

SOME SYMMETRIC POLYNOMIAL AND RELATED IDENTITIES

NARGES GHAREGHANI^{id} AND MORTEZA MOHAMMAD-NOORI^{id}*

ABSTRACT. In this paper, we study some symmetric polynomials and their properties. In addition to the elementary and complete symmetric polynomials, we consider the accumulative versions of these polynomials and using common combinatorial tools, particularly generating functions, we study related identities. In order to precise how these identities generalize and extend binomial-type identities, the notation is developed through the paper.

1. Introduction

A polynomial of n variables is called a *symmetric polynomial*, if its value does not change by permuting its variables. Symmetric polynomials appeared naturally in the coefficients of one variable polynomials. Various types of symmetric polynomials have been studied in a wide range of mathematical branches spanning from the old Galois theory [3, 1], combinatorics and algebra [6, 15], representation theory of super Lie algebras [16] to mathematical physics [5] and bioinformatics [14]. The most classical type of symmetric polynomials are elementary symmetric polynomials and complete symmetric polynomials. In this paper, by introducing a new notation, we study these polynomials

Keywords: Binomial-type identities, Generating function, Symmetric polynomials.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Alireza Abdoollahi.

*Corresponding author.

Received: 14-10-2024, Accepted: 13-01-2025, Published Online: 27-09-2025.

Cite this article: N. Ghareghani and M. Mohammad-Noori, Some symmetric polynomial and related identities, *Mathematics and Society*, **11** no. 1 (2026) 1–24. <https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.142987.1703> .



as extensions of binomial type coefficients. Using this new notation we prove new identities for symmetric polynomials which are natural generalization of some well-known binomial identities, such as Vandermonid identity.

Here, we give some basic notation and definition which are used in the throughout the paper and some notation which are used in specific part are defined wherever needed. We denote the set of non-negative integers by \mathbb{N} . For a positive integer n , we let $[n] = \{1, \dots, n\}$. For a finite set X the set of all subsets of X is denoted as $P(X)$ and the set of all subsets of X of size i (resp. at most i) is denoted as $P_i(X)$ (respectively $P_{\leq i}(X)$). Also by $P'_i(X)$ (resp. by $P'_{\leq i}(X)$) we mean the set of multi-sets of size i (resp. at most i) whose elements come from X . For a given number n and a given non-negative integer m the falling and rising factorial denoted as $n^{\underline{m}}$ and $n^{\overline{m}}$ are defined as

$$n^{\underline{m}} = n(n - 1) \cdots (n - m + 1),$$

$$n^{\overline{m}} = n(n + 1) \cdots (n + m - 1).$$

1.1. binomial coefficients and some binomial-type numbers. In this subsection we introduce and fix notation for some types of numbers called binomial-type numbers. Based on the definition of factorial functions we mention definition of four types of numbers, called binomial type numbers. There is nothing new about the classical binomial coefficients; The long history of binomial coefficients and their applications in various fields of mathematics together with their diverse flexible forms leading to magical identities, has made them enough popular to occupy chapters and sections in elementary and advanced textbooks of discrete mathematics. Despite these coefficients, we fix the notation about the other three binomial-type numbers and we mention their combinatorial meanings and a few number of identities. Some of them are useful to show similarities between binomial-type numbers and binomial coefficients and some of them will be generalized to identities of symmetric polynomials in future sections.

Definition 1.1. *Let n be a real number and m be non-negative integers. Then*

$$\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!},$$

$$\left(\binom{n}{m}\right) = \frac{n^{\overline{m}}}{m!},$$

$$\binom{n}{\leq m} = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i},$$

$$\left(\binom{n}{\leq m}\right) = \sum_{i=0}^m \left(\binom{n}{i}\right).$$

The values of these functions are defined to be 0 if m is not a non-negative integer.



A wider definition of $\binom{n}{m}$ using the function Γ is given in [2]. However, the above definition which encompasses non-integer (real or complex) values of parameters is still wider than our purpose in the current work. We are mostly interested to non-negative integer parameters. For instance, considering m as a nonnegative integer, the classical combinatorial interpretation of $\binom{n}{m}$ as the number of non-repetitive selection of m objects out of n ones, only covers non-negative integers n ; (A similar interpretation of other binomial-type numbers is discussed in Remark 1.4.) An extension of this interpretation to negative integers n is found in [9] and we do not know any combinatorial interpretation for non-integers n .

Remark 1.2. Let m be a non-negative integer. The value of $\binom{n}{m}$ (resp. $\binom{n}{\leq m}$) equals the number of selection of m objects (resp. at most m objects) out of given n objects. Some results about the order of magnitude of $\binom{n}{\leq m}$ are found in text books (See for instance [10, Lemma 3.8.2] and the proof of [13, Theorem 3.6.1]). From a geometrical point of view, the value of $\binom{n}{\leq m}$ is number of points inside a closed disc of radius m in the space $\{0, 1\}^n$. A generalization of this is mentioned in [8].

Remark 1.3. Let m be a non-negative integer. The value of $\left(\binom{n}{m}\right)$ (resp. $\left(\binom{n}{\leq m}\right)$) equals the number of selection of m objects (resp. at most m objects) out of n ones with repetitions. It is immediate to see that

$$\left(\binom{n}{m}\right) = \binom{n+m-1}{m}.$$

The value of $\left(\binom{n}{\leq m}\right)$ is given in Remark 1.5.

Remark 1.4. Let m and n be non-negative integers. Then the following hold:

- (i) $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$
- (ii) $\left(\binom{n}{m}\right) = \left(\binom{n-1}{m}\right) + \left(\binom{n}{m-1}\right)$
- (iii) $\binom{n}{\leq m} = \binom{n-1}{\leq m} + \binom{n-1}{\leq m-1}$
- (iv) $\left(\binom{n}{\leq m}\right) = \left(\binom{n-1}{\leq m}\right) + \left(\binom{n}{\leq m-1}\right)$

Remark 1.5. Let m and n be non-negative integers. Then the following hold:

- (i) $\binom{n}{\leq m} = 2^n$, when $m \geq n$.
- (ii) $\binom{n}{\leq m} + \binom{n}{\leq n-m-1} = 2^n$.
- (iii) $\left(\binom{n}{\leq m}\right) = \left(\binom{n+1}{m}\right) = \binom{n+m}{m}$.

1.2. Some symmetric polynomials with a new notation. The simplest type of symmetric polynomials are elementary symmetric polynomials which appear in college algebra as the coefficients of univariate polynomials. More precisely, if we consider each root of a univariate polynomial $P(x)$ of degree n as an independent variable, then for each i , $1 \leq i \leq n$, the coefficient of x^i is a symmetric polynomial with respect to the roots. This leads to the study of polynomial solutions through



the permutation group of the roots, which was the origin of Galois theory [3, 1]. The fundamental theorem of symmetric polynomial states that any symmetric polynomial is expressible in terms elementary symmetric polynomials [4, 11]. Each summand of the ℓ -th elementary polynomial on n variables corresponds to a non-repeated selection of ℓ objects among the n ones; Thus setting the variables to 1, the value of this polynomial equals the good old binomial coefficient $\binom{n}{\ell}$. The next type of these polynomials in the classical part of the theory are complete symmetric polynomials. They admit a similar combinatorial interpretation in terms of the repeated binomial coefficients. It is proved that any elementary symmetric polynomial is expressible in terms of complete symmetric ones, thus as a consequence of the fundamental theorem, any symmetric polynomial is expressible in terms of complete symmetric ones. In this section after mentioning the formal definition of symmetric polynomials and some related notation and identities, we naturally use the notation of binomial coefficients (resp. repeated binomial coefficients) for elementary symmetric polynomials (resp. complete symmetric polynomials). This notation lead us to prove some binomial-type equation for these polynomials.

