

معماری دانش ریاضی: از کشف تاریخی تا یادگیری فردی

محمد سبزی* و رضا بهمانی

چکیده. این مقاله یک چارچوب نظری جدید با عنوان معماری دانش ریاضی ارائه می‌دهد. استدلال می‌کنیم که موتور واقعی رشد دانش، تنش دیالکتیکی میان دو میل معرفتی بنیادین است: میل به گسترش (تعمیم) و میل به انسجام (انتزاع). نشان می‌دهیم که این دیالکتیک از طریق یک دستور زبان شناختی متشکل از پنج مکانیسم بنیادین - ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی - به اجرا درمی‌آید. این چارچوب، با اتکا به تحلیل تاریخی و شناختی، مقیاس‌پذیر است و هم تحولات بزرگ ریاضیات و هم فرایندهای یادگیری فردی را تبیین می‌کند. نوآوری کلیدی این نظریه، شناسایی شکاف معرفتی در آموزش سنتی به مثابه گسستن این دیالکتیک است؛ جایی که دانش به یک محصول ایستا و موزه‌ای تقلیل می‌یابد. بر این اساس، مقاله استدلال می‌کند که هدف غایی آموزش ریاضی، دستیابی به هم‌راستایی معرفتی است؛ یعنی بازگرداندن این دیالکتیک زاینده به کلاس درس. این چارچوب پیامدهای گسترده‌ای دارد: تفکر ریاضی پیشرفته را به مثابه عاملیت معمارانه - توانایی عمل کردن بر ساختار دانش - بازتعریف می‌کند و دستورزبانی ساختاری برای فهم خلاقیت ریاضی و نیز آسیب‌شناسی مقابل آن، یعنی صلیبیت الگوریتمی، فراهم می‌آورد. در نتیجه، این نظریه یک مدل پویا برای تحلیل ساخت دانش و یک نقشه راه عملی برای طراحی آموزشی معنادار ارائه می‌دهد.

۱. مقدمه

ریاضیات مجموعه‌ای از حقایق ثابت و موزه‌ای نیست؛ بلکه کلان‌شهری زنده، پویا، و همواره در حال ساخت است. این شهر مناطقی با معماری‌های متفاوت دارد؛ از بناهای کلاسیک هندسه تا کارخانه‌های دقیق جبر و آسمان‌خراش‌های آنالیز. اما چرا در کلاس‌های درس ما، این کلان‌شهر زنده اغلب به یک موزه غبارگرفته از قوانین خشک و بی‌روح تقلیل می‌یابد؟ چرا دانش‌آموزان به جای تجربه هیجان شهرسازی مفهومی، صرفاً به عنوان گردشگر مجبور به حفظ کردن نام خیابان‌ها می‌شوند؟ پاسخ در این است که ما هنوز زبان روشنی برای توصیف قوانین مهندسی حاکم بر این معماری در اختیار نداریم. نظریه‌های شناختی موجود، از منظرهای گوناگون به فرآیند ساخت مفهوم در سطح خرد پرداخته‌اند؛ از دوگانگی فرآیند-شی [۵۳]، چارچوب‌های مبتنی بر انتزاع بازتابی [۳]، و رویکردهای فرهنگی-تاریخی هم‌چون نظریه عینی‌سازی^۱ [۵۰]، گرفته تا مدل‌هایی هم‌چون نظریه سه جهان ریاضی^۲ که قلمروهای شناختی را نقشه‌برداری می‌کنند [۶۱]. با این حال، خود ماشین‌آلات مهندسی این تحولات مفهومی هم‌چون یک جعبه‌سیاه باقی مانده است. ما واژه تعمیم/انتزاع را به کار می‌بریم، اما نمی‌توانیم

عبارات و کلمات کلیدی: واژه‌های کلیدی: دیالکتیک تعمیم و انتزاع، هم‌راستایی معرفتی، عاملیت معمارانه، مکانیسم‌های شناختی، تفکر ریاضی پیشرفته.
دبیرتخصصی رابط: —————

نوع مقاله: —————

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/XX/XX تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/XX/XX

MSCI.xxxx / <http://dx.doi.org/>

¹The Theory of Objectification ²The Three Worlds of Mathematics

بادقت بگوئیم که در این فرآیند، کدام ابزارهای شناختی به کار گرفته می شود و چگونه ایده ها میان مناطق جابه جا می شود، بحران ها به بازسازی منجر می شوند و برج های جدید سر برمی آورند. ما به یک دستور زبان شناختی^۳ برای توصیف این شهرسازی مفهومی نیاز داریم. هم راستا با این نیاز، پژوهش های معاصر در حوزه نظریه سازی شناختی ریاضی [۱۵، ۵۰] نیز بر نیاز به مدل های پویا و چندلایه برای تبیین تحول مفهومی تاکید دارند.

این مقاله برای بازکردن این جعبه سیاه، چارچوبی نظری و یکپارچه با عنوان معماری دانش ریاضی^۴ (MKA) ارائه می دهد. توافقی ما این است که تحولات ساختاری در دانش ریاضی، از کشف تاریخی تا یادگیری فردی، توسط یک دستور زبان شناختی مشترک متشکل از پنج مکانیسم بنیادین هدایت می شود: ترجمه، فشرده سازی، بازآرایی، هماهنگی، و گذار معرفتی. ما استدلال می کنیم که هدف غایی آموزش، دستیابی به هم راستایی معرفتی^۵ است؛ وضعیتی که در آن معماری ذهنی یادگیرنده با منطق ساختاری و روح خلاق تاریخ ریاضیات هم سو می شود.

نوآوری کلیدی این چارچوب در مقیاس پذیری آن نهفته است. برای نشان دادن این قدرت، پیدایش حسابان را نه به عنوان یک کشف ناگهانی، بلکه به عنوان تعامل پویای این پنج مکانیسم تحلیل می کنیم. رویکرد روایت معماری این مقاله، امکان کالبدشکافی مسیر پیدایش یک مفهوم کلیدی را از طریق این پنج مکانیسم فراهم می آورد. خروجی این تحلیل، یک نقشه راه شناختی است که جوهره عقلانی و ساختاری کشف تاریخی را، فارغ از جزئیات غیرضروری، به تصویر می کشد. این نقشه راه، سنگ بنای طراحی نسخه های هدایت شده^۶ آموزشی در کلاس درس است. این نسخه ها با بازسازی مسیر اکتشافی معنادار، به پُرکردن شکاف معرفتی میان ریاضیات به عنوان محصول نهایی و ریاضیات به عنوان فرآیند خلاق کمک می کنند و پیوند مستقیمی با ایده بازآفرینی هدایت شده^۷ فرویدنتال [۱۸] برقرار می سازند.

برای جادادن این دیدگاه در نقشه پژوهش های معاصر، باید به موقعیت نظری آن اشاره کنیم. MKA به جای ادغام پارادایم های شناختی و اجتماعی-فرهنگی، یکپارچگی را از طریق ایده کلیدی مقیاس پذیری دنبال می کند. توافقی این نظریه آن است که یک دستور زبان شناختی بنیادین و مشترک وجود دارد که بر فرایندهای ساخت دانش در مقیاس های مختلف حاکم است. بر این اساس، هدف هم راستایی معرفتی، نه ادغام عوامل اجتماعی با شناختی، بلکه هم راستا کردن معماری شناختی فردی با معماری شناختی نهفته در تاریخ خود ریاضیات است.

ما آگاهیم که استفاده از عمل ریاضی به عنوان منبعی برای استخراج اصول آموزشی، با چالش های روش شناسی جدی روبه روست [۶۵]. با این حال، هدف ما صرفاً ارائه یک تجویز پداگوژیک برپایه تقلید از کار ریاضی دانان نیست. بلکه استدلال می کنیم که می توان از طریق تحلیل تاریخی-معرفت شناسی، دستور زبان شناختی بنیادینی را بازشناخت که بر فرایندهای ساخت دانش در مقیاس های مختلف، از کشف تاریخی تا یادگیری فردی، حاکم است. MKA تلاشی برای فرمول بندی همین دستور زبان مقیاس پذیر است. هدف ما نه نسخه برداری از رفتار ریاضی دانان، بلکه شناسایی منطق های شناختی مولدی است که می توانند به صورت نظری و مستقل از موقعیت تاریخی، مدل سازی شوند.

۱.۱. رویکرد روش شناسی. این مقاله یک پژوهش مفهومی است که هدف آن ارائه یک چارچوب نظری جدید است. از این رو، روش شناسی آن نه تجربی، بلکه مبتنی بر تحلیل مفهومی نظام مند و نظریه پردازی است. این رویکرد با سنت تحلیل مفهومی در آموزش ریاضی هم خوان است (برای مثال، [۵۳، ۵۶]) که در آن ساختارهای نظری از رهگذر بازتفسیر نظام مند شواهد تاریخی و شناختی - نه داده های تجربی - پرورده می شوند. طراحی پژوهش به گونه ای است که اعتبار تاریخی، قابلیت پذیرش شناختی، و قدرت تحلیلی این چارچوب را تضمین کند.

³ Cognitive Grammar ⁴ Mathematical Knowledge Architecture (MKA) ⁵ Epistemic Alignment ⁶ Guided Versions

⁷ Guided Reinvention

پنج مکانیسم بنیادین از طریق یک فرآیند تکرارشونده از تحلیل تاریخی-معرفت‌شناسی استخراج شده‌اند. ما اپیزودهای محوری در تاریخ ریاضیات (مانند پیدایش حسابان، دقیق‌سازی هندسه، و یکپارچه‌سازی جبر و هندسه) را تحلیل کرده‌ایم تا الگوهای تکرارشونده تحول مفهومی را در سطح کلان شناسایی کنیم. سپس، این الگوهای تاریخی با پدیده‌های شناختی به‌خوبی مستند شده در ادبیات پژوهشی آموزش ریاضی (مانند چالش‌های دانش‌آموزان با انتزاع، فرآیندهای شی‌انگاری، و روانی در بازنمایی‌ها) تطبیق داده شده‌است تا مقیاس‌پذیری و ربط روان‌شناختی آن‌ها در سطح خرد یادگیری فردی برجسته شود. وینیت‌های^۸ ارائه شده در بخش ۶، داده‌های تجربی نیستند، بلکه به‌عنوان آزمایش‌های فکری تمثیلی یا موارد نوعی^۹ عمل می‌کنند. این وینیت‌ها به‌عنوان سناریوهایی پذیرفتنی ساخته شده‌اند که از یافته‌های تثبیت‌شده و پدیده‌های رایج گزارش شده در ادبیات پژوهشی در زمینه یادگیری و بدفهمی‌های دانش‌آموزان (مانند سوگیری اعداد طبیعی، و چالش‌های گذار از فهم رویه‌ای به فهم مفهومی) ساخته شده‌اند. هر وینیت بادقت طراحی شده‌است تا کارکرد (یا کارکردی) یک مکانیسم مشخص را ایزوله کند و بدین‌سان، قدرت تحلیلی و دقت تشخیصی چارچوب را آشکار سازد. این نوع نظریه‌سازی از منطق تعمیم تحلیلی [۶۶] پیروی می‌کند و اعتبار آن در انسجام تبیینی است، نه در نمایندگی آماری داده‌ها.

این مقاله برای بنانهادن این چارچوب در سه حرکت اصلی طراحی شده‌است. نخست، ما معماری نظری را بنا می‌کنیم (بخش ۲)، که شامل پنج مکانیسم بنیادین، سه قلمرو دانش و هدف غایی هم‌راستایی معرفتی (بخش ۷) است. دوم، قدرت تحلیلی این چارچوب را در دو مقیاس به‌نمایش می‌گذاریم: در سطح کلان تحولات تاریخی (بخش ۵) و در سطح خرد یادگیری فردی (بخش ۶). درنهایت، پیامدهای عمیق این چارچوب را برای بازتعریف مفاهیم بنیادینی چون تفکر ریاضی پیشرفته و خلاقیت بررسی و مسیرهای پژوهش آینده را ترسیم می‌کنیم (بخش ۸).

۲. چارچوب نظری

۱.۲. دو فرایند بنیادین: تعمیم و انتزاع. در تحلیل‌های سنتی آموزش، تعمیم غالباً به‌عنوان مهارت سطح بالا یا محصول نهایی یادگیری تلقی می‌شد [۳۱]. اما نظریه‌پردازان مدرن آن را نه محصول، بلکه فرآیندی بنیادین و ذاتی در فعالیت ریاضی دانسته‌اند [۹، ۴۲، ۴۳، ۵۴، ۵۵، ۶۷]. درکنار آن، انتزاع به‌عنوان فرایندی مکمل عمل می‌کند که طی آن ساختارهای مفهومی فشرده‌تر و قابل انتقال پدید می‌آیند؛ دیدگاهی ریشه‌دار در سنت انتزاع بازتابی^{۱۰} پیازه و توسعه‌یافته در نظریه‌های مدرن شی‌انگاری^{۱۱} اسفارد و کپسوله‌سازی^{۱۲} دوبینسکی [۱۶، ۴۶، ۵۳].

با این وجود، بخش عمده‌ای از پژوهش‌های پیشین، این دو فرایند را در سطحی توصیفی بررسی کرده‌اند و کمتر به سازوکارهای دقیق آن‌ها پرداخته‌اند. آنچه هم‌چنان مبهم باقی مانده، این است که شخص درحال ریاضی‌ورزی^{۱۳} چگونه این حرکات را در عمل اجرا می‌کند و پیش می‌برد. از این رو، این پژوهش به‌جای بسنده کردن به طبقه‌بندی‌های کلی گذشته، بر آن است که زبانی فرایندی و عمل‌گرایانه برای توصیف سازوکارهای زیربنایی ارائه دهد؛ زبانی که بتواند واحدهای عملیاتی کوچک‌تر و قابل‌تحلیل‌تری را شناسایی کند. ما استدلال می‌کنیم که هر تعمیم یا انتزاع معنادار، محصول اجرای یک یا چند مکانیسم از پنج مکانیسم بنیادین است. با این زبان می‌توانیم دقیق‌تر بگوییم که یک جهش مفهومی، حاصل ترجمه‌ای هوشمندانه برای گسترش قلمرو است (دکارت در جست‌وجوی روشی عام برای حل مسائل هندسی)، یا نتیجه فشرده‌سازی خلاقانه برای ساخت یک ابزار جدید (نیوتن در تدوین قاعده‌ای کلی برای نرخ تغییر)، یا یک بازآرایی عمیق (هانکل در اصل تداوم قوانین صوری و تعمیم اعداد [۶۲]).

