تابع بود که رکافلار توانست نشان دهد که عملگرهای یکنوای دوری ماکسیمال، یکنوای ماکسیمال بوده و دارای زیر گرادیان یکسانی هستند. ^{۲۶} رکافلار در [۴۲] قضیه‌ی زیر را اثبات کرد:

قضیه ۲. (قضیه مجموع رکافلار) فرض کنید که S و T عملگرهای یکنوای ماکسیمال بر یک فضای باناخ بازتابی باشند. فرض کنید

$$(A) \quad D(S) \cap \text{int } D(T) \neq \emptyset.$$

در این صورت $S + T$ یکنوای ماکسیمال است.

اثبات بسیار ظریف رکافلار بر پایه‌ی بهبود قضیه‌ی ^۱ بود.

قضیه ۳. (قضیه پوشایی مینتی) فرض کنید T بر فضای باناخ بازتابی X ، $(J_X$ و J_X^{-1} هر دو تک مقداری هستند) یکنوای ماکسیمال باشد. در این صورت

$$R(T + J_X) = X^*.$$

شرط داخل پرانتز به دلایل تکنیکی لازم بود ^{۲۷} و با جایگزینی نرم فضا با نرم معادل تضمین می‌شود. در بخش بعدی اثباتی از قضیه‌ی ^۳ را در حالتی کلی‌تر ارائه خواهیم کرد. برای برهان قضیه‌ی ^۲، اثبات کراندارای موضعی یک عملگر یکنوا در سرتاسر درون دامنه‌ی تعریفش نیز لازم بود. این مطلب نیز حالا یک اثبات ساده در آنالیز دارد اما اثبات آن در زمان خود کاملاً دشوار بود.

آخرین نتیجه فوق العاده‌ای که رکافلار در سال ۱۹۷۰، ارائه کرد اثبات مجازاً محدب بودن دامنه‌ی یک عملگر یکنوای ماکسیمال، در فضای باناخ بازتابی بود [۴۴]. مجازاً محدب بودن در برخی از منابع، تقریباً محدب نیز نامیده می‌شود: یعنی دامنه‌ی یک عملگر یکنوای ماکسیمال مجازاً محدب است هرگاه $\overline{D(T)}$ محدب باشد. به کارگیری این نتیجه بر T^{-1} نشان می‌دهد که در حالت بازتابی $\overline{R(T)}$ نیز محدب است. در خارج از فضای بازتابی این دوگانی کاملاً در هم می‌شکند. در حالت کلی $\text{int } D(T)$ محدب است اما در هر فضای غیربازتابی، یک عملگر یکنوای ماکسیمال با $\text{int } R(T)$ غیر محدب وجود دارد [۸]، [۳۲]، قضیه ۱۰. این مطلب نتیجه‌ای از مشخص سازی ارسى. جیمز ^{۲۸} از فضای بازتابی است.

یکی دیگر از کارهای شاخص این دهه، مقاله شایان توجه رکافلار [۴۵] در سال ۱۹۷۶ بر روی الگوریتم نقطه‌ی پروکسیمال ^{۲۹} بود که ابتدا توسط مارتینه ^{۳۰} معرفی شده بود. توصیف و تاثیر آن به یک مقاله‌ی کامل نیاز دارد. ما به مورد زیر بسنده می‌کنیم.

^{۲۶} در Math. Review باز هم چکیده‌ای از خود نویسنده، درج شده است: "زیرگرایان یک تابع محدب سره و بسته بر یک فضای باناخ یک عملگر یکنوای ماکسیمال است، همچنین یک عملگر یکنوای دوری ماکسیمال است. این نتیجه توسط همین مؤلف در مقاله‌ی قبلی [1769] # 33 MR0193549 (1966) J. Same, 497-510, منتشر شده بود ولی استدلال ارائه شده کامل نبود؛ قضیه در اینجا به روشی دیگر اثبات شده است که در فضاهای باناخ بازتابی ساده‌تر است. همچنین، یک واقعیت جدید در مورد رابطه‌ی بین زیر دیفرانسیل یک تابع محدب و زیر دیفرانسیل مزدوج آن در فضاهای غیربازتابی ارائه شده است." ^{۲۷} این شرط برای معادل بودن ابر ماکسیمالیتی (hypermaximality)، یعنی شرط $R(T + J_X) = X^*$ لازم بود [۴۶]، تبصره ۸.۱۰، اما با توجه به [۱۲]، قضیه ۹.۳.۱ می‌توان از شرط داخل پرانتز صرف نظر کرد.

²⁸ R.C. James ²⁹ proximal ³⁰ Martinet

مثال ۰۱. (پوشایی) آنچه که بازتابی بودن فراهم می‌کند این است که هر عملگر یکنوای ماکسیمال تراکمی^{۳۱}، پوشاست. (عملگر T را تراکمی گویند هرگاه $\inf_{x^* \in T(x)} \|x^*\| \rightarrow \infty$ وقتی که $\|x\| \rightarrow \infty$). در واقع، بازتابی بودن فضای باناخ، قضیه‌ی پوشایی مینتی^۳ (باز هم از طریق قضیه‌ی جیمز) را مشخص می‌کند. علاوه بر آن قضیه‌ی^۳ تضمین می‌کند که در فضای بازتابی، حلال

$$R_\lambda := (T + \lambda J_X)^{-1},$$

و تقریب یوشیدا [۱۳، ۲۰]

$$(۹) \quad T_\lambda := (T^{-1} + \lambda J_X^{-1})^{-1},$$

همه جا تعریف شده و خوش رفتار باشند. این دو موضوع بودند که اجازه دادند رکافلار بطور همزمان ماکسیمال بودن مجموع و تحذب مجازی را در فضاهای بازتابی اثبات کند، که هیچ یک در مجموعه‌های غیر بازتابی دست یافتنی نیست.

مثال ۰۲. (غیر انبساطی) لازم به یاد آوری است که عملگر P را غیر انبساطی گویند هرگاه نامساوی $\|x^* - y^*\| \leq \|x - y\|$ به‌ازای هر $(x^*, x), (y^*, y) \in P$ برقرار باشد. همچنین عملگر غیر انبساطی P الزاماً روی دامنه‌ی خود تک-مقداری است. توجه داشته باشید که فضای هیلبرت، خاصیت غیرانبساطی بودن حلال را فراهم می‌کند زیرا $J_H = I$. (توجه کنید که J_H و J_H^{-1} فقط با تجدید نرم H به طور همزمان هموار می‌شوند). علاوه بر این، R_λ نیز غیر انبساطی است. این مطلب، نتیجه‌ی مشاهده‌ی قابل توجه زیر است که پس از کشف، به راحتی قابل اثبات است.

گزاره ۰۲. فرض کنید H یک فضای هیلبرت بوده و T و P با

$$(x, y) \in P \iff \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) \in T,$$

در ارتباط باشند. در این صورت T یکنواست اگر و فقط اگر P غیرانبساطی باشد (P لزوماً تک-مقداری است).