Definition 1.6. A polynomial $f \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ is called symmetric on n variables if for any permutation σ on $[n]$, $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Definition 1.7. for $\ell \geq 1$, the ℓ -th complete symmetric function in n variables is defined by

$$h_\ell(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_\ell \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_\ell},$$

and ℓ -th elementary symmetric polynomial is defined as

$$e_\ell(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_\ell}.$$

Definition 1.8. For a positive integer n we denote an n -tuple (p_1, \dots, p_n) of nonnegative integers by $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$. For such an element $\vec{p} \in \mathbb{N}^n$ we let $\|p\|_0 = \max(p_1, \dots, p_n)$ and $\|p\|_1 = p_1 + \dots + p_n$. We denote the all-one row vector of size n by \vec{j}_n .

Definition 1.9. Let $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ and $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ be n -tuple of variables and n -tuple of integers, respectively. Then we let $\vec{x}^{\vec{p}} = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$. Also, for a subset $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ of $[n]$, we let $\vec{x}_F = x_{f_1} \cdots x_{f_k}$.

Definition 1.10. For $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ we use notations $\binom{\vec{x}}{\ell}$ and $\left(\binom{\vec{x}}{\ell}\right)$ for $e_\ell(x_1, \dots, x_n)$ and $h_\ell(x_1, \dots, x_n)$ respectively. In other words, we let

$$\binom{\vec{x}}{\ell} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_\ell},$$



$$\binom{\vec{x}}{\ell} = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_\ell \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\ell}.$$

We also let $\binom{\vec{x}}{\leq m} = \sum_{i=0}^m \binom{\vec{x}}{i}$ and $\left(\binom{\vec{x}}{\leq m}\right) = \sum_{i=0}^m \left(\binom{\vec{x}}{i}\right)$, we call these polynomials, accumulated elementary symmetric polynomial and accumulated complete symmetric polynomial, respectively.

The following proposition is a natural generalization of Pascal’s identity.

Proposition 1.11. Let $m \geq 0, n > 1$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ and $\vec{x}^j = (x_2, \dots, x_n)$. Then the following recurrence relations hold.

- (i) $\binom{\vec{x}}{m} = x_1 \binom{\vec{x}^j}{m-1} + \binom{\vec{x}^j}{m}$,
- (ii) $\left(\binom{\vec{x}}{m}\right) = x_1 \left(\binom{\vec{x}^j}{m-1}\right) + \left(\binom{\vec{x}^j}{m}\right)$.
- (iii) $\binom{\vec{x}}{\leq m} = x_1 \binom{\vec{x}^j}{\leq m-1} + \binom{\vec{x}^j}{\leq m}$,
- (iv) $\left(\binom{\vec{x}}{\leq m}\right) = x_1 \left(\binom{\vec{x}^j}{\leq m-1}\right) + \left(\binom{\vec{x}^j}{\leq m}\right)$.

The following proposition is based on the above notation.

Proposition 1.12. For every vector \vec{x} and integer m , the following equalities hold:

- (i) $\binom{\vec{x}}{m} = \sum_{I \in P_m([n])} \vec{x}_I = \sum_{\|\vec{p}\|_0=1, \|\vec{p}\|_1=m} \vec{x}^{\vec{p}}$
- (ii) $\left(\binom{\vec{x}}{m}\right) = \sum_{I \in P'_m([n])} \vec{x}_I = \sum_{\|\vec{p}\|_1=m} \vec{x}^{\vec{p}}$
- (iii) $\binom{\vec{x}}{\leq m} = \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I = \sum_{\|\vec{p}\|_0=1, \|\vec{p}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}}$
- (iv) $\left(\binom{\vec{x}}{\leq m}\right) = \sum_{I \in P'_{\leq m}([n])} \vec{x}_I = \sum_{\|\vec{p}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}}$

Proof. We mention the proof of part (i) for instance. The other parts are proved similarly. Each m -subset of $[n]$ corresponds to an ordered m -tuple of $i_1 < \dots < i_m$ of integers in $[n]$, hence,

$$\binom{\vec{x}}{m} = \sum_{I \in P_m([n])} \vec{x}_I.$$

On the other hand, if we map any $I \in P_m([n])$ to the corresponding characteristic vector (p_1, \dots, p_n) with $p_i = 1$ if and only if $i \in I$, then we observe that the second summation of part (i) equals the third one. □

Remark 1.13. If $\vec{x} = \vec{j}_n$, then the values of $\binom{\vec{j}_n}{m}$, $\left(\binom{\vec{j}_n}{m}\right)$, $\binom{\vec{j}_n}{\leq m}$ and $\left(\binom{\vec{j}_n}{\leq m}\right)$ equal to $\binom{n}{m}$, $\left(\binom{n}{m}\right)$, $\binom{n}{\leq m}$ and $\left(\binom{n}{\leq m}\right)$, respectively.



The following remark is a generalization of the first two parts of Remark 1.5, a generalization of the last part of Remark 1.5 would be generalized in part (ii) of Theorem 2.7.

Remark 1.14. Let $n > 1$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ and $\vec{y} = (\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})$. Then the following recurrence relations hold.

- (i) $\binom{\vec{x}}{\leq m} = \prod_{i=1}^n (1 + x_i)$, when $m \geq n$.
- (ii) $\binom{\vec{x}}{\leq m} + x_1 \cdots x_n \binom{\vec{y}}{\leq n-m-1} = \prod_{i=1}^n (1 + x_i)$.

Proposition 1.15. Let $m \geq 0, n > 1$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ and $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Then the following recurrence relations hold.

- (i) $\binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} = \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I \binom{\vec{y}_{[n] \setminus I}}{m-|I|} = \sum_{\substack{\|\vec{p} + \vec{q}\|_0 \leq 1, \\ \|\vec{p} + \vec{q}\|_1 = m}} \vec{x}^{\vec{p}} \vec{y}^{\vec{q}}$,
- (ii) $\left(\binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} \right) = \sum_{\|\vec{p} + \vec{q}\|_1 = m} \vec{x}^{\vec{p}} \vec{y}^{\vec{q}} = \sum_{\|\vec{p}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}} \left(\binom{\vec{y}}{m-|\vec{p}|} \right)$,
- (iii) $\binom{\vec{x} + \vec{y}}{\leq m} = \sum_{\|\vec{p} + \vec{q}\|_0 \leq 1, \|\vec{p} + \vec{q}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}} \vec{y}^{\vec{q}} = \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I \binom{\vec{y}_{[n] \setminus I}}{\leq m-|I|}$,
- (iv) $\left(\binom{\vec{x} + \vec{y}}{\leq m} \right) = \sum_{\|\vec{p} + \vec{q}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}} \vec{y}^{\vec{q}} = \sum_{\|\vec{p}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}} \left(\binom{\vec{y}}{\leq m-|\vec{p}|} \right)$.