⁸Vignette ⁹Prototypical Cases ¹⁰Reflective Abstraction ¹¹Reification ¹²Encapsulation ¹³Mathematizing

در ادامه، پنج مکانیسم بنیادین معرفی می‌شود که می‌توانند نقش یک دست‌ورزبان ساختاری را برای توصیف حرکات معنادار در فرایندهای تعمیم و انتزاع ایفا کنند. این مکانیسم‌ها با هدف تبیین سطحی زیرین‌تر از فعالیت ریاضی پیشنهاد می‌شوند؛ سطحی که در تحلیل‌های مفهومی موجود، کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است.

۲.۲. پنج مکانیسم تحول. مکانیسم‌هایی که می‌خواهیم تعریف کنیم کنش‌های مهندسی بنیادینی هستند که دانش از طریق آن‌ها ساخته، اصلاح و یکپارچه می‌شود. اصل محوری در این نظریه، مقیاس‌پذیری این مکانیسم‌هاست: همان فرآیندهایی که تحولات بزرگ تاریخی را ممکن می‌سازند، به صورت بازتابی و فرکتالی در یادگیری فردی نیز عمل می‌کنند. تفاوت تنها در مقیاس، زمینه و پیچیدگی است، نه در ماهیت فرآیند مهندسی-شناختی.

واژه‌های انتخاب‌شده برای این پنج مکانیسم، ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی، هم بر میراث نظریه‌پردازان پیشین تکیه دارد و هم نقشی تازه می‌یابد. ما بر شانه پیاژه، اسفارد، دوبینسکی، دیوید تال و لاکاتوش ایستاده‌ایم؛ اما نوآوری MKA در نقش ساختاری و سیستمی جدیدی است که به این مفاهیم واگذار شده است. برای مثال، فشرده‌سازی درحالی‌که ایده شی‌انگاری اسفارد را در سطح فردی دربر می‌گیرد، به سطح کلان ارتقا می‌یابد و تحلیل تکامل تاریخی مفاهیمی چون گروه را نیز ممکن می‌سازد. به‌طورمشابه، بازآرایی مکانیسمی معماری است که فرآیندهایی کلی‌تر مانند انطباق پیاژه یا چرخه اثبات و ابطال لاکاتوش را در سطح ساختارهای دانشی عملی می‌سازد.

بنابراین، نوآوری اصلی این نظریه در دو نکته است: نخست، ارتقای این فرآیندها به سطح معماری چندمقیاسی (فردی و تاریخی)؛ دوم، ارائه آن‌ها به‌عنوان سیستمی جامع و منسجم که دست‌ورزبان کامل تحول دانش را تشکیل می‌دهد. در ادامه، هر مکانیسم با تعریف معماری‌محور خاص خود تشریح می‌شود.

ترجمه. ۱۴

ترجمه جابه‌جایی نظام‌مند یک سازه مفهومی از یک نظام بازنمایی به نظامی دیگر است. شرط اساسی ترجمه معتبر، حفظ ساختار معنایی عمیق آن سازه است، حتی اگر ابزارهای نمایش کاملاً تغییر کنند. پژوهش‌ها نشان داده‌اند که روانی در ترجمه میان بازنمایی‌های تصویری و نمادین از عوامل کلیدی موفقیت در تعمیم جبری است [۴۸]. این مکانیسم همچون پلی میان مناطق مختلف عمل می‌کند.

در سطح خرد شناختی، پل‌سازی از طریق فعال‌سازی هم‌زمان منابع نشانه‌شناختی چون گفتار، نوشتار، ژست و تصویر رخ می‌دهد؛ پدیده‌ای که در چارچوب دسته نشانه‌شناختی تحلیل شده است [۲]. از این رو، توانایی یادگیرنده در اجرای ترجمه به غنا و انسجام دسته نشانه‌شناختی او وابسته است. حوزه اثر این مکانیسم معمولاً میان دو معماری یا دو نظام بازنمایی متفاوت است (مثلاً هندسه و جبر) و کارکرد اصلی آن، دسترس‌پذیر ساختن ابزارهای یک حوزه برای حل مسائل حوزه‌ای دیگر است. بر اهمیت این حرکت روان بین بازنمایی‌ها به‌عنوان یکی از شروط فهم عمیق در پژوهش‌های تفکر ریاضی پیشرفته، به‌ویژه در کار دیرفوس، تأکید شده است [۱۴].

یک نمونه ساده، نمایش تابع به‌صورت معادله جبری $f(x) = x^2$ ، جدول زوج‌های مرتب یا نمودار گرافیکی است؛ توانایی جابه‌جایی روان بین این سه بازنمایی نشانه درک عمیق از مفهوم تابع است. در چارچوب ما، این کنش یک مکانیسم معماری کلیدی است که اهمیت آن در سطح نشانه‌شناختی توسط دووال با مفهوم تبدیل^{۱۵} تحلیل شده است [۱۷].

این مکانیسم در مقیاس‌های مختلف عمل می‌کند: در سطح کلان-تاریخی، مانند کار دکارت که میان معماری‌های عظیم هندسه اقلیدسی و جبر نمادین پل زد؛ و در سطح خرد-شناختی، مانند حل یک مساله کلامی توسط دانش‌آموز که میان روایت جهان واقعی (زبان طبیعی) و حساب مدرسه (نمادهای ریاضی) ترجمه صورت می‌گیرد [۶۴]. اصل بنیادین در هر دو

¹⁴ Translation ¹⁵ Conversion

سطح یکسان است: جابه‌جایی نظام‌مند بین دو نظام بازنمایی با حفظ ساختار معنایی؛ تفاوت فقط در مقیاس و پیچیدگی معماری‌های درگیر است.

۱۶. فشرده‌سازی.

فشرده‌سازی فرآیندی شناختی است که در آن یک فعالیت پیچیده، چندمرحله‌ای و زمان‌بر به یک سازه یا مفهوم واحد، ایستا و قابل‌دستکاری بدل می‌شود. این مکانیسم، ابزار ساز اصلی در معماری دانش است^{۱۷}. حوزه تأثیر این مکانیسم درون یک معماری است و کارکرد آن، آزاد کردن فضای شناختی برای ساخت‌وسازهای مفهومی پیچیده‌تر است. این مهم، از طریق عبور از اجرای رویه‌های زمان‌بر و تبدیل آن‌ها به سازه‌های مفهومی واحد و کارآمد، محقق می‌شود. این مکانیسم به صورت فرکتالی در مقیاس‌های مختلف عمل می‌کند. در سطح خرد، این همان فرآیندی است که طی آن، رویه $a \times a \times \dots \times a$ به سازه مفهومی a^n فشرده می‌شود. در مقیاس کلان تاریخی، فرآیند طولانی و چند دهه‌ای کار بر روی رویه‌های محاسباتی پراکنده در حوزه جایگشت‌ها، در نهایت در سازه انتزاعی گروه فشرده شد. در هر دو مورد، یک رویه به یک سازه قابل‌دستکاری تبدیل شده است که خود می‌تواند در ساختارهای سطح بالاتر به کار گرفته شود.

۱۸. بازآرایی.

بازآرایی زمانی رخ می‌دهد که ورود یک ایده، ابزار یا مثال نقض جدید، روابط میان اجزای دانش موجود را بازچینش می‌کند و شبکه‌ای تازه و کارآمدتر می‌سازد. این مکانیسم نقش مهندس نوسازی و مقاوم‌سازی را دارد^{۱۹}. حوزه اثر آن درون یک معماری است و کارکردش حل تناقضات، رفع بدفهمی‌ها و افزایش انسجام شبکه مفهومی. بازآرایی لزوماً خود مفاهیم را تغییر نمی‌دهد، بلکه ساختار ارتباطی میان آن‌ها را دگرگون می‌کند. یک مثال ساده، درک یک دانش‌آموز از ضرب به عنوان جمع مکرر است که همواره نتیجه را بزرگ‌تر می‌کند. این معماری ذهنی در مواجهه با ضرب در یک عدد کسری مانند $4 = 8 \times \frac{1}{2}$ دچار بحران می‌شود. بازآرایی در این جا به تغییر فهم از جمع مکرر به تغییر مقیاس منجر می‌شود تا هر دو وضعیت پوشش داده شود.

۲۰. هماهنگی.

هماهنگی فرآیند خلاقانه‌ای است که دو یا چند معماری یا ساختار مفهومی مجزا را در یک نظام نو و یکپارچه ادغام می‌کند. این مکانیسم نقش شهرساز کلان را دارد. برخلاف ترجمه که تنها پلی بین دو حوزه می‌سازد، هماهنگی با تغییر قوانین و ایجاد زیرساخت‌های تازه، معماری‌ای نو خلق می‌کند. این اصل شناختی، که در سطح خرد در یادگیری مفاهیم عددی دیده می‌شود [۶۰]، در چارچوب ما به یک مکانیسم معماری مقیاس‌پذیر ارتقا می‌یابد. نمونه بارز آن، صفحه اعداد مختلط است که از هم‌نشینی محور حقیقی (ساختار جبری) و صفحه دکارتی (ساختار هندسی) پدید آمد؛ جایی که اعمال جبری، مانند ضرب در i ، با کنش‌های هندسی، مانند دوران 90° درجه، یکی می‌شوند.

^{۱۷} اصطلاح فشرده‌سازی در این نظریه، یک مکانیسم معماری محور و چندمقیاسی است که هم در سطح فردی و هم در تاریخ ریاضیات عمل می‌کند. این مفهوم در امتداد میراث سازنده‌گرایی از انتزاع بازتابی پیازه تا شی‌انگاری اسفارد و کیسوله‌سازی در APOS قرار می‌گیرد، اما یک تمایز کلیدی دارد: درحالی‌که آن نظریه‌ها بر فرآیند ذهنی یادگیرنده متمرکزند، فشرده‌سازی در چارچوب ما به مثابه یک اصل مهندسی-معماری مطرح می‌شود که امکان تحلیل تحولات ساختاری بزرگ در تاریخ ریاضیات را نیز با همان زبان فراهم می‌آورد.

^{۱۹} این مکانیسم در چارچوب ما یک اصل معماری محور است که بازچینش شبکه‌های مفهومی در پاسخ به بحران‌ها را توضیح می‌دهد. در سطح شناختی، بازآرایی سازوکار مهندسی-شناختی برای تحقق پدیده انطباق (Accommodation) پیازه است؛ فرآیندی که در آن یک ساختار ذهنی برای حل یک ناهماهنگی شناختی، خود را بازسازی می‌کند [۴۶]. در سطح تاریخی-معرفت‌شناسی نیز همان کنش محوری است که در مدل پویای اثبات‌ها و ابطال‌های لاکاتوش [۳۸] عمل می‌کند، جایی که کشف مثال‌های نقض، معماران دانش را به بازآرایی تعاریف و قضایا وامی‌دارد.

¹⁶Compression ¹⁸Reconfiguration ²⁰Coordination

گذار معرفتی. ۲۱

گذار معرفتی به معنای تغییر در معیارهای بنیادین صدق و اعتبار در دانش ریاضی است؛ زمانی که جامعه ریاضی یا یک یادگیرنده، چارچوبی نو برای تشخیص ریاضیات معتبر اتخاذ می‌کند. این مکانیسم نقش انقلاب و بازنویسی قانون اساسی را دارد. حوزه اثر آن بر اصول بنیادین یک معماری است و برخلاف تغییرات تکاملی، یک دگرگونی ریشه‌ای در نحوه شناخت، استدلال و اعتباربخشی است. برای درک این تمایز، بیایید دو موقعیت را مقایسه کنیم. غلبه یک دانش‌آموز بر این باور که «ضرب همیشه بزرگ‌تر می‌کند» یک بازآرایی است. در این جا، مفهوم ضرب برای شامل کردن اعداد کسری بازآرایی می‌شود، اما معیار صدق (یعنی صحت محاسبات حسابی) دست‌نخورده باقی می‌ماند. در مقابل، گذار از حقیقت تجربی به حقیقت قیاسی، یک گذار معرفتی کلاسیک است. دانش‌آموزی را در نظر بگیرید که پس از آزمودن چند مثلث، از درستی یک گزاره هندسی مطمئن می‌شود و می‌گوید: «واضح است که درست است، من آن را دیده‌ام.» معیار حقیقت برای او، انطباق با مشاهده تجربی است. گذار معرفتی زمانی رخ می‌دهد که او می‌پذیرد که این معیار دیگر کافی نیست و معیار جدید حقیقت در معماری ریاضیات، استنتاج‌پذیری از اصول موضوعه است، حتی اگر نتیجه با شهود او در تضاد باشد. در این جا، خود تعریف حقیقت تغییر کرده است. در مقیاسی بزرگ‌تر، کل تاریخ دقیق‌سازی آنالیز در قرن نوزدهم، یک گذار معرفتی بود. ریاضی‌دانان از یک معیار حقیقت مبتنی بر شهود فیزیکی و هندسی (که در حسابان کافی بود) به یک معیار حقیقت جدید مبتنی بر اثبات صوری اپسیلون-دلتا مهاجرت کردند. این گذار، نه صرفاً بازآرایی مفاهیمی مانند حد و پیوستگی، بلکه بازنویسی کامل قواعد بازی و معیارهای اعتباربخشی در کل آنالیز بود.