این گزاره، کلیدی برای تحلیل الگوریتم نقطه‌ی پروکسیمال است که با الگوریتم کراسنوسلسکی^{۳۲} [۱۱] معادل است. اقتدار و توانایی گزاره‌ی^۲ را با نشان دادن این که چطور آن، قضیه‌ی اساسی زیر را نتیجه می‌دهد تشریح می‌کنیم.

قضیه ۰۴. (قضیه والتاین-کیرزبراون^{۳۳} (۱۹۳۲-۱۹۴۵)) هر نگاشت غیر انبساطی P روی $A \subseteq H$ به نگاشت غیر انبساطی $\hat{P}$ با $D(\hat{P}) = H$ توسیع می‌یابد.

اثبات. به P عملگر یکنوای T را، همانند گزاره‌ی^۲، وابسته کنید و همان طور که لم زرن ایجاب می‌کند $\hat{T}$ را توسیع ماکسیمال T فرض می‌کنیم (در واقع، مقاله‌ی اخیر [۷، بخش ۵] این امکان را فراهم می‌کند که این کار به‌صورت سازنده‌تر انجام شود). با استفاده دوباره از گزاره‌ی^۲ فرض کنید $\hat{P}$ نگاشت غیرانبساطی وابسته به $\hat{T}$ را نشان می‌دهد. با به‌کارگیری قضیه‌ی پوشایی مینتی، قضیه‌ی^۱، ملاحظه می‌کنیم که $D(\hat{P}) = R(\hat{T}) = H$. در نهایت تساوی $\hat{P}|_A = P$ را بررسی می‌کنیم. □

این قضیه به ما اجازه می‌دهد که غیر انبساطی بودن R_λ را نشان داده و نتیجه بگیریم که T_λ ، λ -لیپ‌شیتز است [۱۳، ۲۰]. همچنین توجه کنید که در فضای هیلبرت اگر دامنه‌ی P کل فضا باشد، آنگاه $I - P$ یکنوای ماکسیمال است و لذا، همان طوری که در فوق ملاحظه کردیم، نیمه‌پیوسته است. این مطلب به ما اجازه می‌دهد که خیلی سریع این قضیه‌ی معروف را در حالت فضای هیلبرت نتیجه بگیریم:

” اگر $C \hookrightarrow P : C$ یک خودنگاشت از زیر مجموعه‌ی محدب کراندار بسته‌ی $C \subset H$ باشد، آنگاه P در C نقطه ثابت دارد. “
این مطلب را به صورت زیر استدلال می‌کنیم. $c_0 \in C$ را ثابت در نظر بگیرید و به ازای هر $0 < n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $P_n(x) := (1 - \frac{1}{n})P(x) + \frac{1}{n}c_0$. از آنجایی که P_n روی C یک انقباض است معادله‌ی $P_n(x_n) = x_n \in C$ دارای جواب است و چون C

³¹ coercive ³² Krasnoselski ³³ Valentine-Kirsztbrun

ضعیف - فشرده است یک زیر دنباله‌ی $x_{n_k} \rightharpoonup \bar{c} \in C$ وجود دارد. پس $x_{n_k} - P(x_{n_k}) \rightarrow 0$ با نرم همگراست (چون C کراندار است) و لذا طبق نیمه‌بسته بودن داریم $P(\bar{c}) = \bar{c}$.

معلوم نیست که این نتیجه در یک فضای بازتابی دلخواه صادق باشد. این قضیه در فضای بطور یکنواخت محدب صحیح است و اطلاعات بسیار بیشتری در این زمینه وجود دارد.

۲۰۲۰۲. برزیس و هارو. در مقاله‌ی [۱۵] برزیس و هارو^{۳۴} عملگر $T : H \rightarrow H$ را در نظر گرفتند بطوری که در شرط

$$\sup_{(z,h) \in T} (h - f, y - z) < \infty, \quad (*)$$

به‌ازای هر $f \in R(T)$ و $y \in D(T)$ صدق کند. عملگرهای کراندار-زاویه^{۳۵} یا یکنوای تراکمی^{۳۶} در (*) صدق می‌کنند. اگر T یکنوای ماکسیمال باشد، آنگاه به‌ازای هر $\lambda > 0$ ، عملگرهای $T + \lambda I$ ، $(I + \lambda T)^{-1}$ و $(T^{-1} + \lambda I)^{-1}$ در (*) صدق می‌کنند. نتایج قابل توجه عبارتند از:

$$\overline{R(S + T)} = \overline{R(S) + R(T)},$$

$$\text{int}[R(S + T)] = \text{int}[R(S) + R(T)],$$

که در آن‌ها S و T در یکی از شرایط زیر صدق می‌کنند.

(آ) S و T هر دو در (*) صدق می‌کنند؛

(ب) در T در (*) صدق می‌کند و $D(S) \subseteq D(T)$ ؛

(پ) $S = \partial\phi$ و $\phi((I + \lambda T)^{-1} \cdot) \leq \phi(\cdot)$.

۳۰۲۰۲. میگنو. با انگیزه‌ی تحلیل مرتبه دوم توابع محدب، منطقی است که بگوئیم یک عملگر یکنوای T بر روی فضای اقلیدسی E در $D(T)$ $x \in D(T)$ دیفرانسیل پذیر (فرشه) است هرگاه $T(x)$ تک عضوی باشد (این شرط را می‌توان ضعیف‌تر کرد اما شرط ضعیف‌تر هم تک عضوی بودن $T(x)$ را نتیجه می‌دهد) و یک ماتریس $A = \nabla T(x)$ وجود داشته باشد بطوری که

$$(۱۰) \quad T(x') \subset T(x) + \nabla T(x)(x' - x) + o(\|x' - x\|)B_E,$$

که در آن B_E گوی یکه فضا است.

کار بزرگ دیگری که توسط میگنو^{۳۷} [۳۳] تکمیل شد این بود که ایشان نشان داد در بعد متناهی، یک عملگر یکنوا در سرتاسر درون دامنه‌ی تعریفش تقریباً همه جا مشتق‌پذیر است. این مطلب یک اثبات متعارف قضیه‌ی الکساندروف را برای توابع محدب دوبار مشتق پذیر در فضای اقلیدسی ارائه می‌کند، و در مطالعه‌ی جواب‌های چسبناکی^{۳۸} معادلات با مشتقات جزئی بسیار مهم است. معلوم نیست که آیا می‌توان قضیه‌ی میگنو به فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر تعمیم داد یا نه. اما همان‌طور که مثال بعدی نشان می‌دهد این نتیجه، برای فضاهای هیلبرت تفکیک‌ناپذیر برقرار نیست.