Proof. We prove equations of part (i). The other identities are proved similarly. For $i = 1, \dots, n$, let $z_i = x_i + y_i$. Then

$$\begin{aligned} \binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_m} \\ &= \sum_{J \in P_m([n])} \prod_{j \in J} z_j. \end{aligned}$$

On the other hand

$$\begin{aligned} \prod_{j \in J} z_j &= \prod_{j \in J} (x_j + y_j) \\ &= \sum_{I: I \subseteq J} \vec{x}_I \vec{y}_{J \setminus I}. \end{aligned}$$



Hence,

$$\begin{aligned}
 \binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} &= \sum_{J \in P_m([n])} \sum_{I: I \subseteq J} \vec{x}_I \vec{y}_{J \setminus I} \\
 (1.1) \qquad &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \sum_{\substack{J: J \supseteq I \\ J \setminus I \in P_{m-|I|}([n] \setminus I)}} \vec{x}_I \vec{y}_{J \setminus I} \\
 &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I \sum_{\substack{J: J \supseteq I \\ J \setminus I \in P_{m-|I|}([n] \setminus I)}} \vec{y}_{J \setminus I} \\
 &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I \binom{\vec{y}_{[n] \setminus I}}{m - |I|}
 \end{aligned}$$

This proves the first identity to prove the last one, by using Equation (1.1) we obtain

$$\begin{aligned}
 \binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \sum_{\substack{J: J \supseteq I \\ J \setminus I \in P_{m-|I|}([n] \setminus I)}} \vec{x}_I \vec{y}_{J \setminus I} \\
 &= \sum_{\substack{\|\vec{p} + \vec{q}\|_0 \leq 1, \\ \|\vec{p} + \vec{q}\|_1 = m}} \vec{x}^{\vec{p}} \vec{y}^{\vec{q}}.
 \end{aligned}$$

This completes the proof of part (i). □

2. generating functions and combinatorial identities

In this section we use several generating functions and consider their connections to obtain new identities containing symmetric polynomials.

Definition 2.1. Let $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ and let $F(t, \vec{x})$, $G(t, \vec{x})$, $F^+(t, \vec{x})$, $F^-(t, \vec{x})$, $G^+(t, \vec{x})$ and $G^-(t, \vec{x})$ be defined as

$$\begin{aligned}
 F(t, \vec{x}) &= (1 + tx_1) \cdots (1 + tx_n), \\
 G(t, \vec{x}) &= \frac{1}{F(t, \vec{x})}, \\
 F^+(t, \vec{x}) &= \frac{1}{1+t} F(t, \vec{x}), \\
 F^-(t, \vec{x}) &= \frac{1}{1-t} F(t, \vec{x}), \\
 G^+(t, \vec{x}) &= \frac{1}{1+t} G(t, \vec{x}), \\
 G^-(t, \vec{x}) &= \frac{1}{1-t} G(t, \vec{x}).
 \end{aligned}$$

Then we have the following proposition.



Proposition 2.2. Let $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ and $n \geq 0$. Then

$$\begin{aligned}
 F(t, \vec{x}) &= \sum_{i=0}^n \binom{\vec{x}}{i} t^i, \\
 G(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{\vec{x}}{i} t^i, \\
 F^+(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{-\vec{x}}{\leq i} t^i, \\
 F^-(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} \binom{\vec{x}}{\leq i} t^i, \\
 G^+(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{\vec{x}}{\leq i} t^i, \\
 G^-(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} \binom{-\vec{x}}{\leq i} t^i.
 \end{aligned}$$

Definition 2.3. For a vector $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ and a given number α , we let $\alpha \vec{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ and $(\alpha, \vec{x}) = (\alpha, x_1, \dots, x_n)$.

The following proposition states some simple properties of these functions and the proof is straightforward.

Proposition 2.4. For any number $\alpha \neq 0$, functions $F(t, \vec{x})$ and $G(t, \vec{x})$ satisfy the following equations.

- (i) $F(\alpha t, \vec{x}) = F(t, \alpha \vec{x}), \quad G(\alpha t, \vec{x}) = G(t, \alpha \vec{x})$.
- (ii) $F^+(t, (1, \alpha \vec{x})) = F^+(\alpha t, (1, \vec{x})) = F(t, \alpha \vec{x})$.
- (iii) $F^-(t, (-1, \alpha \vec{x})) = F^-(\alpha t, (-1, \vec{x})) = F(t, \alpha \vec{x})$.
- (iv) $G^+(t, \alpha \vec{x}) = G(t, (1, \alpha \vec{x})), \quad G^+(\alpha t, \vec{x}) = G(t, \alpha(1, \vec{x}))$.
- (v) $G^-(t, \alpha \vec{x}) = G(t, (-1, \alpha \vec{x})), \quad G^-(\alpha t, \vec{x}) = G(t, \alpha(-1, \vec{x}))$.

Proof. We prove part (ii) for instance. Using Definition 2.1

$$\begin{aligned}
 F^+(t, (1, \alpha \vec{x})) &= \frac{1}{1+t} F(t, (1, \alpha \vec{x})) \\
 &= \frac{1}{1+t} (1+t)(1+t\alpha x_1) \cdots (1+t\alpha x_n) \\
 &= \frac{1}{1+\alpha t} (1+\alpha t)(1+\alpha t x_1) \cdots (1+\alpha t x_n) \\
 &= F^+(\alpha t, (1, \vec{x})) = F(t, \alpha \vec{x}).
 \end{aligned}$$

□



If we set $\alpha = 1$ in Proposition 2.4, then we have the following corollary.

Corollary 2.5. For any integer m and any vector \vec{x} the following equalities hold:

- (i) $F^+(t, (1, \vec{x})) = F^-(t, (-1, \vec{x})) = F(t, \vec{x})$.
- (ii) $G(t, (1, \vec{x})) = G^+(t, \vec{x}), G(t, (-1, \vec{x})) = G^-(t, \vec{x})$.

Proposition 2.6. For any number α , any integer m and any vector \vec{x} the following equalities hold:

- (i) $\binom{\alpha \vec{x}}{m} = \alpha^m \binom{\vec{x}}{m}$
- (ii) $\left(\binom{\alpha \vec{x}}{m}\right) = \alpha^m \left(\binom{\vec{x}}{m}\right)$
- (iii) $\binom{\alpha \vec{x}}{\leq m} = \alpha^m \binom{\vec{x}}{\leq m} + (1 - \alpha) \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i \binom{\vec{x}}{\leq i}$
- (iv) $\left(\binom{\alpha \vec{x}}{\leq m}\right) = \alpha^m \left(\binom{\vec{x}}{\leq m}\right) + (1 - \alpha) \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i \left(\binom{\vec{x}}{\leq i}\right)$

Proof. (i) Using the first identity of Proposition 2.4 (i) we obtain

$$\begin{aligned} \binom{\alpha \vec{x}}{m} &= [t^m] F(t, \alpha \vec{x}) \\ &= [t^m] F(\alpha t, \vec{x}) \\ &= \alpha^m \binom{\vec{x}}{m}. \end{aligned}$$

(ii) The proof is similar to that of part (i), using the second identity of Proposition 2.4 (i).

(iii) Using fourth identity of Definition 2.1 and Proposition 2.4 (i)

$$(1 - t)F^-(t, \alpha \vec{x}) = (1 - \alpha t)F^-(\alpha t, \vec{x}) = F(t, \alpha \vec{x})$$

Thus

$$F^-(t, \alpha \vec{x}) = \left(\alpha + \frac{1 - \alpha}{1 - t}\right) F^-(\alpha t, \vec{x})$$

and

$$\begin{aligned} \binom{\alpha \vec{x}}{\leq m} &= [t^m] F^-(t, \alpha \vec{x}) \\ &= \alpha [t^m] F^-(\alpha t, \vec{x}) + (1 - \alpha) [t^m] \left(\frac{1}{1 - t} F^-(\alpha t, \vec{x})\right) \end{aligned}$$

Now, it is enough to observe that

$$\begin{aligned} [t^m] \left(\frac{1}{1 - t} F^-(\alpha t, \vec{x})\right) &= \sum_{i=0}^m [t^i] F^-(\alpha t, \vec{x}) \\ &= \sum_{i=0}^m \alpha^i \binom{\vec{x}}{\leq i}. \end{aligned}$$



(iv) Considering the last identity of Definition 2.1,

$$(1 - t)G^-(t, \alpha \vec{x}) = G(t, \alpha \vec{x})$$

$$(1 - \alpha t)G^-(\alpha t, \vec{x}) = G(\alpha t, \vec{x}).$$

Now, using the second identity of Proposition 2.4 (i),

$$(1 - t)G^-(t, \alpha \vec{x}) = (1 - \alpha t)G^-(\alpha t, \vec{x}).$$

The rest of the proof is similar to that of part (iii). □

Theorem 2.7. For given sequence \vec{x} and integer m the followings hold

- (i) $\binom{\vec{x}}{m} = \binom{(-1, \vec{x})}{\leq m}$.
- (ii) $\left(\binom{\vec{x}}{\leq m}\right) = \left(\binom{(1, \vec{x})}{m}\right)$.