مفهوم گذار معرفتی در چارچوب ما، از سنت غنی تحلیل گسست‌های معرفتی^{۲۲} در فلسفه علم قرن بیستم الهام گرفته است. این مفهوم، به‌طور خاص، به بازتفسیر ایده تغییر پارادایم کوهن [۳۷] در مقیاس شناختی می‌پردازد. با این حال، یک تمایز کلیدی وجود دارد: درحالی که پارادایم‌های کوهن اغلب به تغییرات کلان در جوامع علمی اشاره دارند، گذار معرفتی به صورت مقیاس‌پذیر عمل می‌کند و هم بر تحولات تاریخی و هم بر جهش‌های شناختی در ذهن یادگیرنده فردی حاکم است. از این منظر، رویکرد ما به معرفت‌شناسی تاریخی فرانسه، به‌ویژه به کار گاستون باشلار [۴]، نزدیک‌تر است. باشلار بر موانع معرفتی^{۲۳} تمرکز می‌کند؛ باورهای ریشه‌داری که باید برای رسیدن به یک درک علمی جدید بر آن‌ها غلبه کرد. گذار معرفتی در چارچوب ما، فرآیند شناختی عبور از همین موانع را مدل‌سازی می‌کند؛ چه این مانع، غلبه جامعه ریاضی بر شهود هندسی در قرن نوزدهم باشد، و چه غلبه یک دانش‌آموز بر معیار حقیقت تجربی. در هر دو مورد، این یک تغییر بنیادین در معیارهای صدق و اعتبار در معماری دانش است [۶۹].

تمایز و تعامل مکانیسم‌ها. اگرچه این پنج مکانیسم برای وضوح تحلیلی به صورت مجزا تعریف شده‌اند، اهمیت واقعی در درک تعامل پویا و وابستگی متقابل آن‌هاست. ترجمه باید به‌دقت از دیگر انواع ارتباط، به‌ویژه هماهنگی، متمایز شود. ترجمه پلی میان دو معماری مستقل می‌سازد و هویت هر دو را حفظ می‌کند (مانند ترجمه میان جبر و هندسه در هندسه تحلیلی). در مقابل، هماهنگی فرآیندی عمیق‌تر است که در آن دو معماری درهم ادغام می‌شوند و یک معماری کاملاً جدید با قوانین و موجودیت‌های خاص خود پدید می‌آید (مانند خلق هندسه تحلیلی به واسطه محاسبه‌پذیر کردن استدلال‌های هندسی از طریق معرفی دستگاه مختصات).

در پروژه‌های بزرگ معماری دانش، چه در تاریخ ریاضیات و چه در یادگیری عمیق فردی، این مکانیسم‌ها به‌ندرت به‌تنهایی عمل می‌کنند. آن‌ها معمولاً زنجیروار و به‌عنوان پیش‌نیاز یکدیگر فعال می‌شوند تا تحولات پیچیده را ممکن سازند. مثال روشن آن، شکل‌گیری هندسه تحلیلی است: نخست ترجمه‌ای نظام‌مند مسائل شهودی هندسه را به‌زبان نمادین جبر منتقل

²¹Epistemic Shift ²²Epistemological Ruptures ²³Epistemological Obstacles

کرد؛ اما این ترجمه تنها زیرساختی بود برای هماهنگی بعدی، که به خلق معماری تازه‌ای انجامید؛ معماری‌ای که در آن جبر و هندسه به‌صورت درهم‌تنیده عمل می‌کنند. این نمونه تاریخی نشان می‌دهد چگونه یک مکانیسم می‌تواند زمینه‌ساز مکانیسم قدرت‌مندتر بعدی باشد.

۳.۲. چشم‌انداز و هدف: سه قلمرو و هم‌راستایی معرفتی. پنج مکانیسم بنیادین، در یک چشم‌انداز متشکل از سه قلمرو کلیدی دانش عمل می‌کنند:

- قلمرو زایشی^{۲۴}: قلمروی تاریخی، خلاق و مساله‌محور که مفاهیم ریاضی نخستین‌بار در پاسخ به چالش‌های مشخص در آن پدید آمدند.
- قلمرو بازسازانه^{۲۵}: قلمروی پالایش‌یافته، صوری و خطی دانش، آن‌گونه که در آموزش رسمی و کتاب‌های درسی برای انتقال بهینه عرضه می‌شود.
- قلمرو بازتابی^{۲۶}: ساختار ذهنی شخصی، درونی و گاهی ناقص دانش که یادگیرنده برای خود می‌سازد.

چالش بنیادین آموزش ریاضی در شکاف معرفتی^{۲۷} میان این سه قلمرو نهفته است. اغلب، دانش‌آموز صرفاً با محصول نهایی در قلمرو بازسازانه مواجه می‌شود، بدون آن‌که از فرآیند خلاق و پراز بحران قلمرو زایشی آگاه باشد. هدف غایی آموزش، یعنی هم‌راستایی معرفتی^{۲۸}، پُرکردن همین شکاف است. این هم‌راستایی یک محصول نهایی و ایستا نیست، بلکه پیامد درگیرشدن فعالانه یادگیرنده در همان فرآیندهای پویایی است که خود دانش ریاضی را در طول تاریخ به حرکت درآورده است. به عبارت دیگر، هم‌راستایی معرفتی زمانی محقق می‌شود که معماری شناختی دانش‌آموز (قلمرو بازتابی)، از طریق اجرای مکانیسم‌های پنج‌گانه، با منطق ساختاری و روح خلاق تاریخ (قلمرو زایشی) هم‌نوا شود. درک این چشم‌انداز و ماشین‌آلات شناختی فعال در آن، کلید تحلیل هر دو روایت بزرگ تاریخ ریاضیات و لحظات حساس یادگیری فردی است که در بخش‌های بعدی به آن‌ها خواهیم پرداخت.

۴.۲. آسیب‌شناسی بنیادین: تعمیم گسسته به مثابه شکست معماری. حال که جایگاه تعمیم، ابزارهای مهندسی (پنج مکانیسم) و چشم‌انداز کلی (سه قلمرو) ارائه شد، می‌توانیم بنیادین‌ترین حالت شکست این سیستم را با دقت تشخیص دهیم. میل به تعمیم به‌خودی‌خود تضمینی برای خلق یک معماری منسجم نیست. اگر این نیرو به‌درستی توسط مکانیسم‌های ساختاری هدایت نشود، به یک آسیب‌شناسی عمیق منجر می‌شود که در کار بنیادین هرل و تال [۲۷] تحت‌عنوان تعمیم گسسته^{۲۹} توصیف شده است. از منظر MKA تعمیم گسسته صرفاً یک نوع تعمیم معیوب نیست؛ بلکه نتیجه مستقیم شکست در فعال‌سازی مکانیسم‌های پیشرفته‌تر است. این آسیب‌شناسی زمانی رخ می‌دهد که یادگیرنده از کار پرهزینه شناختی برای بازآرایی ساختارهای موجود یا هماهنگی معماری‌های مختلف شانه خالی می‌کند. در عوض، او به راه‌حل ساده‌تر، یعنی انباشت قواعد مجزا برای هر موقعیت جدید، پناه می‌برد؛ گویی به‌جای بازسازی یک ساختمان، برای هر نیاز جدید، کلبه‌ای جداگانه می‌سازد.

این دیدگاه، پنج مکانیسم معرفی‌شده را از یک طبقه‌بندی توصیفی، به یک جعبه‌ابزار تشخیصی و پیش‌گیرانه ارتقا می‌دهد. درک این آسیب‌شناسی بنیادین، به ما لنز جدیدی برای تحلیل چالش‌های تاریخی و شناختی در ریاضیات می‌دهد و ضرورت وجود این مکانیسم‌ها را برای ساخت یک دانش پایدار و معنادار آشکار می‌سازد.

²⁴Generative Realm ²⁵Reconstructive Realm ²⁶Reflective Realm ²⁷Epistemic Gap ²⁸Epistemic Alignment

²⁹Disjunctive Generalization

۳. حسابان: از ارشمیدس تا وایرستراس

برای نشان دادن توان تبیینی MKA، هیچ روایتی آموزنده‌تر از تاریخ پیدایش حسابان نیست. داستانی که معمولاً به صورت کشف ناگهانی نیوتن و لایبنیتس بازگو می‌شود، درواقع پروژه‌ای معماری است که طی هزاران سال ساخته شده است. این روایت بهترین صحنه برای مشاهده پویایی پنج مکانیسم بنیادی است و نشان می‌دهد که چگونه دانش ریاضی از مسیر ساخت، بحران و بازسازی شکل می‌گیرد. در این بخش، این روایت تاریخی را هم‌چون یک مطالعه موردی برای آزمون و اعتبارسنجی چارچوب نظری خود به کار می‌گیریم.

بیش‌تر شاهکارهای معماری ریاضی زمانی پدید آمدند که ساختارهای موجود دیگر توان پاسخ‌گویی به مسائل را نداشتند. حسابان نیز از همین الگو پیروی می‌کند. بنیان‌های آن در یونان باستان و برای پاسخ به دو چالش اساسی تعمیم گذاشته شد: یافتن مساحت شکل‌های منحنی و تعیین خط مماس بر آن‌ها؛ یعنی بسط دادن روش‌های موفق چندضلعی‌ها به قلمروی پیچیده‌تر منحنی‌ها [۳۶]. ارشمیدس، بزرگ‌ترین معمار آن دوران، روش فرسودگی را به اوج خلاقیت رساند و با دربرگرفتن منحنی‌ها در توالی چندضلعی‌ها، توانست مساحت‌ها را با دقت کامل محاسبه کند [۳۰]. با این حال، این روش، هرچند درخشان، بسیار دشوار و موردی بود. در MKA، کار ارشمیدس نمونه‌ای از فشردگی پیشانمادین است: فشردگی‌ای که فرآیندهای نامتناهی را به نتایج متناهی تقلیل می‌داد، اما چون فاقد بیان جبری بود، به صورت یک رویه محاسباتی باقی‌ماند و به یک ساختار مفهومی فشرده انعطاف‌پذیر بدل نشد (مقایسه کنید با [۵۳]). به همین دلیل، هر مساله تازه‌ای مستلزم نبوغی نوین بود و این معماری دوهزارساله به بن‌بست رسید.

این بن‌بست در سده هفدهم گشوده شد، زمانی که هندسه اقلیدسی (دنیای شهود) و جبر (دنیای نمادها)، پس از قرن‌ها جدایی، به دست دکارت و فرما پیوند خوردند. اختراع دستگاه مختصات پلی نظام‌مند (ترجمه) میان این دو حوزه پدید آورد و امکان هماهنگی ساختاری را فراهم کرد؛ هماهنگی‌ای که نه تنها حل مسائل هندسی با ابزارهای جبری را ممکن ساخت، بلکه زیرساخت حسابان را نیز فراهم آورد [۶]. دستگاه مختصات نمونه بارز ترجمه بود: هم‌چون واژه‌نامه‌ای دوسویه، هر منحنی را به معادله و هر معادله را به منحنی می‌برد. از این رهگذر، مساله مماس به مساله جبری شیب تبدیل شد. این نوآوری، هرچند خود حسابان نبود، اما مصالح لازم را برای ساخت آن فراهم ساخت. در این مرحله، تعامل میان ترجمه و هماهنگی آشکار است: ترجمه موفقیت‌آمیز بازنمایی‌های هندسی به زبان جبر، زمینه را برای هماهنگی ساختاری میان این دو جهان مفهومی فراهم می‌کند.

بر این بنیاد، نیوتن و لایبنیتس به‌طور مستقل دریافتند که دو مساله به‌ظاهر متفاوت، یافتن مماس (نرخ تغییر) و یافتن مساحت (انباشت)، درواقع دو روی یک سکه‌اند. قضیه بنیادی حسابان نمونه چشمگیری از هماهنگی است: وحدت‌بخشی پادمشتق و انتگرال معین (مشتق و انتگرال) به مثابه دو روی یک ساختار [۵]. در این مرحله، مکانیسم فشردگی نیز به‌بلوغ رسید؛ نشانه‌های ابتکاری لایبنیتس برای مشتق و انتگرال، رویه‌های پیچیده با بی‌نهایت کوچک‌ها dx و dy فشرده کردند، و امکان پیشرفت‌های سریع را فراهم آوردند [۸]. با این حال، بنیان‌های این بنا هم‌چنان سست بود و بر مفهوم متناقض بی‌نهایت کوچک‌ها تکیه داشت. این دوره، اوج هماهنگی و فشرده‌سازی است: قضیه اساسی حسابان، دو معماری دانش مجزا (مماس‌ها و مساحت‌ها) را هماهنگ می‌سازد و نمادگذاری جدید، رویه‌های بی‌نهایت را در سازه‌های جبری قدرت‌مند و فشرده خلاصه می‌کنند.

این سستی را جرج برکلی آشکار کرد. او بی‌نهایت کوچک‌ها را ارواح مقادیر از دست‌رفته نامید و ناسازگاری منطقی حسابان را برملا ساخت [۵]. نقد برکلی هم‌چون آزمون تنش ساختاری عمل کرد و ضرورت بازآرایی را برجسته کرد.

³⁰Infinitesimals

بازآرایی در سده نوزدهم با جنبش دقت مطلق صورت گرفت. کوشی، وایراشتراس و دیگران بی‌نهایت کوچک‌ها را کنار گذاشتند و مفهوم دقیق حد را جای‌گزین کردند [۲۲]. تعریف اپسیلون-دلتای وایراشتراس معیار معرفت‌شناسی تازه‌ای بنانهاد: حقیقت نه بر شهود یا توفیق تجربی، بلکه بر اثبات صوری در چارچوبی منطقی استوار شد. ریمان نیز با تعریف انتگرال از راه جمع ریمانی، این بنیان را تقویت کرد. این بازسازی هرچند کمتر شهودی بود، اما ثباتی بی‌سابقه به حسابان بخشید و زمینه‌گسترش‌هایی چون انتگرال لبگ را فراهم‌آورد [۳۶]. این مرحله، شاهد یک بازآرایی بنیادین و یک گذار معرفتی است: معماری دانش حسابان از بنیان‌های شهودی-حرکتی به یک ساختار منطقی-صوری بازآرایی می‌شود و معیار صدق از شهود به اثبات صوری تغییر می‌یابد.