^{۳۵} عملگر $A : X \rightarrow X^*$ کراندار-زاویه گویند هرگاه

$$|\langle Ax - Ay, x - y \rangle| \leq \|Ax - Ay\| \|x - y\|.$$

^{۳۶} عملگر $A : X \rightarrow X^*$ یکنوای تراکمی گویند هرگاه

$$\frac{\langle A(x), x \rangle}{\|x\|} \rightarrow +\infty \quad \text{هرگاه} \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

مثال ۳. مثال زیر از [۱۰]، یک تابع پیوسته‌ی محدب d بر فضای هیلبرت تفکیک‌ناپذیر H را ارائه می‌کند که هیچ جایی مشتق‌پذیر مرتبه‌ی دوم نیست: گیریم A شمارش‌ناپذیر باشد و C مخروط مثبت $\ell_2(A)$ باشد. تابع فاصله از C را با d نشان دهید و قرار دهید $P := \nabla d$.

اثبات. (الف) واضح است به‌ازای هر $a \in \ell_2(A)$ داریم $P(a) = a^+$ که در آن $a^+ = (a_\alpha^+)_{\alpha \in A}$ و $a_\alpha^+ = \max\{0, a_\alpha\}$. عضو $e_\alpha \in \ell_2(A)$ و $x \in \ell_2(A)$ را انتخاب کنید. در این صورت P در جهت e_α مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر $x_\alpha \neq 0$. در اینجا e_α نماینده‌ی یک عضو پایه‌ی متعارف است. چون هر $x \in \ell_2(A)$ فقط دارای تعدادی شمارش‌پذیر مختصات غیر صفر است، پس d هیچ جایی مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم نیست. همین‌طور عملگر یکنوایی ماکسیمال P به مفهوم میگو هیچ جایی مشتق‌پذیر نیست.

(ب) از طرف دیگر تابع فاصله بر مخروط مثبت در $\ell_2(\mathbb{N})$ بر روی یک مجموعه‌ی چگال (باز هم در نقاط با مختصات غیر صفر) دوبار مشتق‌پذیر است. حال فرض کنید X یک زیر فضای تفکیک‌پذیر $\ell_2(A)$ باشد. گیریم $I \subset A$ مجموعه‌ای شمارش‌پذیر از مختصات غیر صفر X باشد. (توجه کنید که X یک زیر فضای $\ell_2(I)$ است. اما در حالت کلی $X \neq \ell_2(A)$) در این صورت $d|_{\ell_2(I)}$ با تابع فاصله بر مخروط مثبت $\ell_2(I)$ منطبق است، لذا بر یک مجموعه‌ی چگال (در همه‌ی نقاط با مختصات غیر صفر) مشتق‌پذیر مرتبه دوم است. چون عناصر با مختصات غیر صفر X در X چگالند، مشتق مرتبه دوم $d|_X$ را در زیر مجموعه چگال X داریم. خلاصه می‌بینیم که تحدید d به هر زیر فضای تفکیک‌پذیر، مشتق‌پذیر مرتبه دوم است اما خود d چنین نیست. لذا تکنیک‌های تحویل به تفکیک‌پذیر را نمی‌توان به‌کار برد. $\square$

مثال‌های نقض مشابهی در [۱۰، ۱۲] ارائه شده‌اند تا نشان دهند که نتیجه میگو در فضاهای تفکیک‌پذیر به‌ازای $p \neq 2$ در $\ell^p(\mathbb{N})$ برقرار نیست.

۴.۲.۲. زارانتونلی و کندروف. به‌نظر می‌رسد که زارانتونلی^{۳۹} [۵۳] نخستین کسی بوده است که دریافت نتایج مشتق‌پذیری توابع محدب به مثابه‌ی چشم‌انداز مفیدی برای نتایج تک مقداری عملگرهای یکنوا هستند. کندروف^{۴۰} در سال ۱۹۷۵ و در مقاله‌ی [۳۰] این مطلب را با دانش خود از توپولوژی عمومی ترکیب کرد تا نتیجه‌ی زیبایی زیر را اثبات کند.

قضیه ۵. (کندروف) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد بطوری که نرم فضای دوگان آن یا نرمی معادل با فضای دوگان آن اکیداً محدب است. (این مطلب در بسیاری از فضاها از جمله در تمام فضاهای بازتابی و تفکیک‌پذیر صادق است.) در این صورت هر عملگر یکنوایی (ماکسیمال) روی فضا بر هر زیر مجموعه از درون دامنه‌اش تک مقداری است. به‌ویژه هر تابع محدب پیوسته بر فضا مشتق‌پذیر به مفهوم گاتو است.

اثبات. مساله‌ی بهینه‌سازی

$$(۱۱) \quad k_T(x) := \inf\{\|x^*\|_* : x^* \in T(x)\},$$

را در نظر گرفته و بررسی می‌کنیم که

($\tilde{A}$) k_T نیم پیوسته پایینی است.

(ب) k_T فقط می‌تواند در x پیوسته باشد هرگاه همه‌ی عناصر $T(x)$ نرم یکسانی داشته باشند. با توجه مفروضات ما، این مطلب بدان معناست که T در نقاطی تک-مقداری است که k_T در آن نقاط پیوسته باشد. در خاتمه، نتیجه ساده‌ای از قضیه فورت^{۴۱} [۲۴] پیوستگی k_T را تضمین می‌کند. $\square$

^{۴۱} قضیه (فورت) یک نگاشت نیم پیوسته بالایی از فضای توپولوژیک X به توی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های فشرده یک فضای متریک Y در تمام نقاط مانده‌ی X پیوسته است.

³⁹ Zarantonello ⁴⁰ Kenderov

کندروف در مقاله‌ی [۳۱] با یک نتیجه بسیار جذاب، مشتق‌پذیری فرشه تابع محدب را به پیوستگی نرم-نرم عملگرهای یکنوا مرتبط کرد.

۵.۲.۲. گوسز. از اوایل تا اواسط دهه‌ی هفتاد، در یک سری از مقالات، گوسز^{۴۲} مفهوم عملگرهای از نوع چگال [۲۸] را معرفی کرد: عملگر $T \in X^{**} \times X^*$ از نوع چگال (D) است، هر گاه

$$\inf_{(x, x^*) \in T} \langle x^* - z^*, x - z^{**} \rangle \geq 0,$$

(گوییم (z^*, z^{**}) با T ارتباط یکنوایی^{۴۳} دارد) ایجاب کند که یک تور کراندار $(z^{**}, z^*) \rightarrow_{w^* \times s} (x_\alpha, x_\alpha^*)$ وجود داشته باشد. ایشان نشان دادند عملگرهای نوع - چگال همه‌ی ∂f ها را به ازای f های محدب و بطور بدیهی تمام عملگرهای یکنوای ماکسیمال بازتابی را در بر دارد. پس از آن گوسز قادر شد علیرغم شکست در ارائه‌ی اثبات کامل $R(T + J_X) = X^*$ ، قسمتی از نظریه را در فضای بازتابی ترفیع دهد. شاید مهمترین نتیجه این بود که ایشان توانست نشان دهد که رفتارهای سرکش گوناگونی می‌تواند حادث شود. در سال ۱۹۷۴ ایشان عملگر یکنوای ماکسیمال خطی از نوع غیر چگال را ارائه داد.