Proof. Using Proposition 2.2 and Corollary 2.5, the following equalities are deduced.

(i)

$$\begin{aligned} \binom{\vec{x}}{m} &= [t^m]F(t, \vec{x}) \\ &= [t^m]F^-(t, (-1, \vec{x})) \\ &= \binom{(-1, \vec{x})}{\leq m}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \left(\binom{(1, \vec{x})}{m}\right) &= [t^m]G(t, (-1, -\vec{x})) \\ &= [t^m]G^-(t, -\vec{x}) \\ &= \left(\binom{\vec{x}}{\leq m}\right). \end{aligned}$$
□

Remark 2.8. Identity given in Theorem 2.7 are generalizations of the following binomial identities, (the first binomial identity is well-known and can be found in [10, page 51], whereas the second identity was mentioned in Remark 1.4).

- (i) $(-1)^m \binom{n}{m} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n+1}{k}$.
- (ii) $\left(\binom{n}{\leq m}\right) = \binom{n+1}{m}$.



To see this it is enough to put $\vec{x} = -\vec{j}_n$ in the first identity of Theorem 2.7, and using the identity $\binom{-\vec{j}_n}{m} = (-1)^m \binom{n}{m}$. And second identity can be deduced by setting $\vec{x} = \vec{j}_n$ in the second part of Theorem 2.7 and using identity $\binom{\vec{j}_n}{m} = \binom{n}{m}$.

In the following examples the validity of Theorem 2.7 is shown, in the case that \vec{x} is a vector of length 3.

Example 2.9. Let $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, then

$$\begin{aligned} \binom{(-1, \vec{x})}{\leq 2} &= 1 + (-1 + x_1 + x_2 + x_3) + (-x_1 - x_2 - x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \binom{\vec{x}}{2}, \end{aligned}$$

as it is expected from part (i) of Theorem 2.7.

Example 2.10. Let $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, then

$$\begin{aligned} \binom{\binom{(1, \vec{x})}{2}}{\leq 2} &= 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_1 + x_2 + x_3) + 1 \\ &= \binom{\binom{\vec{x}}{2}}{1} + \binom{\binom{\vec{x}}{1}}{1} + \binom{\binom{\vec{x}}{0}}{1} \\ &= \binom{\binom{\vec{x}}{\leq 2}}{1}, \end{aligned}$$

as it is expected from part (ii) of Theorem 2.7.

Proposition 2.11. Let \vec{x} and \vec{y} be two vectors of arbitrary length, then the following hold.

- (i) $F(t, \vec{x})F(t, \vec{y}) = F(t, \vec{x}\vec{y})$,
- (ii) $G(t, \vec{x})G(t, \vec{y}) = G(t, \vec{x}\vec{y})$,
- (iii) $F(t, \vec{x})G(t, \vec{x}\vec{y}) = G(t, \vec{y})$,
- (iv) $F(t, \vec{x}\vec{y})G(t, \vec{x}) = F(t, \vec{y})$,

Proof. These equations are immediately obtained using Definition 2.1. □

Theorem 2.12. Let \vec{x} and \vec{y} be two vectors of arbitrary length, then the following hold.

- (i) $\sum_{i=0}^m \binom{\vec{x}}{i} \binom{\vec{y}}{m-i} = \binom{\vec{x}\vec{y}}{m}$,
- (ii) $\sum_{i=0}^m \binom{\binom{\vec{x}}{i}}{\leq 2} \binom{\binom{\vec{y}}{m-i}}{\leq 2} = \binom{\binom{\vec{x}\vec{y}}{m}}{\leq 2}$,



$$(iii) \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{\vec{x}\vec{y}}{i} \binom{\vec{x}}{m-i} = (-1)^m \binom{\vec{y}}{m},$$

$$(iv) \sum_{i=0}^m \binom{\vec{x}\vec{y}}{i} \binom{\vec{x}}{m-i} = \binom{\vec{y}}{m}.$$

Proof. Each part of this theorem is easily concluded from the corresponding part of Proposition 2.11.

The proof of part (i) for instance is as below

$$\begin{aligned} \binom{\vec{x}\vec{y}}{m} &= [t^m]F(t, \vec{x}\vec{y}) \\ &= [t^m]F(t, \vec{x})F(t, \vec{y}) \\ &= \sum_{i=0}^m [t^i]F(t, \vec{x})[t^{m-i}]F(t, \vec{y}) \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{\vec{x}}{i} \binom{\vec{y}}{m-i} \end{aligned}$$

□

Narges Ghareghani

Department of Pure Mathematics, School of Mathematics, statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran

Email: ghareghani@ut.ac.ir

Morteza Mohammad-Noori

Department of Computer Science, School of Mathematics, statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran

Email: mmnoori@ut.ac.ir

بررسی انواعی از چندجمله‌ای‌های متقارن و اتحادهای آنها

نرگس غرقانی^{id} و مرتضی محمدنوری^{id*}

چکیده. یک چندجمله‌ای با n متغیر، متقارن نامیده می‌شود هرگاه مقدار آن با اعمال هر جایگشت روی متغیرهایش تغییر نکند. چندجمله‌ای‌های متقارن در شاخه‌های مختلف ریاضیات از جمله ترکیبیات و جبر به صورت خاص در نظریه گالوا و نظریه نمایش جبرهای لی همچنین در مسائل حیطه ریاضی فیزیک و بیوانفورماتیک مورد توجه و مطالعه قرار گرفته اند. چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی و کامل از مهمترین انواع چندجمله‌ای‌های متقارن هستند. در این مقاله ما با معرفی نمادگذاری جدیدی برای چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی و کامل آنها را به عنوان تعمیمی از گونه‌های ضرایب دوجمله‌ای مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

علاوه بر چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی و کامل، نسخه‌های تجمعی این چندجمله‌ای‌ها را معرفی کرده، خواص و اتحادهای آنها را با استفاده از ابزارهای ترکیبیاتی به خصوص توابع مولد، مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. به علاوه با به کار بردن نمادگذاری‌های مناسب برای این چندجمله‌ای‌های متقارن نشان می‌دهیم چطور می‌توان اتحادهای دوجمله‌ای را در مورد چندجمله‌ای‌های متقارن تعمیم داد.

۱. مقدمه

یک چندجمله‌ای با n متغیر، متقارن نامیده می‌شود، هرگاه مقدار آن با اعمال هر جایگشت روی متغیرهایش تغییر نکند. چندجمله‌ای‌های متقارن در شاخه‌های مختلف ریاضیات از جمله ترکیبیات و جبر [۶، ۱۵]، نظریه نمایش جبرهای لی [۱۶]، مسائل در حیطه ریاضی-فیزیک [۵]، بیوانفورماتیک [۱۴] و به صورت خاص در نظریه گالوا [۳، ۱] مورد توجه و مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی و کامل از مهمترین انواع چندجمله‌ای‌های متقارن هستند. در این مقاله ما با معرفی نمادگذاری جدیدی برای چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی و کامل آنها را به عنوان تعمیمی از گونه‌های ضرایب دوجمله‌ای مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس تعمیمی برای برخی اتحادهای شناخته شده دوجمله‌ای همچون اتحاد واندرموند ارائه می‌دهیم.