بدین‌سان، تاریخ حسابان روایت معماری زنده‌ای است که طی سده‌ها از رهگذر فشردگی‌های شهودی، پل‌های ترجمه‌ای، هماهنگی‌های ساختاری، و درنهایت بازآرایی‌های دقیق شکل گرفته‌است. این سفر تاریخی در قلمرو زایشی دانش تفاوت عمیقی با روایت خطی و بهینه‌سازی‌شده در قلمرو بازسازانه دارد که امروزه در کتاب‌های درسی و آموزش رسمی ارائه می‌شود. روایت حسابان نشان‌داد که مسیر تاریخی شکل‌گیری مفهوم مشتق و حد، نه صرفاً مجموعه‌ای از کشفیات پراکنده، بلکه تجلی یک منطق درونی رشد عقلانی است. این روایت، بازسازی تاریخ به‌قصد آشکار ساختن سازوکارهای معرفتی درونی آن است؛ به بیان دیگر، نوعی بازسازی عقلانی در مقیاس شناختی است. در سطح فلسفی، چنین روایتی همان کاری را انجام می‌دهد که لاکاتوش [۳۸] در تحلیل تاریخ علم با عنوان بازسازی عقلانی^{۳۱} دنبال می‌کرد؛ با این تفاوت که در این‌جا، بازسازی نه در سطح نظریه‌های علمی، بلکه در سطح تکامل مفاهیم ریاضی و فرایندهای ذهنی درگیر در آن صورت می‌گیرد. از سوی دیگر، این روایت، زیربنای پداگوژیکی برای آن چیزی است که فرویدنتال [۱۸] بازآفرینی هدایت‌شده^{۳۲} می‌نامد: طراحی مسیری آموزشی که یادگیرنده در آن، جوهر عقلانی و خلاق تاریخ را در مقیاس ذهنی خویش تجربه می‌کند. بنابراین، روایت معماری را می‌توان پلی دانست میان بازسازی عقلانی لاکاتوش و بازآفرینی هدایت‌شده فرویدنتال؛ پلی که عقلانیت تاریخی ریاضیات را به تجربه شناختی یادگیرنده پیوند می‌زند و بنیان مفهومی هم‌راستایی معرفتی را فراهم می‌سازد.

۴. عمل ریاضی و مکانیسم‌ها

فیلسوف علم، فیلپ کیچر [۳۵]، رشد دانش را به‌عنوان مجموعه‌ای از گذارهای عقلانی^{۳۳} از یک عمل ریاضی^{۳۴} به عمل دیگر توصیف می‌کند. اما سوال بنیادین شناختی این است: موتور این گذارها چیست؟ چه فرآیندهای مهندسی-شناختی در سطح خرد، این تحولات کلان را ممکن می‌سازند؟ این بخش استدلال می‌کند که پاسخ در دست‌ورزبان شناختی پنج مکانیسم بنیادین نهفته است. ما نشان می‌دهیم که چگونه درام پویای ریاضی‌ورزی-یعنی چرخه حدس، اثبات و ابطال که توسط لاکاتوش [۳۸] توصیف شده-صحنه دقیقی است که در آن، این مکانیسم‌ها گذارهای عقلانی را به‌اجرا درمی‌آورند.

۱.۴. حدس و مثال: کنش‌های ترجمه و فشردگی‌سازی. هر فرآیند ریاضی‌ورزی با مثال‌ها آغاز می‌شود. مثال‌ها دو کارکرد معماری کلیدی دارند. اولاً، هر مثال یک کنش ترجمه است؛ ترجمه‌ای از یک ایده انتزاعی به یک نمونه ملموس. ثانیاً، مثال‌ها ماده خام اصلی برای فشردگی‌سازی هستند. با مشاهده الگوها در یک فضای مثال^{۳۵} غنی [۲۰]، یادگیرنده تلاش می‌کند تا این الگو را در قالب یک حدس فشردگی کند. یک حدس، محصولی خام و موقت است که از دل مشاهده الگوها یا شهودهای خلاقانه پدید می‌آید [۴۹]. این فشردگی‌سازی پیشنهادی، یک تنش معمارانه ایجاد و صحنه دیالکتیک را برای اثبات یا ابطال برپا می‌کند [۳۸]. با این حال، باید میان مثال‌های تبیینی (که صرفاً یک مفهوم موجود را ترجمه می‌کنند) و مثال‌های زایا (مانند مجموعه مندلیو که از تکرار یک تابع ساده درجه دوم آغاز شد، اما به‌واسطه غنای ساختاری و زیبایی تصویری خود،

³¹Rational Reconstruction ³²Guided Reinvention ³³Rational Transitions ³⁴Mathematical Practice ³⁵Example Space

کاتالیزور تولد حوزه جدیدی به نام هندسه فرکتالی شد [۱۹، ۴۱] تمایز قائل شد. یک مثال زیبا، خود یک پدیده جدید خلق می‌کند و به جای خدمت به معماری فعلی، آن را به چالش می‌کشد و به محرک اصلی برای مکانیسم‌های قدرت‌مندتری مانند بازآرایی و هماهنگی تبدیل می‌شود.

۲.۴. اعتبارسنجی: بازآرایی از طریق ابطال و اثبات. فرآیند اعتبارسنجی یک حدس، صحنه اصلی کنش‌های معمارانه است. همان‌طور که نقد برکلی به بحران در بنیان‌های حسابان منجر شد، یک مثال نقض قدرتمند، محرک اصلی مکانیسم بازآرایی است. این مکانیسم، با ایجاد بحران، ساختار موجود را وادار به بازچینش روابط و اصلاح خود می‌کند؛ همان‌طور که پارادوکس راسل، معماری نظریه مجموعه‌های شهودی را به بازآرایی و خلق معماری جدید ZFC واداشت [۲۱]. در مقابل، یک اثبات نه یک کنش واحد، بلکه یک پروژه ساخت‌وساز شناختی است که ارزش و خلاقیت آن اغلب در تعامل هوشمندانه چندین مکانیسم نهفته است. براین اساس، می‌توان پروژه‌های اثبات را براساس مکانیسم غالبی که استراتژی اصلی آن را شکل می‌دهد، شناسایی کرد. خلاقیت در برخی اثبات‌ها، در یک ترجمه هوشمندانه نهفته است که مساله را از یک معماری به معماری دیگر منتقل و آن را به یک مورد استاندارد تبدیل می‌کند (مانند اثبات یک قضیه هندسی از طریق جبر). در اثبات‌های عمیق و دوران‌ساز، مانند اثبات قضیه آخر فرما توسط وایلز [۵۸]، مکانیسم غالب یک هماهنگی خیره‌کننده است که دو حوزه ریاضی کاملاً دور از هم را به یکدیگر پیوند می‌زند. گاهی نیز، کلید حل مساله در یک بازآرایی خلاقانه در خود اجزای مساله است. در نهایت، بسیاری از اثبات‌های استاندارد، عمدتاً بر مکانیسم فشرده‌سازی تکیه دارند و قدرت خود را از استفاده کارآمد از نتایج قبلاً اثبات‌شده (سازه‌های فشرده‌شده قبلی) می‌گیرند.

۳.۴. قضیه و تعریف: سازه‌های پایدار نهایی. محصول نهایی و پایدار این دیالکتیک، قضیه و تعریف است. هر دو، از منظر معماری دانش، محصولات نهایی و قدرت‌مند مکانیسم فشرده‌سازی هستند. یک قضیه، کل پروژه پیچیده اثبات را در یک گزاره قابل اتکا فشرده می‌کند؛ همانند قضیه آخر فرما که یک فشرده‌سازی از تلاش ۱۰۰ صفحه‌ای وایلز است. یک تعریف دقیق نیز، تاریخچه‌ای طولانی از بحران‌ها و بازآرایی‌ها را در یک ساختار مفهومی کارآمد فشرده می‌سازد. نمونه بارز آن، تعریف مدرن گروه است که محصول فشرده‌سازی بیش از یک قرن تلاش بر روی ساختارهای متنوع است [۶]. این تحلیل نشان می‌دهد که چرخه لاکاتوشی، صرفاً یک توصیف تاریخی-فلسفی نیست، بلکه تجلی بیرونی و قابل مشاهده دستورزبان شناختی پنج مکانیسم است. این فرآیند با ترجمه و فشرده‌سازی (از مثال به حدس) آغاز می‌شود، با بازآرایی و هماهنگی (در فرآیند اعتبارسنجی) پالایش، و در یک فشرده‌سازی نهایی (قضیه و تعریف) تثبیت می‌شود. اکنون می‌توانیم به پرسشی که در ابتدای بخش مطرح کردیم بازگردیم. گذار عقلانی که کیچر [۳۵] در سطح کلان توصیف می‌کند، در چارچوب ما یک تبیین شناختی در سطح خرد پیدا می‌کند. هر گذار عقلانی در تاریخ، نتیجه تعامل ساختارمند این پنج مکانیسم است. جایی که کیچر چه چیزی تغییر می‌کند را توصیف می‌کند، MKA چگونه آن تغییر را از نظر شناختی مدل‌سازی می‌کند. این انطباق میان تحلیل خرد (مکانیسم‌ها) و توصیف کلان (عمل ریاضی)، شاهدی قدرتمند بر ایده محوری مقیاس‌پذیری MKA است و نشان می‌دهد که یک دستورزبان شناختی واحد، هم بر تکامل تاریخی ریاضیات و هم بر شکل‌گیری دانش در ذهن یادگیرنده حاکم است.

۵. روایت اوایلر، هیلبرت و گودل

روایت معماری حسابان نشان‌داد که مکانیسم‌ها در یک فرآیند تاریخی طولانی به‌طور پویا و درهم‌تنیده عمل می‌کنند. اما برای درک عمق و قدرت واقعی آن‌ها، باید به لحظاتی نگاه کنیم که یکی از این مکانیسم‌ها در خالص‌ترین و نیرومندترین

شکل خود ظاهر می‌شود. این بخش سه نمونه شاخص را بررسی می‌کند تا تعاریف نظری بخش دوم را با شواهدی قانع‌کننده استحکام بخشد.

۱.۵. هماهنگی و زیبایی در اتحاد اویلر. در قرن هجدهم، سه قلمرو قدرتمند آنالیز (قلمرو عدد e)، مثلثات (قلمرو عدد i) و جبر مختلط (قلمرو عدد موهومی i) عمدتاً از هم جدا بودند. شاهکار لئونارد اویلر، کشف پیوندی عمیق و غیرمنتظره بین این سه دنیا بود که در اتحاد اویلر $e^{\pi i} + 1 = 0$ به اوج زیبایی خود رسید. این اتحاد، صرفاً یک معادله زیبا نیست؛ بلکه نمونه‌ای بی‌بدیل از مکانیسم هماهنگی است. اویلر با خلق یک سازه مفهومی، معماری نمایی آنالیز را با معماری دورانی هندسه در بستر اعداد مختلط یکپارچه ساخت، به گونه‌ای که ویژگی‌های جبری توابع نمایی با دوران‌های هندسی یکی شدند [۴۵]. این عمل هماهنگی، صرفاً یک پل میان دنیاهاى مجزا نبود؛ بلکه آشکار ساخت که این دنیاها در واقع نمادهای مختلفی از یک ساختار عمیق‌تر و واحد در ریاضیات هستند؛ یکپارچگی‌ای که در نهایت در یک گزاره واحد و به‌غایت فشرده متجلی شد.

۲.۵. بازآرایی و دقت در هندسه هیلبرت. برای بیش از دو هزار سال، معماری هندسه اقلیدسی بر پایه شهود استوار بود. اما در قرن نوزدهم، با پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی (توسط گاوس، بولوی و لباچفسکی)، این بنیادها به‌لرزه درآمد. آشکار شد که معماری اقلیدس تنها بنای ممکن نیست، بلکه بر فرضیات نانوشته و شهودهای غیرالزام‌آور بنا شده‌است [۲۳، ۳۶]. این بحران، یک چالش معماری جدید ایجاد کرد: بازسازی ساختار هندسه به‌شکلی دقیق، عاری از شهود و به‌اندازه‌ای کلی که تمام هندسه‌ها را دربرگیرد.

پاسخ به این چالش را دیوید هیلبرت در کتاب مبانی هندسه ارائه داد. او مفاهیمی چون نقطه و خط را به‌عنوان موجودیت‌های تعریف‌نشده در نظر گرفت که تمام معنای خود را نه از شهود، بلکه از شبکه روابط ساختاری‌شان در اصول موضوعه می‌گیرند. اقدام هیلبرت، یک نمونه درخشان از مکانیسم بازآرایی بود. این بازآرایی، با تغییر کامل زیرساخت‌ها، هندسه را مقاوم‌سازی و راه را برای رویکرد اصول موضوعه‌ای در ریاضیات هموار کرد [۲۳، ۳۶]. نتیجه این بازآرایی بنیادین، خلق یک سیستم به‌مراتب منسجم‌تر و فشرده‌تر بود که در آن، تمام حقایق هندسی به‌صورت منطقی از تعداد انگشت‌شماری اصل استنتاج می‌شدند و امکان یکپارچه‌سازی هندسه‌های مختلف در یک چارچوب واحد فراهم آمد.

۳.۵. گذار معرفتی و مرزهای دانش در قضایای ناتمامیت گودل. اگر کار هیلبرت بازآرایی یک معماری بود، کار کورت گودل یک زلزله بود که زمین زیر همه معماری‌ها را لرزاند. رویای برنامه هیلبرت ساختن معماری نهایی برای ریاضیات بود: سیستمی سازگار و کامل که تمام حقایق را اثبات کند. اما قضایای ناتمامیت گودل نشان داد که چنین رویایی ناممکن است. او نشان داد که هر سیستم اصول موضوعه قدرتمندی ناقص است و شامل گزاره‌های حقیقی‌ای است که در همان چارچوب قابل اثبات نیستند [۴۴].

این کشف، یک بازآرایی نبود؛ یک گذار معرفتی در رادیکال‌ترین شکل ممکن بود. کار گودل یک ساختمان را تعمیر نکرد، بلکه با آشکارکردن یک حقیقت بنیادین در مورد تمام ساختمان‌های ممکن، فهم ما را از خود بازی ریاضیات برای همیشه تغییر داد. پس از گودل، جامعه ریاضی مجبور شد با این حقیقت عمیق روبه‌رو شود که حقیقت ریاضی و اثبات‌پذیری صوری لزوماً یک چیز نیستند و مرزهای استدلال صوری برای همیشه تغییر کرد [۲۱]. این نمونه، تعامل شدید مکانیسم‌ها را نیز نشان می‌دهد: در این مورد، بحران دقیقاً از آشکارشدن محدودیت‌های خود مکانیسم بازآرایی ناشی شد. تلاش برای بازآرایی کل ریاضیات در قالب یک سیستم صوری نهایی، خود به بن‌بست رسید. اینجا بود که گذار معرفتی، با تغییر خود قواعد بازی و پذیرش ناتمامیت ذاتی، پاسخی به این بحران داد. این دگرگونی جوهره یک گذار معرفتی است و نشان می‌دهد که معماری دانش، پروژه‌ای بی‌پایان است بی‌آن‌که نقشه‌ای نهایی داشته باشد. این یک نسخه حماسی از همان تجربه‌ای است که یک دانش‌آموز هنگام حرکت از معیار حقیقت تجربی (آزمودن چند مثال) به معیار قیاسی (نیاز به اثبات صوری) پشت‌سر می‌گذارد.