مثال ۴. (عملگر گوسز) نگاشت خطی پیوسته‌ی $\ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N})$ با

$$(Sx)_n := - \sum_{k < n} x_k + \sum_{k > n} x_k \quad \forall x = (x_k) \in \ell_1, n \in \mathbb{N}, \quad (۱۲)$$

مفروض است. در این صورت $\pm S : \ell_1 \rightarrow \ell_\infty$ یک عملگر خطی کج است که در آن S^* یکنوا نیست در حالی که S^* - یکنواست.

در سال ۱۹۷۶ گوسز یکتا نبودن توسیع‌های یکنوا را نشان داد. (یعنی ایشان عملگر یکنوای ماکسیمالی ارائه داد که نامتناهی نقطه با آن ارتباط یکنوایی داشتند اما با هم دیگر چنین ارتباطی را نداشتند). در سال ۱۹۷۷ ایشان اولین مثال از عملگرهای یکنوای ماکسیمال را ارائه داد که برد آن مجازاً بسته نبود. همه این نتایج در [۱۲، فصل ۹] توصیف و توسیع داده شده‌اند.

۶.۲.۲. آسپلاند. عملگر یکنوای ماکسیمال T بی دور است هرگاه از $T = \partial f + M$ که در آن f محدب و M ماکسیمال است نتیجه بگیریم که f آفین است. آسپلاند^{۴۴} در [۲] یک قضیه‌ی تجزیه‌ی جالبی را برای عملگرهای یکنوای ماکسیمال ثابت کرد. شرح جدیدی از آن در [۱۲، بخش ۲.۹] ارائه شده است. بویژه این مطلب ایجاب می‌کند که یک عملگر یکنوای ماکسیمال (مشروط بر آن که $\text{int } D(T)$ غیر تهی باشد) را می‌توان به صورت مجموع یک قسمت دوری (یک زیر گرادیان) و یک قسمت بی دور (بدون بخش زیر گرادیان نابدیهی) نوشت. واضح است که نگاشت‌های کج بی‌دور هستند. نخستین مثال از یک نگاشت غیر خطی بی‌دور صریح، اخیراً در [۱۲، بخش ۲.۹] ارائه شده است.

مثال ۵. (بوروین^{۴۵} - ویرسما^{۴۶} (۲۰۰۷)) تابع $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با

$$S(x, y) := (-y, x), \quad (۱۳)$$

به‌ازای $x^2 + y^2 \leq 1$ تعریف کنید. در این صورت توسیع یکنوای ماکسیمال $\hat{S}$ از S که برد آن در قرص واحد قرار دارد، بی‌دور است و به‌ازای $\|x\| \geq 1$ داریم

$$\hat{S}(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\|x\|^2}} \frac{x}{\|x\|} + \frac{1}{\|x\|} S\left(\frac{x}{\|x\|}\right). \quad (۱۴)$$

⁴² Gossez ⁴³ monotonically related ⁴⁴ Aspland ⁴⁵ Borwein ⁴⁶ Wiersma

اخیراً توسعه‌های جالبی از موسف^{۴۷} -ریبارسکا^{۴۸} وجود دارند [۳۸]، اما عموماً نداشت‌های خطی بی‌دور کمتر مطالعه شده‌اند. از آنجایی که نداشت‌های دوری و بی‌دور به نوعی در میان نداشت‌های یکنوایی ماکسیمال اکسترمال هستند آن‌ها سزاوار مطالعه‌ی بیشتری هستند.

۷.۲.۲. پروژه‌ی استقلال. استفاده از عملگرهای یکنوا در مدل‌های متمرکز^{۴۹} و بهینه‌سازی تعادل‌های اقتصادی را می‌توان حتی در پروژه‌ی استقلال انرژی وزارت انرژی ایالات متحده در دولت‌های نیکسون و فورد مشاهده کرد [۴، ۲۶]. این پروژه که در ابتدا محرمانه بود، در پی شوک‌های قیمت نفت آن دوره شکل گرفت، و بوضوح هنوز به ثمر ننشسته است. به‌طور خاص، الگوریتم سامانه‌ی ارزیابی پروژه‌ی استقلال^{۵۰} [۱]، تقاضا را با استفاده از عملگرهای یکنوا مدل‌سازی می‌کرد.^{۵۱} آشنایی خود من با عملگرهای یکنوا نتیجه یک اشتباه خوشایند بود. استاد راهنمای من در سال ۱۹۷۲ در آکسفورد پیشنهاد کرد که من پایان نامه کارشناسی ارشدم را بر اساس مقاله‌ای از مسکو^{۵۲} بنویسم. خوشبختانه ایشان ژورنال را اشتباهی به من نشان داد و من حوزه جدید ماکسیمالیتی را، بجای همگرایی مجموعه‌ای که مورد نظر ایشان بود، مطالعه کردم.

۳.۲. ۱۹۷۸-۱۹۸۹.

۱.۳.۲. اسپینگارن. از نقطه نظر تئوریک یکی از مفیدترین ایده‌های الگوریتمی را می‌توان در سال ۱۹۸۳ و در مقاله‌ی [۴۹] نوشته‌ی اسپینگارن^{۵۳} (که به تازگی رساله‌ی دکتری خود را با رکافلاز تکمیل کرده بود) یافت. در این مقاله اسپینگارن تعمیم مناسبی از پیچش اینفیمال به دست آورد و به روش‌های تجزیه همگرایی-مؤکد^{۵۴} عملگر یکنوا در فضای هیلبرت کمک شایانی کرد. مسأله اساسی بصورت زیر است:

فرض کنید که A و B زیر فضاهای برداری بسته و عمود برهم H باشند بطوری که $A \oplus B = H$ جواب $b \in T(a)$ را بیابید مشروط بر آن که $a \in A, b \in B$.

با انگیزه‌ای که بخشی از آن از الگوریتم نقطه‌ی پروکسیمال سرچشمه می‌گیرد، الگوریتم تکراری اسپینگارن را می‌توان برای حل موثر شمول‌های یکنوا، مسائل متمم^{۵۵}، مسائل محدب شدنی و سایر مسائل به‌کار برد. معکوس‌های جزئی که توسط اسپینگارن در [۴۹] نام‌گذاری شد، مثال اولیه‌ای از سیر مقالات مداوم و بسیار غنی بر الگوریتم‌های تجزیه با کاربردهایی در معادلات با مشتق جزئی، مسائل معکوس، پردازش تصویر و غیره است. برخی از مقالات مهم عبارتند از [۱۹، ۲۱، ۲۵، ۲۷، ۵۰].