در اینجا ما تعاریف و نمادگذاری‌هایی که در سراسر مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد ارائه می‌دهیم. مجموعه تمام اعداد صحیح نامنفی را با \mathbb{N} نمایش می‌دهیم. برای عدد صحیح و مثبت n ، قرار می‌دهیم $[n] = \{1, \dots, n\}$. برای مجموعه متناهی X ، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X را به ترتیب با $P(X)$ ، و مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X از اندازه i و از اندازه حداکثر i را با $P_i(X)$ و $P_{\leq i}(X)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $P'_i(X)$ و $P'_{\leq i}(X)$ به ترتیب نمایانگر مجموعه تمام چندمجموعه‌ها از اندازه i و از اندازه حداکثر i ، با اعضای در X هستند. برای

عبارات و کلمات کلیدی: چندجمله‌ای‌های متقارن، اتحادهای دوجمله‌ای، توابع مولد

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالمی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۲۴ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۷/۰۵

ارجاع به مقاله: ن. غرقانی و م. محمدنوری، بررسی انواعی از چندجمله‌ای‌های متقارن و اتحادهای آنها، ریاضی و جامعه، ۱۱ شماره ۱ (۱۴۰۵) ۱-۲۴.

<https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.142987.1703>

عدد صحیح n و عدد صحیح نامنفی m ، فاکتوریل کاهش‌ی و افزایشی $n^{\underline{m}}$ و $n^{\overline{m}}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$n^{\underline{m}} = n(n-1)\dots(n-m+1),$$

$$n^{\overline{m}} = n(n+1)\dots(n+m-1).$$

۱.۱. ضرایب دوجمله‌ای و برخی اعداد دوجمله‌ای‌گونه. در اینجا ما برخی اعداد که شباهت به ضرایب دوجمله‌ای دارند را معرفی می‌کنیم و آنها را اعداد دوجمله‌ای‌گونه می‌نامیم. براساس تعریف تابع فاکتوریل چهار نوع عدد که آنها را اعداد دوجمله‌ای‌گونه می‌نامیم تعریف می‌کنیم. ما در مورد ضرایب دوجمله‌ای کلاسیک مطلب جدیدی نداریم: تاریخچه طولانی این اعداد و کاربردهای آنها در شاخه‌های مختلف ریاضیات به علاوه صورت‌های متفاوت آنها که باعث پدید آمدن اتحادهای شگفت‌انگیزی شده است، سبب شده آنها به اندازه‌ای محبوب شوند که در کتاب‌های مختلف ابتدایی و پیشرفته ریاضیات فصل‌ها و قسمت‌هایی به این ضرایب اختصاص داده شود. در این قسمت ما نمادگذاری‌های مربوط به ضرایب دوجمله‌ای و سه نوع دیگر ضرایب دوجمله‌ای‌گونه را که تا پایان مقاله از آنها استفاده خواهد شد، تعریف می‌کنیم. سپس معنی ترکیبیاتی آنها همچنین تعداد محدودی اتحاد در مورد آنها ارائه می‌دهیم. برخی از این اتحادها برای نشان دادن شباهت میان ضرایب دوجمله‌ای و اعداد دوجمله‌ای‌گونه مفید هستند و برخی از آنها قابل تعمیم به روابط میان چندجمله‌ای‌های متقارن هستند.

تعریف ۱.۱. فرض کنید n یک عدد حقیقی و m یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این صورت

$$\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!},$$

$$\left(\binom{n}{m}\right) = \frac{n^{\overline{m}}}{m!},$$

$$\binom{n}{\leq m} = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i},$$

$$\left(\binom{n}{\leq m}\right) = \sum_{i=0}^m \left(\binom{n}{i}\right).$$

مقدار این توابع وقتی که m یک عدد صحیح نامنفی نیست برابر با ۰ تعریف می‌شوند. هنگامی که n عدد صحیح نامنفی نباشد هریک از این توابع برابر ۰ تعریف می‌شوند.

یک تعمیم دیگر از $\binom{n}{m}$ در [۲] با استفاده از تابع Γ ارائه شده است. (با این حال تعریف فوق که مقادیر ناصحیح (حقیقی و مختلط) پارامترها را در برمی‌گیرد، فراتر از استفاده ما در این مقاله است. ما در این مقاله عموماً از پارامترهای با مقادیر صحیح نامنفی استفاده می‌کنیم. برای مثال فرض کنید m عدد صحیح نامنفی باشد، در این صورت تعبیر ترکیبیاتی کلاسیک $\binom{n}{m}$ به عنوان انتخاب بدون تکرار m شیء از n شیء فقط مقادیر صحیح و نامنفی n را در برمی‌گیرد. تعبیر مشابه از اعداد دوجمله‌ای‌گونه در تبصره ۲.۱ مورد بررسی قرار گرفته است. تعبیر ترکیبیاتی برای عدد صحیح منفی n ، در [۹] آمده است و برای مقادیر ناصحیح n تا جایی که نویسندگان اطلاع دارند تعبیر ترکیبیاتی وجود ندارد.)

تبصره ۲.۱. فرض کنید m عدد صحیح نامنفی باشد. در این صورت مقدار $\binom{n}{m}$ (به ترتیب $\binom{n}{\leq m}$) برابر با تعداد انتخاب‌های m شیء (به ترتیب حداکثر m شیء) از n شیء است. نتایجی درباره اندازه بزرگی $\binom{n}{\leq m}$ در کتاب‌ها یافت می‌شود (برای مثال [۱۰]، لم [۲۰۸.۳] و اثبات [۱۳]، قضیه [۱۰۶.۳] را ببینید). همچنین از دیدگاه هندسی مقدار $\binom{n}{\leq m}$ تعداد نقاط در گوی بسته به شعاع m در فضای $\{0, 1\}^n$ است. تعمیمی از این مطلب در [۸] آمده است.

تبصره ۳.۱. فرض کنید m عدد صحیح نامنفی باشد. در این صورت مقدار $\binom{n}{m}$ (به ترتیب $\binom{n}{\leq m}$) برابر با تعداد انتخاب‌های با تکرار m شیء (به ترتیب حداکثر m شیء) از n شیء است. بنابراین رابطه زیر به سادگی نتیجه می‌شود:

$$\binom{n}{m} = \binom{n+m-1}{m}.$$

مقدار $\binom{n}{\leq m}$ در تبصره ۵.۱ آمده است.

تبصره ۴.۱. فرض کنید m و n اعداد صحیح نامنفی باشند. در این صورت روابط زیر برقرارند:

- (i) $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$
- (ii) $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$
- (iii) $\binom{n}{\leq m} = \binom{n-1}{\leq m} + \binom{n-1}{\leq m-1}$
- (iv) $\binom{n}{\leq m} = \binom{n-1}{\leq m} + \binom{n-1}{\leq m-1}$

تبصره ۵.۱. فرض کنید m و n اعداد صحیح نامنفی باشند. در این صورت روابط زیر برقرارند:

- (i) $\binom{n}{\leq m} = 2^n$ ، وقتی که $m \geq n$.
- (ii) $\binom{n}{\leq m} + \binom{n}{\leq n-m-1} = 2^n$.
- (iii) $\binom{n}{\leq m} = \binom{n+1}{m} = \binom{n+m}{m}$.