این سه نمونه غایی نشان دادند که هر یک از مکانیسم‌های کلیدی، به‌عنوان محرکی برجسته، می‌توانند تحولات ساختاری عمیق و انقلابی را در معماری دانش ریاضی هدایت کنند. در این بخش، این مکانیسم‌ها را در مقیاس کلان و تاریخی بررسی کردیم. در بخش بعد، برای نشان‌دادن مقیاس‌پذیری MKA، به‌سراغ مقیاس خرد می‌رویم و با وینیت‌های آموزشی نشان می‌دهیم که چگونه این مکانیسم‌ها در یادگیری فردی دانش‌آموزان فعال می‌شوند.

۶. مکانیسم‌های یادگیری: از تحلیل تا آسیب‌شناسی

پس از بررسی عملکرد مکانیسم‌ها در تاریخ ریاضیات، اکنون برای آزمودن ادعای مقیاس‌پذیری، کانون تحلیل را به سطح شناخت فردی می‌آوریم. این بخش با شش وینیت نشان می‌دهد که MKA چگونه به‌عنوان ابزار تحلیلی و تشخیصی عمل می‌کند. هر وینیت دو بخش دارد: تحلیل موفقیت (فعال‌شدن مکانیسم‌ها در شکل‌گیری فهم عمیق) و آسیب‌شناسی متناظر (شکست در فعال‌سازی و پیامدها). این رویکرد چارچوب را نه‌تنها برای تبیین موفقیت، بلکه به‌عنوان لنزی برای ریشه‌یابی شکست‌های شناختی تثبیت می‌کند.

وینیت ۱. اسرا مساله «ثابت کنید سه میانه یک مثلث در یک نقطه هم‌راس‌اند» را که در حلش بارها به بن‌بست خورده‌بود، به معلم نشان می‌دهد. معلم می‌گوید: «چرا مساله را به صفحه دکارتی نمی‌بری؟» اسرا یک راس مثلث را روی $(0,0)$ و دیگری را روی محور x می‌گذارد. ناگهان متوجه می‌شود که مساله از دنیای هندسه به جبر رفته است: مساله‌ای جبری درمورد معادلات سه خط. مساله اکنون قابل محاسبه است.

تحلیل وینیت. این مثال، ترجمه را در خالص‌ترین شکل خود به‌نمایش می‌گذارد: اسرا سازه‌ای را از معماری هندسه به معماری هندسه تحلیلی منتقل و ساختار معنایی مساله را حفظ کرد. حالا او می‌داند که یک مساله واحد می‌تواند نمایش‌های متفاوتی در معماری‌های مختلف داشته‌باشد. این پل‌زنی، کارآمدی دسترسی به ابزارهای جبری را نشان می‌دهد. موفقیت اسرا، تجلی خالص میل به گسترش است. او با یک بن‌بست در معماری موجود مواجه شده‌است و با یک کنش ترجمه، قلمرو مسئله را به یک معماری جدید گسترش می‌دهد تا به ابزارهای قدرتمندتر دست‌یابد.

آسیب‌شناسی متناظر: ترجمه معیوب. ^{۳۶} دانش‌آموز ممکن است هر دو معماری را بلد باشد اما پلی بین آن‌ها نداشته باشد یا ترجمه‌ای انجام دهد که ساختار معنا را از بین ببرد. یک نمونه کلاسیک ترجمه معیوب، سوگیری اعداد طبیعی است که در آن، دانش‌آموز قواعد حاکم بر اعداد طبیعی را به اشتباه به اعداد گویا تعمیم می‌دهد و در نتیجه در درک مفاهیمی چون چگالی دچار خطاهای مفهومی پایدار می‌شود [۶۳]. خطای کلاسیک $\log(a+b) = \log(a) + \log(b)$ و خطای رایج دانشجویان جبرخطی $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ در نوشتن نمونه‌هایی از ترجمه معیوب، نشان‌دهنده پدیده‌ای به نام تعلیق معناسازی ^{۳۷} است. در این حالت، یادگیرنده به‌جای حفظ ساختار معنایی موقعیت واقعی، صرفاً به دستکاری نمادین می‌پردازد [۶۴].

وینیت ۲. کارن با تعریف فضای برداری مواجه است: ده اصل موضوعه که برایش فهرستی بی‌ربط‌اند. وقتی استاد نشان می‌دهد چندجمله‌ای‌های درجه دو (که از جبر می‌شناسد) و توابع پیوسته (که از حسابان می‌شناسد) مثال‌هایی از فضاهای برداری‌اند، او ناگهان می‌فهمد فضای برداری یک سازه واحد و مفهومی است، نه چک‌لیستی طاقت‌فرسا.

³⁶Flawed Translation ³⁷Suspension of Sense-making

تحلیل وینیت. در این وینیت یک رویه محاسباتی از یک لیست بلندبالا به یک سازه مفهومی و ایستا و قابل دستکاری (فضای برداری) تبدیل می‌شود. این فشرده‌سازی، چندین گزاره را در قالب یک سازه شناختی یکپارچه منسجم می‌کند. حالا کارن می‌تواند از فضای برداری به عنوان یک ابزار برای تفکر و در سطوح بالاتر استفاده کند بدون آن که درگیر لیست شود. لحظه یادگیری کارن، تجلی خالص میل به انسجام است. او با یک لیست پراکنده از اصول مواجه است و کنش فشرده‌سازی، این اطلاعات را در یک سازه مفهومی واحد، پایدار و منسجم سازماندهی می‌کند.

آسیب‌شناسی متناظر: فشرده‌سازی توخالی. ۳۸ در ریاضیات پیشرفته، بسیاری از قضایا و تعاریف قدرتمند، محصول فشرده‌سازی فرآیندهای بسیار پیچیده هستند. دانشجو ممکن است تعریف و خواص را حفظ کند اما فهم زیربنایی نداشته باشد؛ سازه نمادین وجود دارد اما از فرآیند معنادار جدا شده است. پژوهش‌ها نشان می‌دهند توانایی اجرای الگوریتم لزوماً به درک مفهومی نمی‌انجامد [۵۲].

وینیت ۳. برای رادین خاصیت جابه‌جایی جمع یک اصل بنیادین نانوشته بود و هرگز فکر نمی‌کرد در یک سری نامتناهی ممکن است این خاصیت برقرار نباشد! با خودش فکر می‌کرد که هر تعداد عدد قرار باشد باهم جمع شوند بازهم ترتیب اهمیتی ندارد. استاد نشان داد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ به $\ln 2$ هم‌گراست. سپس استاد (همان‌طور که ریمان نشان داد) با بازآرایی جملات، نشان داد که این سری می‌تواند به هر عدد دلخواه دیگری هم‌گرا شود (یا حتی واگرا شود)! این یک بحران مفهومی بود. برای حل این بحران، رادین نمی‌توانست صرفاً یک تبصره به قانون قدیمی اضافه کند. معماری پیشین او دیگر قادر به توضیح این پدیده نبود. او مجبور بود دست به یک بازآرایی عمیق بزند. معماری یکپارچه و ساده هم‌گرایی فرو ریخت و جای خود را به یک ساختار پیچیده‌تر و دونوعی داد: هم‌گرایی غیرمشروط، قلمرویی امن که در آن قانون قدیمی جابجایی هم‌چنان برقرار بود؛ و هم‌گرایی مشروط، یک قلمرو جدید که در آن ترتیب جملات، اهمیتی حیاتی داشت.

تحلیل وینیت. این وینیت لحظه خلق تنش معمارانه را از طریق یک مثال نقض و فرآیند شناختی متعاقب آن به تصویر می‌کشد. رادین برای رفع این تناقض، به جای افزودن یک واقعیت جزئی، کل ساختار مفهومی خود را بازآرایی می‌کند. او با خلق دسته‌بندی‌های جدید (غیرمشروط/ مشروط)، به یک معماری پیچیده‌تر، دقیق‌تر و قدرتمندتر دست می‌یابد که هم مثال‌های قدیمی و هم پدیده جدید را در خود جای می‌دهد. این یک نوسازی و مقاوم‌سازی عمیق در معماری دانش اوست.

آسیب‌شناسی متناظر: بازآرایی ناقص. ۳۹ مقاومت در برابر بازآرایی یکی از موانع یادگیری است. پژوهش‌ها نشان داده‌اند که یادگیرندگان در مواجهه با داده‌های ناسازگار ۴۰، اغلب به جای بازسازی باورهای خود، به راهکارهایی چون نادیده گرفتن، رد کردن یا به حاشیه راندن داده‌ها پناه می‌برند [۱۰]. اگر رادین دچار این آسیب‌شناسی می‌شد، همین کار را می‌کرد: «این فقط یک مثال عجیب و غریب است و برای سری‌های عادی صدق نمی‌کند.» با این کار، او مثال نقض را ایزوله می‌کند تا از بازسازی پرهزینه معماری اصلی خود شانه خالی کند. این واکنش، مانع از درک عمیق ماهیت هم‌گرایی می‌شود. در مقابل، فرآیند بازآرایی موفق رادین، از طریق نوعی خودتوضیحی ۴۱ رخ می‌دهد که در آن او فعالانه برای حل تناقض تلاش می‌کند [۱۱، ۱۲].

این واکنش، نمونه‌ای از بازآرایی ناقص است. از منظر نظریه دانش تکه‌تکه ۴۲ [۱۳]، این مقاومت در برابر بازآرایی می‌تواند ناشی از فعال شدن یک خرده‌شهود ۴۳ بسیار قوی «جمع همیشه جابه‌جایی است» باشد. این خرده‌شهود، محصول تجربیات محدود دانش آموز با اعداد متناهی است و در مواجهه با داده‌های ناسازگار جدید مقاومت می‌کند.

³⁸Hollow Compression ³⁹Incomplete Reconfiguration ⁴⁰Anomalous Data ⁴¹Self-explanation ⁴²Knowledge in Pieces

⁴³p-prime (Phenomenological Primitives)

وینیت ۴. برای پارسا، دنیای نسبت‌های مثلثاتی (که یک ویژگی از یک مثلث مشخص بود) و دنیای توابع (که رابطه‌ای بین ورودی و خروجی بود)، دو معماری کاملاً مجزا بودند. چالش زمانی آغاز شد که معلم، سینوس را یک تابع نامید. در ذهن پارسا، سینوس یک نسبت در مثلث قائم‌الزاویه بود، بنابراین تنها برای زوایای حاده (کوچک‌تر از 90° درجه) معنا داشت. این مفهوم یک فرآیند ورودی-خروجی نبود. به همین دلیل، گزاره سینوس 150° درجه برایش نه تنها بی معنا، بلکه یک تناقض مفهومی بود؛ مانند قراردادن یک ورودی غیرمجاز در ماشین حساب.

با راهنمایی معلم، پارسا مثلی در دایره واحد رسم کرد و نشان داد که $\sin(\theta) = y$. اما لحظه کلیدی، تصورکردن آن نقطه به صورت متحرک بود. ناگهان، آن نسبت وابسته به شکل، به یک رابطه فراگیر بین دو کمیت تبدیل شد: زاویه به عنوان ورودی و ارتفاع (مختصات y) به عنوان خروجی. اینجا بود که دو معماری ادغام شدند. محصول یک موجود مفهومی جدید بود: تابع مثلثاتی.

تحلیل وینیت. این وینیت نمونه بارزی از هماهنگی است، نه صرفاً ترجمه. تمایز کلیدی در خلق یک ساختار مفهومی جدید با ویژگی‌های نوظهور است. پارسا صرفاً یک نسبت هندسی را به زبان مختصات بازنویسی نکرد. او معماری نسبت‌های وابسته به شکل را با معماری توابع ادغام کرد. معماری جدید حاصل، تابع مثلثاتی، دارای ویژگی‌هایی مانند تناوب و دامنه نامتناهی بود که در معماری اولیه هندسی وجود نداشت. این خلق یک موجودیت جدید با قوانین و قابلیت‌های جدید، جوهره هماهنگی بود.

در این وینیت، میل به گسترش، پارسا را وامی‌دارد تا سینوس را به زاویه‌های بزرگ‌تر از 90° درجه تعمیم دهد. پاسخ به این میل، یک کنش هماهنگی است که با خلق یک معماری دقیق‌تر، انسجام را در سطح بالاتری برقرار می‌کند.

آسیب‌شناسی متناظر: معماری‌های منفصل. ۴۴ این آسیب‌شناسی زمانی رخ می‌دهد که یادگیرنده دانش معتبری را در دو حوزه مختلف کسب کرده‌است، اما قادر به ایجاد پل‌های ارتباطی بین آن‌ها نیست؛ دو ساختمان بدون راه ارتباط و ادغام. درحالی‌که ترجمه صرفاً پلی میان دو معماری موجود می‌سازد و هویت هر دو را حفظ می‌کند، هماهنگی با ادغام آن‌ها منجر به تولد یک ساختار مفهومی جدید می‌شود. اگر پارسا بین این دو معماری هماهنگی ایجاد نمی‌کرد نمی‌توانست تابع مثلثاتی را درک کند. در سطح حرکت بین بازنمایی‌ها، چالش‌های شناختی دانش‌آموزان مطالعه شده‌است [۱۷]؛ مثل دانش‌آموزی که می‌تواند ریشه‌های یک معادله سهمی را از روی معادله آن پیدا کند و نمودار آن را نیز جداگانه رسم کند، اما نمی‌تواند از روی محل برخورد نمودار با محور x ‌ها درمورد ریشه‌ها استدلال کند. یا در سطوح پیشرفته‌تر، مانند ناتوانی دانشجویان در برقراری ارتباط بین استدلال‌های نمادین و کیفی در حل یک معادله دیفرانسیل [۵۱].