۲.۳.۲. فیتزپاتریک. در Mathematical Review ثبت است:

”در یکی از کارهای اولیه‌ی کراوس^{۵۶} (۱۹۸۵) یک نمایش از عملگرهای یکنوا با کمک زیر دیفرانسیل‌های تابع زینی روی $E \times E$ ارائه شده است. در مقاله‌ی تحت نقد، مؤلف عملگر یکنوایی $T \subset (E \times E^*)$ را با استفاده از تابع محدب $L_T : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ که با

$$L_T(x, x^*) = \sup\{\langle x^*, y \rangle + \langle y^*, x - y \rangle : (y, y^*) \in T\},$$

تعریف شده است مطالعه کرده است.”

سایمون فیتزپاتریک این ساختار را زمانی ابداع کرد که از من خواست موضوعی را برای کارگاهی پیش‌رو در کانبرا، که به عنوان سخنران به آن دعوت شده بود، پیشنهاد کنم. من او را به مقاله‌ی کراوس ارجاع دادم. ما بقی ماجرا از لحاظ تاریخی، بدین صورت است

^{۵۱}هنوز یک کی‌ی از [۱] را در قفسه‌ی کتاب‌هایم دارم. من [۲۶] را به عنوان یک عهدنامه از ۳۵ سال فرصت‌سوزی نقل قول می‌کنم. ”در پروژه استقلال وزارت فدرال انرژی، طرحی بود که در آن امید می‌رفت که ایالات متحده در سال ۱۹۸۵ به استقلال انرژی برسد. این مطالعه درباره‌ی تقاضا و عرضه انرژی در آمریکا و وابستگی به واردات نفت از ۱۹۷۵ تا ۱۹۸۵ نتیجه می‌گیرد که این اهداف پروژه‌ی استقلال دست نیافتنی هستند.“

⁴⁷Musev ⁴⁸Ribarska ⁴⁹intensive ⁵⁰PIES ⁵²Mosco ⁵³Spingarn ⁵⁴provably-convergent ⁵⁵complementarity ⁵⁶E. Krauss

که برزیس پیشتر از $\{(y, y^*) : \langle x^*, y \rangle : \sup\{ \langle x^*, y \rangle : (y, y^*) \in T\}$ استفاده کرده بود که تحدب را از بین می‌برد در حالی که این جمله‌ی آخر به L_T قدرت و کار آیی لازم را داد. همچنین فیتزپاتریک و من کرانداری موضعی عملگر T بر $\text{int } D(T)$ را از طریق پیوستگی تابع محدب

$$f_T(x) := \sup\{ \langle y^*, y - x \rangle : (y, y^*) \in T \}, \quad (15)$$

به اثبات رساندیم.

آنچه فیتزپاتریک اثبات کرد نتیجه‌ی زیر بود:

قضیه ۶. (تابع فیتزپاتریک) فرض کنید T یک عملگر یکنوای ماکسیمال باشد. در این صورت L_T محدب است. علاوه بر آن $L_T(x, x^*) \geq \langle x^*, x \rangle$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $x^* \in T(x)$.

این قضیه عمدتاً بی‌استفاده ماند تا این که در قرن بعدی به‌طور کامل به بازآفرینی این حوزه کمک کرد.

۴۰۲. ۱۹۸۹-۱۹۹۹.

۱۰۴۰۲. فلیس. در سال ۱۹۸۹ باب فلیس^{۵۷} اولین ویرایش کتاب خود با عنوان توابع محدب، عملگرهای یکنوا و مشتق‌پذیری [۳۹] را منتشر کرد که واقعاً برای اولین بار هر آنچه که درباره‌ی این سه تیتز جالب معلوم بود یک جا جمع آوری کرد. از قضا، مشتق‌پذیری تنها جایی بود که تابع فیتزپاتریک تا آن زمان در آن کاربرد چندانی نداشته است. باور در نظر گرفتن یک تابع از $X \times X^*$ برای به‌دست آوردن نتایج مشتق‌پذیری در X مشکل است.

در سال ۱۹۹۰، پریس^{۵۸} -فلیس-نامیوکا^{۵۹} [۴۰] با تلفیق تمامی روش‌های توسعه‌یافته از [۳۰، ۳۱، ۵۳]، در میان دیگر نتایج، نشان دادند که یک عملگر یکنوای ماکسیمال بروی فضایی با نرم هموار، به‌طور عمومی در درون دامنه‌ی تعریف‌اش تک مقداری است و لذا تمام توابع محدب پیوسته بر چنین فضایی عموماً گاتو مشتق‌پذیرند.

در سال ۱۹۹۲، فلیس و فیتزپاتریک [۲۳] چند ایده‌ی مهم برای این که چگونه جایگزینی برای حلال و تقریب یوشیدا در مجموعه‌های غیر بازتابی ساخته شود را معرفی کردند. اگرچه این ایده‌ها اندکی بیشتر توسعه یافته و در [۸، ۱۲] بیشتر توسعه یافته و به‌کار گرفته شدند اما هنوز این ایده‌ها نیازمند مطالعه‌ی بیشتری هستند.

۲۰۴۰۲. سیمونز. شاید مهم‌ترین واقعه‌ی این دهه، انتشار [۴۶] بود که سیمونز^{۶۰} در آن نخستین تبیین نظام‌مند از یکنوایی ماکسیمال را در داخل پیکره‌ی آنالیز محدب فراهم کرد. این کار درگیر به‌کار گرفتن فضاهای دنباله‌ای کاملاً پیچیده- در بازنگری- و بهره‌برداری از نظریه‌ی مینیمکس بود که ایشان در این زمینه بسیار حرفه‌ای هستند. ویرایش دوم [۴۷] با یک دهه تأخیر و به‌شکلی محسوس ساده‌تر شده و با تغییر نامی مناسب منتشر شده است. اکنون در سایه‌ی وجود تابع فیتزپاتریک [۲۲] آنالیز محدب واقعا ساده سازی شده است. سیمونز همچنین رده‌ی بنیادی دیگری از عملگرهای یکنوای ماکسیمال را معرفی کرد: عملگر T از نوع اینفیمم منفی (NI) است هرگاه به‌ازای هر $(z^*, z^{**}) \in (X^*, X^{**})$ داشته باشیم

$$\inf_{(x^*, x) \in T} \langle x^* - z^*, x - z^{**} \rangle = 0. \quad (16)$$

۳۰۴۰۲. بائوشکه. گام مهم دیگر، توسط بائوشکه^{۶۱} در سال ۱۹۹۶ و در رساله‌ی دکترایش برداشته شد، جایی که ایشان نشان داد عملگر خطی یکنوای (ماکسیمال) T دارای این ویژگی است که T^* یکنواست اگر و فقط اگر از نوع چگال باشد و اگر و فقط اگر از نوع (NI) باشد [۶]. اکنون معلوم شده است که در حالت کلی، نوع چگال و (NI) بر هم منطبق هستند.