۲.۱. چندجمله‌ای‌های متقارن. ساده‌ترین نوع چندجمله‌ای‌های متقارن، چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی هستند که در جبر متوسطه به عنوان ضرایب چندجمله‌ای‌های تک‌متغیره ظاهر شده‌اند. به صورت دقیق‌تر، اگر هر ریشه یک چندجمله‌ای تک‌متغیره $P(x)$ از درجه n را به عنوان یک متغیر مستقل در نظر بگیریم، آنگاه به ازای هر i ، $1 \leq i \leq n$ ، ضریب x^i یک چندجمله‌ای متقارن مقدماتی برحسب ریشه‌ها است. این مطلب مقدمه‌ای برای مطالعه ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها با استفاده از گروه‌های جابگشتی است، که در واقع شروعی برای پیدایش نظریه گالوا بوده است [۳، ۱]. قضیه اساسی چندجمله‌ای‌های متقارن بیان می‌کند که هر چندجمله‌ای متقارن بر حسب چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی قابل بیان است [۴، ۱۱]. هر جمعونند از l -امین چندجمله‌ای متقارن مقدماتی از n متغیر نظیر یک انتخاب بدون تکرار l شیء از n شیء است. بنابراین اگر تمام متغیرها را برابر با ۱ قرار دهیم، مقدار این چندجمله‌ای برابر با $\binom{n}{l}$ می‌شود. یک نوع دیگر چندجمله‌ای‌های متقارن، چندجمله‌ای‌های متقارن کامل است، که آنها نیز تعابیر ترکیبیاتی مشابه بر حسب ضرایب دوجمله‌ای با تکرار دارند. ثابت شده است که هر چندجمله‌ای متقارن مقدماتی برحسب چندجمله‌ای‌های متقارن کامل قابل بیان هستند. بنابراین از قضیه اساسی چندجمله‌ای‌های متقارن نتیجه می‌شود که هر چندجمله‌ای متقارن برحسب چندجمله‌ای‌های متقارن کامل بیان می‌شود.

در ادامه این بخش بعد از تعریف دقیق چندجمله‌ای‌های متقارن و برخی نمادها و اتحادهای وابسته به آنها، ما به صورت طبیعی نماد ضرایب دوجمله‌ای را برای چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی و نماد ضرایب دوجمله‌ای با تکرار را برای چندجمله‌ای متقارن کامل به کار می‌بریم. این نمادگذاری ما را به سمت تعمیم و اثبات برخی روابط چندجمله‌ای برای چندجمله‌ای‌های متقارن هدایت می‌کند.

تعریف ۶.۱. چندجمله‌ای $f \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ یک چندجمله‌ای متقارن با n متغیر است هرگاه به ازای هر جایگشت σ در $[n]$ داشته باشیم $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

تعریف ۷.۱. به ازای عدد صحیح l ، $l \geq 1$ ، l -امین چندجمله‌ای متقارن کامل با n متغیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l},$$

همچنین l -امین چندجمله‌ای متقارن مقدماتی با n متغیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}.$$

تعریف ۸.۱. به ازای عدد صحیح مثبت n ، n -تایی مرتب (p_1, \dots, p_n) از اعداد صحیح نامنفی به صورت $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ نشان داده می‌شود. همچنین برای بردار \vec{p} ، نرم صفر و نرم یک به صورت $\|\vec{p}\|_0 = \max(p_1, \dots, p_n)$ و $\|\vec{p}\|_1 = p_1 + \dots + p_n$ تعریف می‌شوند. همچنین بردار، تماماً یک از اندازه n با \vec{j}_n نمایش داده می‌شود.

تعریف ۹.۱. فرض کنید $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ به ترتیب n -تایی‌هایی از متغیرها و اعداد صحیح باشند. در این صورت منظور از عبارت $\vec{x}^{\vec{p}}$ عبارت $x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ است. همچنین برای زیرمجموعه $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ از $[n]$ ، قرار می‌دهیم $\vec{x}_F = x_{f_1} \dots x_{f_k}$.

تعریف ۱۰.۱. برای $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ، عبارات $\binom{\vec{x}}{l}$ و $\left(\binom{\vec{x}}{l}\right)$ به ترتیب نشان دهنده $e_l(x_1, \dots, x_n)$ و $h_l(x_1, \dots, x_n)$ هستند. به بیان دیگر

$$\binom{\vec{x}}{l} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l},$$

$$\left(\binom{\vec{x}}{l}\right) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}.$$

همچنین چندجمله‌ای‌های مقدماتی و کامل تجمعی به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\binom{\vec{x}}{\leq m} = \sum_{i=0}^m \binom{\vec{x}}{i},$$

و

$$\left(\binom{\vec{x}}{\leq m}\right) = \sum_{i=0}^m \left(\binom{\vec{x}}{i}\right).$$

با در نظر گرفتن تعاریف فوق، گزاره زیر را می‌توان به عنوان تعمیمی از اتحادهای پاسکال در نظر گرفت. اثبات این روابط با استفاده از تعاریف فوق به آسانی قابل انجام است.

گزاره ۱۱.۱. فرض کنید $1 < n$ ، $m \geq 0$ ، $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و $\vec{x}' = (x_2, \dots, x_n)$. در این صورت روابط بازگشتی زیر برقرار است.

- (i) $\binom{\vec{x}}{m} = x_1 \binom{\vec{x}'}{m-1} + \binom{\vec{x}'}{m}$,
- (ii) $\left(\binom{\vec{x}}{m}\right) = x_1 \left(\binom{\vec{x}'}{m-1}\right) + \left(\binom{\vec{x}'}{m}\right)$.
- (iii) $\binom{\vec{x}}{\leq m} = x_1 \binom{\vec{x}'}{\leq m-1} + \binom{\vec{x}'}{\leq m}$,
- (iv) $\left(\binom{\vec{x}}{\leq m}\right) = x_1 \left(\binom{\vec{x}'}{\leq m-1}\right) + \left(\binom{\vec{x}'}{\leq m}\right)$.

گزاره زیر هریک از چندجمله‌ای‌های متقارن مذکور در تعریف ۱۰.۱ را بر اساس نمادهای تعاریف ۸.۱ و ۹.۱ بیان می‌کند.

گزاره ۱۲.۱. به ازای هر بردار \vec{x} و هر عدد صحیح m ، تساوی‌های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \binom{\vec{x}}{m} &= \sum_{I \in P_m([n])} \vec{x}_I = \sum_{\|\vec{p}\|_0=1, \|\vec{p}\|_1=m} \vec{x}^{\vec{p}} \\
 \text{(ii)} \quad \left(\binom{\vec{x}}{m} \right) &= \sum_{I \in P'_m([n])} \vec{x}_I = \sum_{\|\vec{p}\|_1=m} \vec{x}^{\vec{p}} \\
 \text{(iii)} \quad \binom{\vec{x}}{\leq m} &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I = \sum_{\|\vec{p}\|_0=1, \|\vec{p}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}} \\
 \text{(iv)} \quad \left(\binom{\vec{x}}{\leq m} \right) &= \sum_{I \in P'_{\leq m}([n])} \vec{x}_I = \sum_{\|\vec{p}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}}
 \end{aligned}$$

اثبات. در اینجا اثبات قسمت اول را ارائه می‌دهیم، قسمت‌های دیگر به‌طور مشابه قابل اثبات است. با توجه به اینکه هر زیرمجموعه m عضوی از $[n]$ نظیر m -تایی مرتب $i_1 < \dots < i_m$ از اعداد صحیح در $[n]$ است، نتیجه می‌گیریم

$$\binom{\vec{x}}{m} = \sum_{I \in P_m([n])} \vec{x}_I.$$

از طرفی اگر هر $I \in P_m([n])$ را به بردار مشخصه نظیرش (p_1, \dots, p_n) ($p_i = 1$ اگر و فقط اگر $i \in I$) تصویر کنیم، آنگاه مشاهده می‌شود که تساوی $\sum_{I \in P_m([n])} \vec{x}_I = \sum_{\|\vec{p}\|_0=1, \|\vec{p}\|_1=m} \vec{x}^{\vec{p}}$ برقرار است. □

تبصره ۱۳.۱. اگر $\vec{x} = \vec{j}_n$ ، آنگاه مقادیر $\binom{\vec{j}_n}{m}$ ، $\left(\binom{\vec{j}_n}{m} \right)$ ، $\binom{\vec{j}_n}{\leq m}$ و $\left(\binom{\vec{j}_n}{\leq m} \right)$ ، به ترتیب برابرند با $\binom{n}{m}$ ، $\left(\binom{n}{m} \right)$ ، $\binom{n}{\leq m}$ و $\left(\binom{n}{\leq m} \right)$.