وینیت ۵. برای سپیتا قطعیت و بداهت شهودی هندسه اقلیدسی یک امر مسلم بود. اصول موضوعه حقایق بدیهی درباره جهان فیزیکی بودند و حقیقت یک گزاره هندسی به معنای انطباق آن با واقعیت بود.

این معماری ذهنی زمانی به چالش کشیده شد که استاد، مدل قرص پوانکاره را از هندسه هذلولوی معرفی کرد؛ دنیایی که در آن مجموع زوایای مثلث کمتر از 180° درجه بود. واکنش اولیه سپیتا، ناباوری بود: «این اشتباه است! با عقل جور در نمی‌آید. خط‌ها که این شکلی نیستند!» او در حال قضاوت یک بازی جدید با قوانین بازی قدیمی بود.

در این جا، استاد با یک سوال، معماری ذهنی او را عمیق‌تر به چالش کشید: «سپیتا، تعریف بنیادین یک خط چیست؟ آیا چیزی است که به چشم ما راست به نظر می‌رسد؟ یا کوتاه‌ترین مسیر ممکن بین دو نقطه؟» استاد توضیح داد که در جهان محدود این قرص، کوتاه‌ترین مسیرها (ژئودزیک‌ها) کمان‌ها هستند. این‌ها خطوط راست این دنیا هستند.

⁴⁴Disconnected Architectures

این برای سپیتا، یک بازآرایی مفهومی بود: مفهوم خط از یک سازه شهودی مطلق، به یک مفهوم وابسته به قوانین درونی یک سیستم تبدیل شد.

این بازآرایی، راه را برای تحول بزرگ‌تر هموار کرد؛ هنگامی که استاد تأکید کرد: «در ریاضیات مدرن، معیار حقیقت، انطباق با شهود نیست، بلکه سازگاری منطقی درونی یک سیستم است.» این جمله اکنون برای سپیتا معنای عمیق‌تری داشت. پذیرش این ایده برای او یک گذار معرفتی بود. او فهمید که نه تنها خط، بلکه خود حقیقت نیز می‌تواند در معماری‌های مختلف، معانی متفاوتی داشته باشد.

تحلیل وینیت. این وینیت تعامل قدرتمند دو مکانیسم را نشان می‌دهد. تحول نهایی یک گذار معرفتی بود: تغییر در معیارهای بنیادین صدق و اعتبار. این گذار رادیکال، از طریق یک بازآرایی کلیدی در مفهوم خط ممکن شد. سپیتا تعریف جدید خط را به مثابه کوتاه‌ترین مسیر (ژئودزیک) که وابسته به سیستم است، پذیرفت. بنابراین توانست گام بزرگ‌تر را بردارد و حقیقت را نیز به عنوان یک مفهوم وابسته به سازگاری درونی سیستم بپذیرد. این نشان می‌دهد که چگونه یک بازآرایی مفهومی می‌تواند پیش‌نیاز و تسهیل‌گر یک گذار معرفتی عمیق‌تر باشد. گذار سپیتا به جهان‌بینی صورت‌گرایانه، نسخه‌ای کوچک‌شده از همان تحول بزرگی است که در قرن نوزدهم ریاضیات را دگرگون کرد [۲۳]. گذار معرفتی سپیتا، قدرت‌مندترین تجلی میل به انسجام است. زمانی که معماری پیشین او با یک تناقض بنیادین (هندسه هذلولوی) مواجه می‌شود، او برای رسیدن به یک انسجام جدید و عمیق‌تر، مجبوره بازسازی خودِ قانون اساسی دانش خود می‌شود.

آسیب‌شناسی متناظر: ایستایی معرفتی. ۴۵ در این آسیب‌شناسی یادگیرنده در یک معیار حقیقت قدیمی‌تر گیر می‌کند و معیارهای جدید را نمی‌پذیرد؛ یک مقاومت در برابر تغییر قانون اساسی دانش. دانش‌آموزی پس از آزمودن چند مورد، از درستی یک گزاره هندسی مطمئن می‌شود و در برابر نیازه اثبات صوری مقاومت می‌کند: «واضح است که درست است، چرا باید آن را اثبات کنم؟» او گرفتار ایستایی در یک معیار حقیقت تجربی-شهودی شده است و قادر به گذار معرفتی به دنیای اصول موضوعه‌ای نیست؛ مانعی برای ورود به تفکر ریاضی پیشرفته. پژوهش‌های مبتنی بر طرح‌واره‌های اثبات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان اغلب به معیارهای حقیقت غیرقیاسی (مانند استناد به چند مثال) تکیه می‌کنند و گذار به درک ضرورت اثبات صوری، چالش معرفتی بزرگی در آموزش ریاضیات است [۲۶، ۲۸]. در تجربه بسیاری از دانشجویان از حسابان، معیار حقیقت اغلب به موفقیت محاسباتی و شهود فیزیکی تقلیل می‌یابد [۶۱]، اما در آنالیز، این معیارها دیگر کافی نیستند و معیار جدید، اثبات مبتنی بر اپسیلون-دلتا است. دانشجویی که دچار ایستایی معرفتی شده است، در برابر این گذار مقاومت می‌کند. او تلاش می‌کند مسائل آنالیز را با استدلال‌های شهودی یا محاسباتی حل کند و از درگیر شدن با ساختارهای دقیق اثبات امتناع می‌ورزد. این ناتوانی، یک مانع اصلی یادگیری است؛ برای مثال، [۱] نشان می‌دهد که دانشجویان هنگام مواجهه با تعریف صوری هم‌گرایی، به شیوه‌های تفکر شهودی موفقیت‌آمیز در حسابان تکیه می‌کنند و در درک ضرورت استدلال‌های مبتنی بر تعریف دچار مشکل می‌شوند.

وینیت ۶. رایان، دانشجوی مهندسی، با انتگرال گاوسی $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ به عنوان یک مساله چالشی روبه‌رو بود. پس از تلاش‌های بی‌نتیجه با ابزارهای استاندارد حسابان تک‌متغیره، او در یک بن‌بست کامل محاسباتی قرار داشت. استادش از او خواست به جای محاسبه I به سراغ محاسبه I^2 برود. این حرکت، یک بازآرایی در هدف کلی مساله بود که قفل اولیه را شکست. با این بازآرایی، رایان I^2 را به صورت $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$ نوشت. ناگهان متوجه شد که

⁴⁵Epistemic Fixation

این حاصل ضرب، معادل یک انتگرال دوگانه $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ است. این لحظه یک ترجمه بود: مساله از معماری حسابان تک‌متغیره (مساحت) به معماری حسابان چندمتغیره (حجم) منتقل شد. اما حل مساله در مختصات دکارتی هم‌چنان دشوار به نظر می‌رسید. با دیدن عبارت $x^2 + y^2$ ، به یاد ابزار دیگری در معماری چندمتغیره افتاد؛ پس مساله را از مختصات دکارتی به مختصات قطبی برگرداند. در این زبان جدید، انتگرال به یک مساله استاندارد و قابل حل تبدیل شد.

تحلیل وینیت. این مثال، حاصل تعامل زنجیروار دو مکانیسم است: بازآرایی و تغییر هدف از I به I^2 ، ترجمه اول برای انتقال مساله از حسابان تک‌متغیره به چندمتغیره، و ترجمه دوم برای تغییر مختصات از دکارتی به قطبی. در این جا می‌بینیم که چگونه یک بازآرایی، راه را برای یک ترجمه باز می‌کند و آن ترجمه نیز به نوبه خود، زمینه را برای یک ترجمه دیگر فراهم می‌آورد؛ تعاملی چندلایه‌ای برای حل خلاقانه مسائل.

در این بخش، با استفاده از شش وینیت که موقعیت‌های کلیدی یادگیری ریاضی را بازسازی می‌کردند، نشان دادیم که چگونه MKA می‌تواند در تحلیل خرد فرآیندهای یادگیری به کار رود. این سناریوها نشان می‌دهند که پنج مکانیسم بنیادین در هر دو سوی طیف، هم در لحظات سازنده یادگیری و هم در اختلال‌های شناختی متناظر، قابل ردیابی‌اند. به نظر می‌رسد ظرفیت اصلی این چارچوب در فراهم آوردن زبانی یکپارچه برای توصیف و تمایز الگوهای موفق و ناموفق یادگیری نهفته باشد؛ زبانی که امکان تحلیل ساختاری مسایل یادگیری را، از خطاهای سطحی تا بحران‌های مفهومی عمیق‌تر، فراهم می‌سازد. در هر یک از این وینیت‌ها، دانش‌آموزان با هدایت معلم اما از طریق فعالیت مستقل خود، مسیر کشف را طی کردند؛ رویکردی که ممکن است برای خواننده یادآور موقعیت‌های آموزشی^{۴۶} در نظریه TDS^{۴۷} بروسو [۲۳] باشد. این هم‌پوشانی مفهومی تصادفی نیست و نشان می‌دهد که MKA می‌تواند با دیدگاه‌های کلاسیک‌تر درباره تعامل میان یادگیرنده و محیط مساله وارد گفت‌وگو شود [۶۸]. این تقاطع نظری، زمینه‌ای برای بحث عمیق‌تر در بخش هم‌راستایی معرفی می‌آورد.

۷. هم‌راستایی معرفتی: پل میان تاریخ، منطق و تجربه یادگیرنده

در بخش‌های پیشین، MKA به منزله مدلی برای درک تکامل ساختاری دانش ریاضی در سه قلمرو تاریخی، آموزشی و شناختی بنا نهاده شد: قلمرو زایشی (دانش در بستر کشف تاریخی)، قلمرو بازسازانه (دانش در ساختار صوری و آموزشی)، و قلمرو بازتابی (دانش در ساختار ذهنی یادگیرنده). استدلال شد که بسیاری از مشکلات عمیق در یادگیری ریاضی، ریشه در شکاف معرفتی میان این سه قلمرو دارد. این بخش، به تشریح راه حل این مشکل، یعنی مفهوم هم‌راستایی معرفتی، می‌پردازد. نشان می‌دهیم که هم‌راستایی معرفتی نه صرفاً یک وضعیت مطلوب آموزشی، بلکه یک اصل ساختاری در پویایی دانش ریاضی است. در این دیدگاه، هدف غایی آموزش، رساندن یادگیرنده به وضعیتی است که در آن معماری شناختی شخصی او با ساختار منطقی دانش و روح خلاق و مسئله‌محور کشف تاریخی آن هماهنگ و هم‌راستا شود.

این ضرورت برای هم‌راستایی، ریشه‌های عمیقی در دیدگاه‌های فلسفی دارد که دانش ریاضی را نه مجموعه‌ای از حقایق ثابت، بلکه محصولی تاریخی و پویا می‌دانند؛ دیدگاهی که اهمیت بنیادین قلمرو زایشی را روشن می‌سازد. هانری پوانکاره با تأکید بر تعادل حیاتی میان شهود (که ریشه در تاریخ و تجربه دارد) و منطق (ساختار صوری)، هشدار می‌داد که با فراموش کردن تاریخ، دیگر نمی‌فهمیم چرا و چگونه مسایل مطرح شده‌اند و ریاضیات روح خلاق خود را از دست می‌دهد [۳۳]. این ضرورت فلسفی در کارهای متفکران معاصرتر به یک برنامه تحلیلی تبدیل شده است. ایمره لاکاتوش [۳۸] با معرفی مفهوم بازسازی عقلانی، ابزاری برای استخراج منطق پنهان در مسیرهای پرپیچ‌وخم تاریخی فراهم می‌کند. او نشان می‌دهد که رشد دانش

⁴⁶Didactical Situations ⁴⁷ The Didactical Situations (TDS)

ریاضی، یک دیالکتیک میان حدس‌ها، مثال‌های نقض و اصلاح اثبات‌هاست. فیلیپ کیچر [۳۵] نیز نشان می‌دهد که رشد دانش از طریق گذارهای عقلانی میان عمل‌های ریاضی مختلف و با موفقیت در حل مساله هدایت می‌شود. این متفکران به ما یک مجوز فلسفی قدرت‌مند می‌دهند: تاریخ ریاضیات، بخشی جدایی‌ناپذیر از عقلانیت آن است و هر آموزشی که قلمرو زایشی را نادیده بگیرد، دانش‌آموز را از روح و منطق اصلی ریاضیات محروم کرده‌است.

این دیدگاه فلسفی، در کارهای نظریه‌پردازان بزرگ پداگوژی به یک هدف آموزشی مشخص تبدیل شده‌است. هانس فرویدنتال [۱۸] با ایده بازآفرینی هدایت‌شده، این ضرورت را به یک هدف آموزشی ترجمه و استدلال کرد که دانش‌آموزان باید یک مسیر بهبودیافته از تاریخ را طی کنند؛ مسیری که از بن‌بست‌ها و جزئیات غیرضروری پاک شده‌است، اما به روح مساله‌محور و خلاق کشف وفادار مانده‌است [۳۳]. ازسوی دیگر، گی بروسو [۲۳] با مفهوم نهادینه‌سازی^{۴۸}، یک نمونه عملی از فرآیند هم‌راستایی را در مقیاس کلاس درس به‌نمایش می‌گذارد؛ لحظه‌ای که دانش شخصی دانش‌آموز به دانش رسمی متصل می‌شود. با این حال، در نظریه بروسو، خود دانش رسمی به‌عنوان یک نهاد معرفتی ازپیش داده‌شده تلقی می‌شود و منشا تاریخی آن به درون تحلیل آموزشی آورده نمی‌شود. MKA همین خلأ را پُر می‌کند و با ارائه یک روایت معماری از دانش رسمی، پشت‌صحنه معرفتی دانشی را که قرار است نهادینه شود، روشن می‌سازد تا این فرآیند با روح زایشی خود هم‌راستا باقی بماند [۶۸].