⁵⁷Phelps ⁵⁸Preiss ⁵⁹Namioka ⁶⁰Simons ⁶¹Bauschke

مثال ۶. (عملگر فیتزپاتریک-فلپس (۱۹۹۶)) عملگر خطی کراندار از نوع ولترا عملگر $L^1[0, 1] \rightarrow L^\infty[0, 1]$ با ضابطه‌ی

$$(17) \quad T(x)(t) := \int_0^t x(s)ds - \int_t^1 x(s)ds,$$

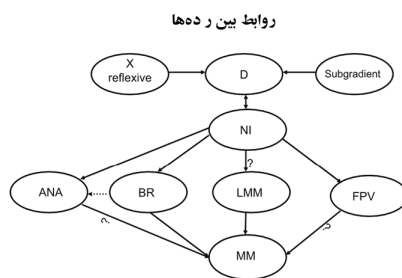
کج است اما هیچ کدام $\pm T$ از نوع چگال نیست زیرا $\pm T$ یکنوا نیست.

همه‌ی رفتارهای سرکش، مانند عملگر گوسز داده شده در مثال ۴ و عملگر فیتزپاتریک-فلپس در مثال ۶، در عملگرهایی به صورت $T + \lambda J_X$ هستند که در آن T عملگری خطی یکنواست ولی T^* یکنوا نیست. بویژه این که آن‌ها نمی‌توانند بر یک فضای شبکه باناخ وجود داشته باشند مگر آنکه $X = \ell^1(\mathbb{N}) \oplus Y$ [۶]. بنابراین در زمان تحریر این مقاله ممکن است ثابت شود، جز در فضای باناخی که شامل یک کپی از $\ell^1(\mathbb{N})$ باشد، هر عملگر یکنوای ماکسیمال بر فضا از نوع چگال است.

۵.۲. ۱۹۹۹-۲۰۰۹. به دلیل تمرکز و توجه تعداد کثیری از محققین مستعد، این دهه شاهد پیشرفت چشمگیری در درک ما از عملگرهای یکنوای ماکسیمال بوده است. من اسامی مارکوس-آلوز، ۶۲ بوج، ۶۳ بوراچیک، ۶۴ ابرهارد، ۶۵ یوسم، ۶۶ مارتینز-لگاز، ۶۷ پینو، ۶۸ سیمونز، ۶۹ اسویتز، ۷۰ ترا، ۷۱ ووسی، ۷۲ و زالینسکو ۷۳ که سهم خیلی زیادی داشتند را ذکر می‌کنم و به ناقص بودن این فهرست آگاهی دارم. جزئیات کامل و ارجاع‌های دقیق این کار را تا اواسط ۲۰۰۹ می‌توان در [۱۲، فصل ۹] یافت.

شکل ۱ وضعیت کنونی را به صورت نموداری نشان می‌دهد. در سایه‌ی کار جدید مارکوس-آلوز و ووسی با زالینسکو نمودار تقریباً کامل است. این نمودار رده‌ی مورد علاقه‌ی سایمون (ED) را شامل نمی‌شود زیرا اینک معلوم شده است که این رده بر (NI) و (D) منطبق است [۴۸]. باز هم برای استفاده از تعاریف علامات اختصاری به [۱۲] ارجاع می‌دهم.

تقریباً در راستای منفی (ANA)؛ برونسند-رکافلار (BR)؛ یکنوای ماکسیمال موضعی (LMM)؛ فیتزپاتریک-فلپس (FP)؛ یکنوایی ماکسیمال (MM).



شکل ۱: در فضای غیر بازتابی کلی، همه استلزام‌ها، به جز آن‌هایی که با «؟» مشخص شده‌اند، اکید هستند. استلزام‌های نقطه‌چین تنها در حد حدس هستند.

شکل ۱: آن‌چه که تا اکنون می‌دانیم

⁶²Alves-Marques ⁶³Bot ⁶⁴Burachik ⁶⁵Eberhard ⁶⁶Iusem ⁶⁷Martinez-Legas ⁶⁸Penot ⁶⁹Simons ⁷⁰Svaiter ⁷¹Thera ⁷²Vosei ⁷³Zalinescu

۳. یکنوایی ماکسیمال بعد از فیتزپاتریک

برای پایان بخشیدن به مطالعه‌ی مجمل و بررسی منحصر بفردمان، می‌خواهم فرم کامل قضیه‌ی مینتی را اثبات کنم. اینک اثبات به طور حیرت آوری ساده شده است و اثبات قضیه مجموع رکافلار ۲ تقریباً به همان اندازه ساده شده است. (بخش ۱۰.۵ و [۸، ۱۲] را ببینید.)

قضیه ۷ (قضیه پوشایی مینتی) فرض کنید T بر فضای باناخ بازتابی X یکنوای ماکسیمال باشد. در این صورت

$$R(T + J_X) = X^*.$$

اثبات. نامساوی کوشی و قضیه‌ی فیتزپاتریک ۶ ایجاب می‌کند که به ازای هر x و x^*

$$(18) \quad L_T(x, x^*) + \frac{\|x\|^2 + \|x^*\|^2}{2} \geq 0.$$

با توجه به قضیه‌ی ساندویچ هان-باناخ [۱۲، فصل ۴] نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی $(w^*, w) \in X^* \times X$ وجود دارد بطوری که

$$(19) \quad 0 \leq L_T(x, x^*) - \langle w^*, x \rangle - \langle x^*, w \rangle + \frac{\|y\|^2 + \|y^*\|^2}{2} + \langle w^*, y \rangle + \langle y^*, w \rangle.$$

با انتخاب $y^* \in -Jw$ و $y \in -Jw^*$ در نامساوی (۱۹) داریم

$$(20) \quad L_T(x, x^*) - \langle w^*, x \rangle - \langle x^*, w \rangle \geq \frac{\|w\|^2 + \|w^*\|^2}{2}.$$

به‌ازای هر $x^* \in T(x)$ با اضافه کردن $\langle w^*, w \rangle$ به هر دو طرف نامساوی فوق و با توجه به $L_T(x, x^*) = \langle x^*, x \rangle$

$$(21) \quad \langle x^* - w^*, x - w \rangle \geq \frac{\|w\|^2 + \|w^*\|^2}{2} + \langle w^*, w \rangle \geq 0,$$

را به‌دست می‌آوریم. چون (۲۱) به ازای هر $x^* \in Tx$ برقرار است و T ماکسیمال است، پس الزاماً داریم $w^* \in Tw$. حال با قرار دادن $x^* = w^*$ و $x = w$ در (۲۱) معلوم می‌شود

$$\frac{\|w\|^2 + \|w^*\|^2}{2} + \langle w^*, w \rangle = 0,$$

که $-w^* \in Jw$ نتیجه می‌دهد. بنابراین $0 \in (T + J)w$. چون همین استدلال را می‌توان به هر انتقال T به‌کار برد، نتیجه‌ی مطلوب $R(T + J) = X^*$ را به‌دست می‌آوریم. $\square$