تبصره زیر تعمیمی برای دو قسمت اول تبصره ۵.۱ است. تعمیم دو قسمت آخر این تبصره در ادامه مقاله ارائه خواهد شد.

تبصره ۱۴.۱. فرض کنید $n \geq 1$ ، $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ، $x_i \neq 0$ و $\vec{y} = (\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})$. در این صورت روابط بازگشتی زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \binom{\vec{x}}{\leq m} &= \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \quad m \geq n, \\
 \text{(ii)} \quad \binom{\vec{x}}{\leq m} + x_1 \cdots x_n \binom{\vec{y}}{\leq n-m-1} &= \prod_{i=1}^n (1 + x_i).
 \end{aligned}$$

گزاره ۱۵.۱. فرض کنید $n > 1$ ، $m \geq 0$ ، $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ در این صورت روابط بازگشتی زیر برقرارند:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I \binom{\vec{y}}{m-|I|} = \sum_{\substack{\|\vec{p} + \vec{q}\|_0 \leq 1, \\ \|\vec{p} + \vec{q}\|_1 = m}} \vec{x}^{\vec{p}} \vec{y}^{\vec{q}}, \\
 \text{(ii)} \quad \left(\binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} \right) &= \sum_{\|\vec{p} + \vec{q}\|_1 = m} \vec{x}^{\vec{p}} \vec{y}^{\vec{q}} = \sum_{\|\vec{p}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}} \left(\binom{\vec{y}}{m-|\vec{p}|} \right), \\
 \text{(iii)} \quad \binom{\vec{x} + \vec{y}}{\leq m} &= \sum_{\|\vec{p} + \vec{q}\|_0 \leq 1, \|\vec{p} + \vec{q}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}} \vec{y}^{\vec{q}} = \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I \binom{\vec{y}}{\leq m-|I|}, \\
 \text{(iv)} \quad \left(\binom{\vec{x} + \vec{y}}{\leq m} \right) &= \sum_{\|\vec{p} + \vec{q}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}} \vec{y}^{\vec{q}} = \sum_{\|\vec{p}\|_1 \leq m} \vec{x}^{\vec{p}} \left(\binom{\vec{y}}{\leq m-|\vec{p}|} \right).
 \end{aligned}$$

اتحادهای قسمت اول در زیر اثبات می‌شود. اثبات سایر قسمت‌ها به صورت مشابه قابل انجام است. به ازای $i = 1, \dots, n$ ، قرار می‌دهیم $z_i = x_i + y_i$ در این صورت

$$\begin{aligned} \binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_m} \\ &= \sum_{J \in P_m([n])} \prod_{j \in J} z_j. \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \prod_{j \in J} z_j &= \prod_{j \in J} (x_j + y_j) \\ &= \sum_{I: I \subseteq J} \vec{x}_I \vec{y}_{J \setminus I}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} &= \sum_{J \in P_m([n])} \sum_{I: I \subseteq J} \vec{x}_I \vec{y}_{J \setminus I} \\ (1) \quad &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \sum_{\substack{J: J \supseteq I \\ J \setminus I \in P_{m-|I|}([n] \setminus I)}} \vec{x}_I \vec{y}_{J \setminus I} \\ &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I \sum_{\substack{J: J \supseteq I \\ J \setminus I \in P_{m-|I|}([n] \setminus I)}} \vec{y}_{J \setminus I} \\ &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \vec{x}_I \binom{\vec{y}_{[n] \setminus I}}{m - |I|} \end{aligned}$$

به این ترتیب اولین تساوی موجود در قسمت اول را ثابت کردیم. برای اثبات تساوی دوم با استفاده از رابطه (۱) داریم

$$\begin{aligned} \binom{\vec{x} + \vec{y}}{m} &= \sum_{I \in P_{\leq m}([n])} \sum_{\substack{J: J \supseteq I \\ J \setminus I \in P_{m-|I|}([n] \setminus I)}} \vec{x}_I \vec{y}_{J \setminus I} \\ &= \sum_{\substack{\|\vec{p} + \vec{q}\|_0 \leq 1, \\ \|\vec{p} + \vec{q}\|_1 = m}} \vec{x} \vec{p} \vec{y} \vec{q}. \end{aligned}$$

بنابراین اتحادهای قسمت اول ثابت شدند.

۳.۱. توابع مولد و اتحادهای ترکیبیاتی.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. همچنین فرض کنید توابع $F(t, \vec{x})$ ، $F^+(t, \vec{x})$ ، $F^-(t, \vec{x})$ ، $G(t, \vec{x})$ و $G^+(t, \vec{x})$ و $G^-(t, \vec{x})$ به صورت زیر تعریف شوند:

$$\begin{aligned} F(t, \vec{x}) &= (1 + tx_1) \cdots (1 + tx_n), \\ G(t, \vec{x}) &= \frac{1}{F(t, \vec{x})}, \\ F^+(t, \vec{x}) &= \frac{1}{1+t} F(t, \vec{x}), \\ F^-(t, \vec{x}) &= \frac{1}{1-t} F(t, \vec{x}), \\ G^+(t, \vec{x}) &= \frac{1}{1+t} G(t, \vec{x}), \\ G^-(t, \vec{x}) &= \frac{1}{1-t} G(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

در این صورت گزاره زیر به سادگی قابل اثبات است.

گزاره ۱۷.۱. فرض کنید $n \geq 0$ و $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ در این صورت

$$\begin{aligned} F(t, \vec{x}) &= \sum_{i=0}^n \binom{\vec{x}}{i} t^i, \\ G(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \left(\binom{\vec{x}}{i} \right) t^i, \\ F^+(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{-\vec{x}}{\leq i} t^i, \\ F^-(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} \binom{\vec{x}}{\leq i} t^i, \\ G^+(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \left(\binom{\vec{x}}{\leq i} \right) t^i, \\ G^-(t, \vec{x}) &= \sum_{i \geq 0} \left(\binom{-\vec{x}}{\leq i} \right) t^i. \end{aligned}$$

تعریف ۱۸.۱. به ازای بردار $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و عدد داده شده α ، تعریف می‌کنیم

$$\alpha \vec{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

$$(\alpha, \vec{x}) = (\alpha, x_1, \dots, x_n).$$

گزاره بعدی خواص ابتدایی از توابع تعریف شده در این بخش را ارائه می‌دهد و برهان آن ساده است.

گزاره ۱۹.۱. به ازای عدد داده شده $\alpha \neq 0$ ، توابع $F(t, \vec{x})$ و $G(t, \vec{x})$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

- (i) $F(\alpha t, \vec{x}) = F(t, \alpha \vec{x})$, $G(\alpha t, \vec{x}) = G(t, \alpha \vec{x})$.
- (ii) $F^+(t, (1, \alpha \vec{x})) = F^+(\alpha t, (1, \vec{x})) = F(t, \alpha \vec{x})$.
- (iii) $F^-(t, (-1, \alpha \vec{x})) = F^-(\alpha t, (-1, \vec{x})) = F(t, \alpha \vec{x})$.
- (iv) $G^+(t, \alpha \vec{x}) = G(t, (1, \alpha \vec{x}))$, $G^+(\alpha t, \vec{x}) = G(t, \alpha(1, \vec{x}))$.
- (v) $G^-(t, \alpha \vec{x}) = G(t, (-1, \alpha \vec{x}))$, $G^-(\alpha t, \vec{x}) = G(t, \alpha(-1, \vec{x}))$.