اما اگر بنیادهای فلسفی چرایی هم‌راستایی را مشخص می‌کنند و چشم‌اندازهای پداگوژیک چه‌چیزی را هدف قرار می‌دهند، MKA به سوال بنیادین چگونگی پاسخ می‌دهد. پنج مکانیسم شناختی، همان ماشین‌آلاتی هستند که این فرآیند را ممکن می‌سازند. ترجمه، بستر ساز حرکت میان معماری‌ها است؛ فشرده‌سازی، رویه‌های پیچیده را به سازه‌های مفهومی پایدار و قابل نهادینه‌سازی تبدیل می‌کند؛ بازآرایی، بحران‌های شناختی ناشی از تعارض‌ها را مدیریت می‌کند؛ هماهنگی، ساختارهای دانشی مختلف را در یک شبکه یکپارچه به هم پیوند می‌زند؛ و گذار معرفتی، آن جهش کیفی در درک را، به واسطه‌ی تغییر در جهان‌بینی، مدل‌سازی می‌کند. این مکانیسم‌ها، ابزارهای عملی هستند که در طراحی نسخه‌های هدایت‌شده به‌کار گرفته می‌شوند تا هم‌راستایی معرفتی را به‌صورت هدفمند محقق سازند.

درنهایت، هم‌راستایی معرفتی زبان مشترکی است که تاریخ، منطق و تجربه یادگیرنده را به هم پیوند می‌زند. اگر دانش ریاضی را یک کلان‌شهر فرض کنیم، هم‌راستایی معرفتی همان طرح جامع شهر است که ارتباط هماهنگ بین مناطق تاریخی (زایشی)، مناطق مدرن و استاندارد (بازسازانه)، و خانه‌های شخصی شهروندان (بازتابی) را تضمین می‌کند. در این‌جا، پنج مکانیسم بنیادین، ابزارهای مهندسی و شهرسازی هستند. MKA با فراهم کردن این زبان و ابزارها، نشان می‌دهد که تاریخ ریاضیات، ذهن یادگیرنده و طراحی آموزشی، سه بُعد از یک ساختار معرفتی واحد و مقیاس‌پذیر هستند؛ چارچوبی که امکان فهم، بازسازی و تجربه ریاضی را در یک مسیر شناختی منسجم و معنادار فراهم می‌آورد.

۸. بحث و نتیجه‌گیری

پس از بنانهادن شالوده‌های نظری MKA (بخش ۲)، نمایش مقیاس‌پذیری آن در دو سطح تاریخ (بخش‌های ۴ و ۵) و شناخت فردی (بخش ۶)، و درنهایت، تبیین هدف غایی پداگوژیک آن در قالب هم‌راستایی معرفتی (بخش ۷)، اکنون در موقعیتی قرار داریم که به پیامدهای گسترده‌تر نظریه معماری دانش بپردازیم. این بخش نهایی، اوج این سفر تحلیلی است و هدف آن، ارزیابی توان تبیینی و زایایی این چارچوب است. در این‌جا نشان خواهیم داد که چگونه نگاه معماری‌محور، نه تنها درک ما را از مفاهیم بنیادینی چون تفکر ریاضی پیشرفته و خلاقیت دگرگون می‌سازد، بلکه با ارائه مدل دیالکتیکی خود، یک جمع‌بندی نهایی از موتور واقعی رشد دانش ریاضی ارائه می‌دهد.

⁴⁸Institutionalization

۱.۸. پیامدها: بازتعریف مفاهیم بنیادین.

بازتعریف تفکر ریاضی پیشرفته. در ادبیات پژوهشی، تفکر ریاضی پیشرفته^{۴۹} (AMT) اغلب به عنوان یک حالت یا قلمرو توصیف شده است؛ برای مثال، گذار به جهان صوری [۶۱]. کارهای بنیادین، به ویژه توسط دریفوس، موانع شناختی پیچیده‌ای را که دانشجویان در مسیر انتزاعی سازی با آن روبه‌رو هستند، تحلیل کرده‌اند [۱۴]. نظریه معماری دانش، با تمرکز بر کنش‌ها به جای حالت‌ها، این دیدگاه‌ها را تکمیل می‌کند و با معرفی مفهوم عاملیت معمارانه، یک هدف غایی و مسیر توسعه‌ای جدید برای عبور از این موانع پیشنهاد می‌دهد.

بر این اساس، ما AMT را چنین بازتعریف می‌کنیم: تفکر ریاضی پیشرفته صرفاً سکونت در جهان صوری نیست، بلکه توانایی عمل کردن بر خود معماری دانش است. یک متفکر پیشرفته نه تنها کاربر قوانین و ساختارهای موجود، بلکه معمار آن‌هاست؛ کسی که به طور آگاهانه از مکانیسم‌های پنج‌گانه برای تحلیل، نقد، اصلاح، یکپارچه‌سازی و حتی خلق معماری‌های جدید استفاده می‌کند. این توانایی را عاملیت معمارانه^{۵۰} می‌نامیم.

این عاملیت در سوالات معمارانه دانشجویان متجلی می‌شود: اگر اصل موضوعه تغییر کند چه می‌شود؟ (گذار معرفتی بالقوه)؛ آیا این ساختار به مساله‌ای در حوزه دیگر شباهت دارد؟ (جستجو برای هماهنگی)؛ اگر یکی از شروط تعریف حذف شود، چه مثال‌های نقضی پدید می‌آید؟ (کاوش در مرزهای بازآرایی)؛ این اثبات طولانی چه ایده‌ای را درخود فشرده کرده است؟ (فشرده‌سازی). چنین پرسش‌هایی نسخه‌های خودآگاه همان اکتشافاتی‌اند که پولیا [۴۹] به عنوان قلب فرآیند کشف ریاضی توصیف کرده است.

از این منظر، مسیر توسعه AMT مسیری تدریجی برای تسلط بر پنج مکانیسم است: از ترجمه و فشرده‌سازی (کاربری) تا بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی (معمارانه). دانشجویی که صرفاً در چارچوب معماری موجود گرفتار می‌ماند، همان شهروندی است که مشاهداتش نظریه بار^{۵۱} [۲۵] است. درمقابل، معمار کسی است که می‌تواند از محدودیت‌های این نظریه بار فراتر رود و معماری‌های جدیدی بیافریند.

بنابراین، فقدان AMT نه یک مشکل منفرد، بلکه پیامد شکست در یک یا چند مکانیسم بنیادین است. در برابر آن، متفکر پیشرفته معمار است: تکنسینی ماهر و هم‌زمان هنرمندی خلاق.

بازتعریف خلاقیت ریاضی. یکی دیگر از پیامدهای نظریه ما، ارائه دستور زبان ساختاری برای فهم خلاقیت ریاضی است. خلاقیت در آثار کلاسیکی چون مراحل پوانکاره [۴۷] یا تاکید آدامار [۲۴] بر حس زیبایی‌شناسی، پدیدارشناسانه توصیف شده است. رویکردهای معاصرتر [۳۹، ۵۷] معیارهای عملیاتی‌تری مانند انعطاف‌پذیری و اصالت را پیشنهاد داده‌اند و نشان داده‌اند که خلاقیت بخشی جدایی‌ناپذیر از توانایی ریاضی است [۳۴]. با این حال، این مدل‌ها اغلب به فرآیندهای شناختی-مهندسی زیربنایی نمی‌پردازند.

نظریه معماری دانش این شکاف را پُر می‌کند: خلاقیت ریاضی، اجرای هنرمندانه و بصیرت‌آمیز مکانیسم‌های پنج‌گانه است. این تعریف یک زیربنای ساختاری برای مدل‌های پیشین فراهم می‌آورد. انعطاف‌پذیری، محصول تسلط بر مکانیسم ترجمه است؛ اصالت، اغلب نتیجه یک بازآرایی هوشمندانه یا گذار معرفتی جسورانه است؛ لحظه الهام پوانکاره [۴۷] را می‌توان به عنوان درک ناگهانی یک هماهنگی غیرمنتظره دید.

این چارچوب، نقطه مقابل خلاقیت را نیز روشن می‌سازد: صلبیت الگوریتمی^{۵۲}، یعنی استفاده مکانیکی و صرفاً نحوی از مکانیسم‌ها. این مفهوم، یک چارچوب معماری برای پدیده‌هایی فراهم می‌کند که در ادبیات پیشین از زوایای مختلف بررسی

⁴⁹ Advanced Mathematical Thinking (AMT) ⁵⁰ Architectural Agency ⁵¹ Theory Laden ⁵² Algorithmic Rigidity

شده‌اند. این پدیده در سطح رفتارهای ریاضی، در مفاهیمی چون استدلال تقلیدی^{۵۳} لیشر [۴۰] و به‌شکل کلاسیک آن در فهم ابزاری^{۵۴} اسکمپ [۵۹]، یعنی استفاده از قواعد بدون درک دلایل، توصیف شده‌است.

یک تبیین شناختی عمیق‌تر برای ریشه این رفتارها در چارچوب نظری تخصص روزمره^{۵۵} هاتانو و ایناگاکي [۲۹] دیده می‌شود؛ وضعیتی که در آن، فرد در اجرای رویه‌های آشنا کارآمد است، اما فاقد تخصص انطباقی^{۵۶} برای بازنندیشی و بازآفرینی معماری دانش خود است. در همه این موارد، یادگیرنده صرفاً در چارچوب موجود عمل می‌کند و از تبدیل شدن به یک معمار خلاق بازمی‌ماند.

هم‌چنین این دیدگاه ما را قادر می‌سازد زیبایی‌شناسی ریاضی را بازتعریف کنیم. زیبایی ریاضی همان لذت شناختی ناشی از مشاهده یک اجرای خلاقانه و بی‌نقص از مکانیسم‌هاست. اتحاد اوایلر زیباست زیرا نمونه‌ای از هماهنگی کامل است. بدین‌ترتیب، نبوغ ریاضی را می‌توان نه به‌عنوان رازی غیرقابل توضیح، بلکه به‌عنوان معماری هنرمندانه‌ای که از مکانیسم‌های بنیادین بهره می‌گیرد، درک و تحسین کرد.

۲.۸. محدودیت‌ها و مسیرهای پژوهش آینده. همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، این مقاله یک پژوهش مفهومی است باهدف نظریه‌پردازی و بنانهادن چارچوبی تحلیلی. بنابراین، فقدان اعتبارسنجی تجربی مستقیم محدودیت نیست، بلکه مرزی آگاهانه و سنگ‌بنای برنامه‌ای برای پژوهش‌های تجربی آینده است. ادعاهای نظریه درباره یادگیری فردی، مجموعه‌ای غنی از فرضیه‌های آزمون‌پذیر فراهم می‌کند:

- پژوهش‌های کیفی: چگونه می‌توان با تحلیل گفتمان، فعال‌شدن مکانیسم بازآرایی را در گفت‌وگوهای دانش‌آموزان هنگام مواجهه با مثال نقض ردیابی کرد؟ آیا امضاهای کلامی مشخصی برای هر مکانیسم قابل‌شناسایی است؟
- پژوهش‌های طراحی محور: آیا مداخله‌ای آموزشی که بر هماهنگی میان بازنمایی‌های جبری و هندسی تمرکز دارد، به هم‌راستایی معرفتی عمیق‌تری در مفهوم تابع منجر می‌شود؟
- پژوهش‌های سنجش: چه ابزارهایی (کمی و کیفی) می‌توان طراحی کرد تا عاملیت معمارانه و توانایی یادگیرندگان را در بهره‌گیری از مکانیسم‌های سطح بالا اندازه‌گیری کند؟

همان‌طور که اشاره شد، MKA ظرفیت روشنگری مفاهیم AMT و خلاقیت را دارد؛ تحلیلی جامع از هریک از این مفاهیم با لنز معماری دانش، می‌تواند موضوع پژوهش‌های مستقلی باشد.

۳.۸. نتیجه‌گیری: دیالکتیک معماری دانش و پیامدهای آن برای آموزش. اکنون که شواهد تاریخی و شناختی بررسی شد، می‌توان بار دیگر به پرسش محوری بازگشت: موتور واقعی تحول در معماری دانش ریاضی چیست؟ این پژوهش نشان می‌دهد که این موتور نه یک نیروی منفرد، بلکه تنش دیالکتیکی میان دو میل بنیادین است: میل به گسترش (تعمیم) و میل به انسجام (انتزاع).

میل به گسترش، نیرویی گریز از مرکز است که مرزهای معرفت را به بیرون می‌راند و با آشکار ساختن بحران‌های زاینده، امکان ظهور مساله و در نتیجه شرط لازم رشد را پدید می‌آورد. در برابر آن، میل به انسجام، نیرویی جاذبه‌ای و سامان‌بخش است که در پاسخ به این بحران‌ها (وضعیت‌های نوظهور و به‌ظاهر ناسازگار)، با خلق ابزارها و ساختارهای مفهومی دقیق‌تر، آشفتگی را به نظمی ژرف‌تر بدل می‌سازد. پنج مکانیسم بنیادین، هم‌چون چرخ‌دنده‌های مهندسی-شناختی، نیروی این دو میل را در قالب یک چرخه زنده و دیالکتیکی آشکار می‌سازند؛ دیالکتیکی میان تعمیم و انتزاع که موتور واقعی ریاضی‌ورزی است. در این چرخه، تعمیم قلمرو را گسترش می‌دهد و بحران می‌آفریند؛ انتزاع در پاسخ، ابزار می‌سازد و انسجام برقرار می‌کند؛ و

⁵³Imitative Reasoning ⁵⁴Instrumental Understanding ⁵⁵Everyday Expertise ⁵⁶Adaptive Expertise

ابزار تازه، خود زمینه دور تازه‌ای از تعمیم‌های جسورانه‌تر را فراهم می‌آورد. این رفت‌وبرگشت بی‌پایان میان ساخت و بسط، معماری دانش را گام به گام غنی‌تر و منسجم‌تر می‌سازد [۶۸].

این چشم‌انداز، شکافی ریشه‌دار را در آموزش مرسوم ریاضیات آشکار می‌سازد: مدرسه امروز، این دیالکتیک را از هم گسسته است. نظام آموزشی با ارائه یک سوییچ قلمرو بازسازانه، شهر ساخته‌شده و موزه‌وار دانش، قطب انسجام را به مقام مطلق ارتقا داده و در عوض، قطب گسترش را حذف کرده است؛ گویی کشف، بحران، حدس، مثال نقض و بازسازی، اتفاق‌هایی نامربوط و بیرون از ماهیت ریاضیات بوده‌اند. محصول چنین رویکردی، شهروندانی است که ریاضیات را مجموعه‌ای از حقایق حفظ‌کردنی می‌بینند، نه فرآیندی زنده برای ساخت معنا.