یادآوری می‌کنیم که اکنون به خانواده‌ی توابع فیتزپاتریک دسترسی داریم که آن n -یکنوایی را در بر گرفته و مطالعه‌ی تابع فیتزپاتریک و تابع رکافلار (۷) را، همان طوری که در [۵] و [۱۲، بخش ۹.۲] توصیف شده است، یک پارچه می‌سازد. همچنین یک مجموعه از مقالات علمی در رابطه با گسترش ۷ عملگرهای یکنوا وجود دارد که به سرعت رشد می‌کنند [۱۸] و می‌توان به آن‌ها همانند قیاسی از ε -مشتق‌پذیری نگریست. همان طور که در [۸، ۱۲، ۴۷] تأکید شده است حوزه‌های بسیار دیگری وجود دارند که از تابع فیتزپاتریک و سایر توابع نماینده استفاده می‌کنند و این پیشرفت غیره منتظره‌ی پیشین را ممکن می‌سازد.

۴. مسائل باز (هرآنچه که برای انجام دادن باقی مانده است)

از نظر من سوالات بسیار اساسی باز، علاوه بر استلزامهای حل نشده‌ی نمودار ۱ و سایر سوالات گوناگون مطرح شده در متن، به شکل زیر هستند:

- آیا قضیه‌ی مجموع رکافلار یعنی قضیه ۲ در هر فضای باناخ X برقرار است؟ به عبارت دیگر، اگر S و T یکنوای ماکسیمال باشند و

$$D(S) \cap \text{int } D(T) \neq \emptyset.$$

- آیا $S + T$ ماکسیمال است؟ اگر $\text{int } D(S) \cap \text{int } D(T) \neq \emptyset$ یا هر گاه S و T از نوع چگال باشند (ووسی -زالینسکو) در این صورت $S + T$ در واقع ماکسیمال است؛ و این مطلب تحت مفروضات متفاوت دیگری نیز برقرار است.
 - آیا هر عملگر یکنوا دارای $\overline{D(T)}$ محدب است؟ این مطلب برای تمام عملگرهای از نوع چگال صحیح است؟
 - آیا هر فضای غیر بازتابی X از نوع (D) است؟ یعنی آیا فضاهای غیر بازتابی وجود دارند بطوری که همه‌ی یکنوهای ماکسیمال روی X از نوع (D) باشند. من "بطور ضعیف" حدس می‌زنم که اگر X شامل هیچ کپی از $l^1(\mathbb{N})$ نباشد، آنگاه از نوع (D) است همان طور که برای $X = c_0$ برقرار است.
 - آیا راهی وجود دارد که تابع محدب f_T را به عملگرهای یکنوای ماکسیمال T الصاق کرد به طوری که اگر $f_T(x)$ در x مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $T(x)$ تک مقداری باشد؟ (یعنی، آیا تحدبی نظیر (۱۱) وجود دارد که به هندسه نرم تکیه نداشته باشد؟)
 - آیا این شهود غیر رسمی که قسمت بی‌دور یک عملگر یکنوای ماکسیمال تمام رفتارهای سرکش ممکن را داراست می‌توان به صورت فرمول در آورد. یعنی من حدس می‌زنم:
- (آ) اگر T دارای خاصیت بدی باشد آن را قسمت بی‌دور انجام می‌دهد؛
- (ب) اگر T دارای خاصیت خوبی باشد آن را قسمت دوری انجام می‌دهد؛
- (پ) اگر T و ∂f دارای خاصیت مشترک خوبی باشند، آنگاه $T + \partial f$ نیز دارد.

۵. نتیجه

نظریه‌ی عملگر یکنوای ماکسیمال تازه در مرحله‌ی نو شکوفایی قرار دارد. هنوز سوالات باز جذاب بسیاری وجود دارند: قضایایی برای اثبات و مثالهای نقضی برای یافتن وجود دارند و ما از دانستن داستان نهایی به دوریم.

سپاسگزاری

می‌خواهم از دو داور مقاله به خاطر بذل توجه‌شان و از دو گروه محققین تشکر کنم؛ آنانی که در این نیم‌قرن تحقیق مشارکت داشته‌اند و کسانی که قرار است سهم خود را ارائه دهند.

مراجع

- [1] Ahn, B.-H.: Computation of Market Equilibria for Policy Analysis: The Project Independence Evaluation System (PIES) Approach. Models demand especially via (anti) monotone operators. Garland Publishing, New York (1979)
- [2] Asplund, E.: A monotone convergence theorem for sequences of nonlinear mappings. Proc. Symp. Pure Math. 18, 1–9 (1970)
- [3] Asplund, E., Rockafellar, R.T.: Gradients of convex functions. Trans. Am. Math. Soc. 139, 443–467 (1969)