درمقابل، هدف غایی هم‌راستایی معرفتی چیزی جز ترمیم این دیالکتیک در کلاس درس نیست: دعوت از یادگیرندگان برای تجربه نسخه‌های هدایت‌شده‌ای از این رقص دوگانه؛ طرح حدس از دل مثال‌ها و افق‌گشایی‌ها (گسترش) و سپس مواجهه با مثال نقض، اثبات، بازآرایی یا پالایش مفهومی (انسجام).

در پرتو این تحلیل، MKA از سطح یک مدل توصیفی فراتر می‌رود و به ابزاری برای طراحی آموزشی بدل می‌شود. این دیدگاه با ایده کلاسیک بازآفرینی هدایت‌شده فرویدنتال [۱۸] پیوندی ژرف برقرار می‌کند: اگر فرویدنتال هدف پداگوژیک را فرمول‌بندی می‌کند، نظریه ما موتور شناختی لازم را برای ممکن‌شدن آن توضیح می‌دهد. در رویکرد ما، مسیر تاریخی پیدایش یک مفهوم به مثابه یک روایت معماری مبتنی بر پنج مکانیسم شناختی بازسازی می‌شود. سپس با انتزاع این مسیر از جزئیات غیرضروری تاریخی (مانند نام‌ها یا رفتارهای فردی ریاضی‌دانان)، به نقشه راه شناختی آن کشف دست می‌یابیم. طراحی نسخه‌های هدایت‌شده براساس این نقشه راه، همان فرآیند بازآفرینی هدایت‌شده است، با این تفاوت که اکنون ابزار شناختی دقیقی برای تحلیل و پیاده‌سازی آن در دسترس است. این رویکرد، با تمرکز بر دستورزبان شناختی کشف به جای رفتارهای اجتماعی ریاضی‌دانان، راهی برای ایجاد هم‌راستایی معرفتی و عبور از بسیاری از چالش‌های روش‌شناسی مطرح در پیوند میان عمل و پداگوژی [۶۵] فراهم می‌آورد.

به این ترتیب، MKA را می‌توان به عنوان لایه‌ی شناختی زیربنای رویکرد آموزش ریاضی واقع‌گرایانه (RME) نیز قلمداد کرد؛ لایه‌ای که دستورزبان شناختی کشف را برای معنادارکردن یادگیری در اختیار طراحان آموزشی قرار می‌دهد. تنها با بازگرداندن درام این دیالکتیک زاینده به کلاس درس است که می‌توان نسل تازه‌ای از معماران ریاضی را پرورش داد؛ آنان که ریاضیات را نه به عنوان مجموعه‌ای از محصولات نهایی، بلکه به مثابه فرآیندی زنده برای اکتشاف، بازسازی و ساخت معنا تجربه می‌کنند.

مراجع

- [1] L. Alcock, A. Simpson, Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role, *Educational Studies in Mathematics*, **57** (2004), 1-32. DOI:10.1023/B:EDUC.0000047051.07646.92.
- [2] Arzarello, Ferdinando, Domingo Paola, Ornella Robutti, and Cristina Sabena, Gestures as Semiotic Resources in the Mathematics Classroom, *Educational Studies in Mathematics*, **70** (2009), (2): 97-109. DOI:10.1007/s10649-008-9163-z.

- [3] M. Asiala, A. Brown, D. J. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews, K. Thomas, A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, *Research in Collegiate Mathematics Education*, (1996), 2, 1-32. DOI:10.1090/cbmath/006/01.
- [4] G. Bachelard, *The formation of the scientific mind: A contribution to a psychoanalysis of objective knowledge*, Clinamen Press, 2002. Original work published 1938.
- [5] C. B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publications, 1949.
- [6] C. B. Boyer, U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, (3rd ed.) Wiley, 2011.
- [7] G. Brousseau, *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer, 1997.
- [8] F. Cajori, *A history of mathematical notations* (Vol. II). The Open Court Publishing Co, 1929.
- [9] D. W. Carraher, A. D. Schliemann, *Early algebra and algebraic reasoning*. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (2007), (pp. 669–705). Information Age Publishing.
- [10] C. A. Chinn, W. F. Brewer, The role of anomalous data in knowledge acquisition: A theoretical framework and implications for science instruction. *Review of Educational Research*, (1993), 63(1), 1-49. DOI:10.2307/1170558.
- [11] M. Chi, M. Bassok, *Learning from examples via self-explanation*, In L. Resnick (Ed.), *Knowing, learning and instruction: Essays in honour of Robert Glaser*. Hillsdale: Erlbaum, 1989.
- [12] M. Chi, M. Bassok, P. Lewis, P. Reiman, R. Glasser, Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems, *Cognitive Science*, (1989), 13, 145–182.
- [13] A. A. diSessa, *Knowledge in pieces*, In G. Forman and P. Pufall (Eds.), *Constructivism in the Computer Age*, (1988) (pp. 49–70). Lawrence Erlbaum.
- [14] T. Dreyfus, *Advanced mathematical thinking processes*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (1991), (pp. 25-41). Kluwer. DOI:10.1007/0-306-47203-1.
- [15] T. Dreyfus, I. Kidron, (2014) *An introduction to abstraction in context*, In A. Bikner-Ahsbals and S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (1991), (pp. 85–96). Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-05389-9>.
- [16] E. Dubinsky, *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*, In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (1991), (pp. 95–123). Springer. DOI:10.1007/0-306-47203-1.
- [17] R. Duval, *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*, (2017) Springer. DOI:10.1007/978-3-319-56910-9.
- [18] H. Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [19] J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Penguin Books, 1987.
- [20] P. Goldenberg, J. Mason, Shedding light on and with example spaces, *Educational Studies in Mathematics*, (2008), 69(2), 183–194. DOI:10.1007/s10649-008-9143-3.
- [21] R. Goldstein, *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel*, W. W. Norton & Company, 2005.
- [22] J. V. Grabiner, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, MIT Press, 1981.
- [23] J. Gray, *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton University Press, 2008.
- [24] J. Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, 1945.
- [25] N. Hanson, *Patterns of discovery: An enquiry into the conceptual foundations of science*, Cambridge: Cambridge University Press, 1958.
- [26] G. Harel, L. Sowder, *Students' proof schemes: Results from exploratory studies* In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, and E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*, (1998), (pp. 234–283). American Mathematical Society. [https://mathweb.ucsd.edu/~harel/Students' Proof Schemes.pdf](https://mathweb.ucsd.edu/~harel/Students'ProofSchemes.pdf).

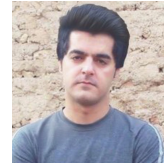
- [27] G. Harel, D. Tall, The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics, *For the Learning of Mathematics*, (1991), 11(1), 38-42.
- [28] G. Harel, K. Weber, *Deductive reasoning in mathematics education.*, In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, (2020), (pp. 183–190). Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0-43>.
- [29] G. Hatano, K. Inagaki, *Two courses of expertise*, In H. Stevenson, H. Azuma, and K. Hakuta (Eds.), *Child development and education in Japan*, (1986), (pp. 262–272). Freeman.
- [30] T. L. Heath, (Ed.) *The method of Archimedes, recently discovered by Heiberg*, *Cambridge University Press*, 1912.
- [31] J. Hiebert, P. Lefevre, *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*, In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, (1986), (pp. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates.
- [32] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie [Foundations of geometry]*, Teubner, 1899.
- [33] H. N. Jahnke, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, Three past mathematicians' views on history in mathematics teaching and learning: Poincaré, Klein, and Freudenthal, *ZDM Mathematics Education*, (2022), 54(1), 675–677. DOI:10.1007/s11858-022-01376-0.
- [34] M. Kattou, K. Kontoyianni, D. Pitta-Pantazi, C. Christou, Connecting mathematical creativity to mathematical ability, *ZDM Mathematics Education*, (2013), 45(2), 167–181. DOI:10.1007/s11858-012-0467-1.
- [35] P. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, 1985.
- [36] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.
- [37] T. S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, 1962.
- [38] I. Lakatos, *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press, 1976.
- [39] R. Leikin, *Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks*, In R. Leikin, A. Berman, and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, (2009), (pp. 129–145). Sense Publishers. DOI:10.1163/9789087909352_010.
- [40] J. Lithner, A research framework for creative and imitative reasoning, *Educational Studies in Mathematics*, (2008), 67 (3), 255–276. DOI:10.1007/s10649-007-9104-2.
- [41] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, 1982.
- [42] J. Mason, *Expressing generality and roots of algebra*, In N. Bednarz, C. Kieran, and L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, (1996), (pp. 65–86). Kluwer Academic Publishers. DOI:10.1007/978-94-009-1732-3_5.
- [43] J. Mason, *Researching your own practice: The discipline of noticing*, Routledge, 2002.
- [44] E. Nagel, J. R. Newman, *Gödel's Proof (Rev. ed.)*, New York University Press, 2001. (Original work published 1958).
- [45] P. J. Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula: Cures Many Mathematical Ills*, Princeton University Press, 2006.
- [46] J. Piaget, *The Equilibration of Cognitive Structures: The Central Problem of Intellectual Development*, University of Chicago Press, 1985. (Original work published 1975).
- [47] H. Poincaré, *The Foundations of Science*, (G. B. Halsted, Trans.). The Science Press, 1913.
- [48] I. Polo-Blanco, M. Chimoni, J. Goñi-Cervera, D. Pitta-Pantazi, Representations and generalization in early algebra: a comparative study of autistic students and their non-autistic peers, *Educational Studies in Mathematics*, (2025), 120(1), 33–55. DOI:10.1007/s10649-025-10416-x.
- [49] G. Pólya, *Mathematical Discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving (combined edition)*, New York: Wiley, 1962.
- [50] L. Radford, *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and learning mathematics*, In L. D. English D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (2018). DOI:10.1163/9789004459663.

- [51] C. Rasmussen, K. King, Locating starting points in differential equations: A realistic mathematics education approach, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (2000), 31(2), 161-172. DOI:10.1080/002073900287219.
- [52] B. Rittle-Johnson, M. Schneider, *Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics*, In R. Cohen Kadosh A. Dowker (Eds.), Oxford handbook of numerical cognition, (2015), (pp. 1118-1134). DOI:10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014.
- [53] A. Sfard, On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as two sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, (1991), 22(1), 1-36.
- [54] A. Sfard, The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives, *Journal of Mathematical Behavior*, (1995), 14(1), 15-39.
- [55] A. Sfard, *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*, Cambridge University Press, 2008. DOI:10.1017/CBO9780511499944.
- [56] A. Sierpinski, *Understanding in mathematics*, Falmer Press, 1994.
- [57] E. A. Silver, Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing, *ZDM Mathematics Education*, (1997), 29(3), 75-80.
- [58] S. Singh, *Fermat's Enigma: The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem*, Walker Company, 1997.
- [59] R. R. Skemp, Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, (2006), 12(2), 88-95. <https://doi.org/10.5951/MTMS.12.2.0088>.
- [60] L. P. Steffe, *Children's multiplying schemes*, In G. Harel J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics, (1994), (pp. 3-39). SUNY Press.
- [61] D. Tall, Building theories: The three worlds of mathematics, *For the Learning of Mathematics*, (2004), 24(1), 29-33.
- [62] I. D. Toader, Permanence as a principle of practice, *Historia Mathematica*, (2021), 54, 77-94. DOI:10.1016/j.hm.2020.08.001.
- [63] X. Vamvakoussi, W. Van Dooren, L. Verschaffel, Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults, *The Journal of Mathematical Behavior*, (2012), 31(3), 344-355. DOI:10.1016/j.jmathb.2012.02.001.
- [64] L. Verschaffel, S. Schukajlow, J. Star, W. Van Dooren, Word problems in mathematics education: a survey, *ZDM mathematics education*, (2020), 52(1), 1-16. DOI:10.1007/s11858-020-01130-4.
- [65] K. Weber, P. Dawkins, J. P. Mejia-Ramos, The relationship between mathematical practice and mathematics pedagogy in mathematics education research, *ZDM Mathematics Education*, (2020), 52(6), 1063-1074. DOI:10.1007/s11858-020-01173-7.
- [66] R. K. Yin, Case study research: Design and methods (5th ed.). *Sage publications*, 2014.
- [۶۷] ا. غیور نجف‌آباد، اثبات‌های فراموش‌نشده (تکمیل کتاب نتایج باورنکردنی در ریاضیات)، مجموعه سخنرانی‌های امیدعلی شهنی کرمزاده، انتشارات دانشگاه شهیدچمران اهواز، ۱۳۸۳.
- [۶۸] م. سبزی، ر. بهمانی، م. سیاوشی. دیالکتیک تعمیم و انتزاع در آموزش ریاضی. مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، ۱۵ (۴)، (۱۴۰۴) ۱۳۳-۱۴۶. doi:۱۰.۲۲۰۵۵/JAMM.۲۴۴۳.۵۱۲۶۷.۲۰۲۶
- [۶۹] م. سبزی، م. نامداری، م. سیاوشی. سازوکار مقاومت در برابر یادگیری؛ بازخوانی موانع معرفتی در ریاضیات پیشرفته. به سوی علم ریاضی، ۱۵ (۱۴۰۴) ۶۸-۸۰. doi:۱۰.۲۲۰۶۷/tmsj.۱۰۷۴.۹۸۷۸۰.۲۰۲۵

محمد سبزی

دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی

sabzi.mohamad@gmail.com



دانش آموخته کارشناسی ریاضی محض از دانشگاه شهید چمران اهواز و کارشناسی ارشد هندسه منیفلد (سیستم‌های دینامیکی) از دانشگاه شهید باهنر کرمان و دکتری آموزش ریاضی از دانشگاه شهید چمران اهواز.

رضا بهمانی

دانشگاه تهران، دانشکده‌گان علوم، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

reza.behmani@ut.ac.ir



دانش آموخته کارشناسی ریاضی محض از دانشگاه شهید چمران اهواز و کارشناسی ارشد آنالیز از دانشگاه صنعتی شریف و دکتری آنالیز از دانشگاه خوارزمی.