- [4] Bahn, O., Haurie, A., Zachary, D.S.: Mathematical modeling and simulation models in energy systems. Les Cahier de GERAD, G-2004-41, (2004)
- [5] Bartz, S., Bauschke, H.H., Borwein, J.M., Reich, S., Wang, X.: Fitzpatrick functions, cyclic monotonicity and Rockafellar's antiderivative. *Nonlinear Anal.* 66, 1198–1223 (2007)
- [6] Bauschke, H.H., Borwein, J.M.: Maximal monotonicity of dense type, local maximal monotonicity, and monotonicity of the conjugate are all the same for continuous linear operators. *Pacific J. Math.* 189, 1–20 (1999)
- [7] Bauschke, H.H., Wang, X.: The kernel average for two convex functions and its application to extensions and representation of monotone operators. *Trans. Am. Math. Soc.* 361, 5947–5965 (2009)
- [8] Borwein, J.M.: Maximal monotonicity via convex analysis. *J. Conv. Anal.* 13, 561–586 (2006)
- [9] Borwein, J.M., Lewis, A.S.: *Convex Analysis and Nonlinear Optimization. Theory and Examples*, CMS Books, vol. 3. Springer, Berlin (2000). Second extended edition (2005)
- [10] Borwein, J.M., Noll, D.: Second order differentiability of convex functions in Banach spaces. *Trans. Am. Math. Soc.* 342, 43–82 (1994)
- [11] Borwein, J.M., Reich, S., Shafir, I.: Krasnoselski-Mann iterations in normed spaces. *Canad. Math. Bull.* 35, 21–28 (1992)
- [12] Borwein, J.M., Vanderwerff, J.D.: *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples*. Encyclopedia of Mathematics and Applications, vol. 109. Cambridge University Press, UK (2010)
- [13] Borwein, J.M., Zhu, Q.: *Techniques of Variational Analysis*, CMS Books, vol. 20. Springer, Berlin (2005)
- [14] Brézis, H.: *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert* (French). North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50). North-Holland Publishing Co., Amsterdam, London; Elsevier, New York (1973)
- [15] Brézis, H., Haraux, A.: Image d'une somme d'opérateurs monotones et applications. (English summary). *Israel J. Math.* 23, 165–186 (1976)
- [16] Browder, F.E.: Fixed point theory and nonlinear problems. *Bull. Am. Math. Soc.* 9, 1–39 (1983)
- [17] Browder, F.E., Hess, P.: Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces. *J. Funct. Anal.* 11, 251–294 (1972)
- [18] Burachik, R.S., Iusem, A.N.: *Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators*. Springer Optimization and Its Applications, vol. 8. Springer, Berlin (2008)
- [19] Combettes, P.L., Pesquet, J.-C.: A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery. *IEEE J. Select. Topics Signal Process.* 1, 564–574 (2007)
- [20] Deimling, K.: *Nonlinear Functional Analysis*. Springer, Berlin (1985)
- [21] Eckstein, J., Bertsekas, D.P.: On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators. *Math. Program.* 55, 293–318 (1992)
- [22] Fitzpatrick, S.: Representing monotone operators by convex functions. *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.* 20, 59–65 (1988)
- [23] Fitzpatrick, S., Phelps, R.R.: Bounded approximants to monotone operators on Banach spaces. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non linéaire* 9, 573–595 (1992)
- [24] Fort, M.K. Jr.: Points of continuity of semi-continuous functions. *Publ. Math. Debrecen* 2, 100–102 (1951)
- [25] Fortin, M., Glowinski, R. (eds.): *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1983)
- [26] Franssen, H.T.: Towards project independence: energy in the coming decade. Prepared for the Joint Committee on Atomic Energy, United States Congress, OSTI ID: 7283709. Library of Congress, Congressional Research Service, Ocean and Coastal Resources Project (1975)
- [27] Glowinski, R., Le Tallec, P.: *Augmented Lagrangian and Operator-splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. SIAM, USA (1989)
- [28] Gossez, J.-P.: Opérateurs monotones non linéaires dans les espaces de Banach non réflexifs. *J. Math. Anal. Appl.* 34, 371–376 (1971)
- [29] Gulevich, N.M.: Fixed points of nonexpansive mappings. *J. Math. Sci.* 79, 765–815 (1996)
- [30] Kenderov, P.S.: Semi-continuity of set-valued monotone mappings. *Fund. Math.* 88, 61–69 (1975)
- [31] Kenderov, P.S.: Monotone operators in Asplund spaces. *C.R. Acad. Bulgare Sci.* 30, 963–964 (1977)

- [32] Kartsatos, A.G., Skrypnik, I.V.: On the eigenvalue problem for perturbed nonlinear maximal monotone operators in reflexive Banach spaces. *Trans. Am. Math. Soc.* 358, 3851–3881 (2006)
- [33] Mignot, F.: Contrôle dans les inéquations variationelles elliptiques. *J. Funct. Anal.* 22, 130–185 (1976)
- [34] Minty, G.J.: Monotone Networks. *Proc. Roy Soc. Lond.* 257, 194–212 (1960)
- [35] Minty, G.J.: Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. *Duke Math. J.* 29, 341–346 (1962)
- [36] Minty, G.J.: On the monotonicity of the gradient of a convex function. *Pacific J. Math.* 14, 243–247 (1964)
- [37] Minty, G.J.: On some aspects of the theory of monotone operators. In: *Theory and Application of Monotone Operators (Proceedings of NATO Advanced Study Institute, Venice, 1968)*, pp. 67–82 (1969)
- [38] Musev, B., Ribarska, N.: On a question of J. Borwein and H. Wiersma. Preprint (2009)
- [39] Phelps, R.R.: *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1364. Springer, Berlin (1989). Second edition 1993
- [40] Preiss, D., Phelps, R.R., Namioka, I.: Smooth Banach spaces, weak Asplund spaces and monotone or usco mappings. *Israel J. Math.* 72, 257–279 (1990)
- [41] Rockafellar, R.T.: On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. *Pacific J. Math.* 33, 209–216 (1970)
- [42] Rockafellar, R.T.: On the maximality of sums of nonlinear monotone operators. *Trans. Am. Math. Soc.* 14, 75–88 (1970)
- [43] Rockafellar, R.T.: On the maximality of sums of nonlinear monotone operators. *Trans. Am. Math. Soc.* 14, 75–88 (1970)
- [44] Rockafellar, R.T.: On the virtual convexity of the domain and range of a nonlinear maximal monotone operator. *Math. Ann.* 185, 81–90 (1970)
- [45] Rockafellar, R.T.: Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM J. Control Optim.* 14, 877–898 (1976)
- [46] Simons, S.: *Minimax and Monotonicity*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1693. Springer, Berlin (1998)
- [47] Simons, S.: *Minimax and Monotonicity*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1693, 2nd edition: Renamed From Hahn-Banach to Monotonicity. Springer, Berlin (2008)
- [48] 48. Simons, S.: Banach SSD spaces and classes of monotone sets. <http://arxiv.org/abs/0908.0383v2> posted 26 August (2009)
- [49] Spingarn, J.E.: Partial inverse of a monotone operator. *Appl. Math. Optim.* 10, 247–265 (1983)
- [50] Tseng, P.: Applications of a splitting algorithm to decomposition in convex programming and variational inequalities. *SIAM J. Control Optim.* 29, 119–138 (1991)
- [51] Zarantonello, E.H.: Projections on Convex Sets in Hilbert Space and Spectral Theory I Projections on Convex Sets. In: *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*. Academic Press, Dublin (1971)
- [52] Zarantonello, E.H. (ed.): *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*. pp. 237–341. Academic Press, Dublin (1971)
- [53] Zarantonello, E.H.: Dense single-valuedness of monotone operators. *Israel J. Math.* 15, 158–166 (1973)
- [54] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications: Part 2 A: Linear Monotone Operators and Part 2 B: Nonlinear Monotone Operators*. Springer, Berlin (1990)

مترجم: محمد حسین علی زاده

زنجان، بلوار پروفیسور ثبوتی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، دانشکده ریاضی

m.alizadeh@iasbs.ac.ir



مترجم متولد اسفندماه ۱۳۵۱ در روستای حراملو از توابع شهرستان چالدران است. وی دارای دیپلم ریاضی و فیزیک از دبیرستان مدنی شهرستان ماکو است و در سال ۱۳۷۱ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه تهران شد و در سال ۱۳۷۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض در دانشگاه خوارزمی (موسسه ریاضی مصاحب) شد. سپس برای ادامه تحصیل در دوره دکتری به کشور یونان رفته و از دانشگاه اژه فارغ التحصیل شد.