حال اگر در گزاره ۱۹.۱ حالت $\alpha = 1$ را در نظر بگیریم، آنگاه نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۲۰.۱. به‌ازای عدد صحیح m و بردار دلخواه \vec{x} تساوی‌های زیر برقرارند.

- (i) $F^+(t, (1, \vec{x})) = F^-(t, (-1, \vec{x})) = F(t, \vec{x})$.
- (ii) $G(t, (1, \vec{x})) = G^+(t, \vec{x})$, $G(t, (-1, \vec{x})) = G^-(t, \vec{x})$.

گزاره ۲۱.۱. به‌ازای عدد داده شده α ، عدد صحیح m و بردار دلخواه \vec{x} تساوی‌های زیر برقرارند.

- (i) $\binom{\alpha \vec{x}}{m} = \alpha^m \binom{\vec{x}}{m}$
- (ii) $\binom{\binom{\alpha \vec{x}}{m}}{m} = \alpha^m \binom{\binom{\vec{x}}{m}}{m}$
- (iii) $\binom{\alpha \vec{x}}{\leq m} = \alpha^m \binom{\vec{x}}{\leq m} + (1 - \alpha) \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i \binom{\vec{x}}{\leq i}$
- (iv) $\binom{\binom{\alpha \vec{x}}{\leq m}}{m} = \alpha^m \binom{\binom{\vec{x}}{\leq m}}{m} + (1 - \alpha) \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^i \binom{\binom{\vec{x}}{\leq i}}{m}$

اثبات. (i) با استفاده از تساوی اول از قسمت اول گزاره ۱۹.۱ داریم

$$\begin{aligned} \binom{\alpha \vec{x}}{m} &= [t^m] F(t, \alpha \vec{x}) \\ &= [t^m] F(\alpha t, \vec{x}) \\ &= \alpha^m \binom{\vec{x}}{m}. \end{aligned}$$

(ii) با استفاده از تساوی دوم در قسمت اول گزاره ۱۹.۱، برهان این قسمت مشابه برهان قسمت قبل است.

(iii) با تساوی چهارم از تعریف ۱۶.۱ و با استفاده از قسمت اول گزاره ۱۹.۱ داریم

$$(1 - t)F^-(t, \alpha \vec{x}) = (1 - \alpha t)F^-(\alpha t, \vec{x}) = F(t, \alpha \vec{x}).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 \binom{\alpha \vec{x}}{\leq m} &= [t^m] F^-(t, \alpha \vec{x}) \\
 &= [t^m] \left(\frac{1-\alpha t}{1-t} F^-(\alpha t, \vec{x}) \right) \\
 &= [t^m] \left(\left(\alpha + \frac{1-\alpha}{1-t} \right) F^-(\alpha t, \vec{x}) \right) \\
 &= \alpha [t^m] F^-(\alpha t, \vec{x}) + (1-\alpha) [t^m] \left(\frac{1}{1-t} F^-(\alpha t, \vec{x}) \right) \\
 &= \alpha^{m+1} \binom{\vec{x}}{\leq m} + (1-\alpha) \sum_{i=0}^m [t^i] F^-(\alpha t, \vec{x}) \\
 &= \alpha^{m+1} \binom{\vec{x}}{\leq m} + (1-\alpha) \sum_{i=0}^m \alpha^i \binom{\vec{x}}{\leq i}.
 \end{aligned}$$

(iv) با تساوی آخر از تعریف ۱۶.۱،

$$\begin{aligned}
 (i-t)G^-(t, \alpha \vec{x}) &= G(t, \alpha \vec{x}) \\
 (1-\alpha t)G^-(\alpha t, \vec{x}) &= G(\alpha t, \vec{x}).
 \end{aligned}$$

حال با استفاده از تساوی دوم از قسمت اول گزاره ۱۹.۱ داریم

$$(i-t)G^-(t, \alpha \vec{x}) = (1-\alpha t)G^-(\alpha t, \vec{x}).$$

ادامه برهان مشابه قسمت قبل است.

□

 قضیه ۲۲.۱. به‌ازای بردار داده شده \vec{x} و عدد صحیح m تساوی‌های زیر برقرارند

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \binom{\vec{x}}{m} &= \binom{(-1, \vec{x})}{\leq m}. \\
 \text{(ii)} \quad \left(\binom{\vec{x}}{\leq m} \right) &= \left(\binom{(-1, \vec{x})}{m} \right).
 \end{aligned}$$

اثبات. با استفاده از گزاره ۱۷.۱ و نتیجه ۲۰.۱، تساوی‌های زیر به‌دست می‌آیند

(i)

$$\begin{aligned}
 \binom{\vec{x}}{m} &= [t^m] F(t, \vec{x}) \\
 &= [t^m] F^-(t, (-1, \vec{x})) \\
 &= \binom{(-1, \vec{x})}{\leq m}.
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \left(\binom{(1, \vec{x})}{m} \right) &= [t^m] G(t, (-1, -\vec{x})) \\ &= [t^m] G^-(t, -\vec{x}) \\ &= \left(\binom{\vec{x}}{\leq m} \right). \end{aligned}$$

□

تبصره ۲۳.۱. تساوی‌های که در قضیه ۲۲.۱ آورده شده است، تعمیمی از اتحادهای زیر در مورد ضرایب دو جمله‌ای هستند. که اتحاد اول آن اتحادی شناخته شده است و به‌عنوان مثال در [۱۰، صفحه ۵۱] آورده شده است، در حالی که اتحاد دوم در تبصره ۲.۱ آمده است.

$$(i) \quad (-1)^m \binom{n}{m} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n+1}{k}.$$

$$(ii) \quad \left(\binom{n}{\leq m} \right) = \left(\binom{n+1}{m} \right).$$

برای مشاهده این موضوع، کافی است در اتحاد اول از قضیه ۲۲.۱ قرار دهیم $\vec{x} = -\vec{j}_n$ و از اتحاد $\binom{-\vec{j}_n}{m} = (-1)^m \binom{n}{m}$ استفاده کنیم. همچنین اتحاد دوم با قرار دادن $\vec{x} = \vec{j}_n$ در قسمت دوم از قضیه ۲۲.۱ و استفاده از اتحاد $\binom{\vec{j}_n}{m} = \binom{n}{m}$ نتیجه می‌شود.

مثال‌های زیر درستی قضیه ۲۲.۱ در حالتی که \vec{x} برداری با طول ۳ است را نشان می‌دهد.

مثال ۲۴.۱. فرض کنید $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} \left(\binom{(-1, \vec{x})}{\leq 2} \right) &= 1 + (-1 + x_1 + x_2 + x_3) + (-x_1 - x_2 - x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \left(\binom{\vec{x}}{2} \right), \end{aligned}$$

که این تساوی تصدیقی است برای قسمت (i) از قضیه ۲۲.۱.

مثال ۲۵.۱. فرض کنید $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} \left(\binom{(1, \vec{x})}{2} \right) &= 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + 1 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= \left(\binom{\vec{x}}{2} \right) + \left(\binom{\vec{x}}{1} \right) + \left(\binom{\vec{x}}{0} \right) \\ &= \left(\binom{\vec{x}}{\leq 2} \right), \end{aligned}$$

که این تساوی تصدیقی است برای قسمت (ii) از قضیه ۲۲.۱.

۴.۱. الحاق بردارها.

گزاره ۲۶.۱. فرض کنید \vec{x} و \vec{y} دو بردار از طول دلخواه باشند. در این صورت روابط زیر برقرارند.

$$(i) \quad F(t, \vec{x})F(t, \vec{y}) = F(t, \vec{xy}).$$

$$(ii) \quad G(t, \vec{x})G(t, \vec{y}) = G(t, \vec{xy}),$$

$$(iii) \quad F(t, \vec{x})G(t, \vec{xy}) = G(t, \vec{y}),$$

$$(iv) \quad F(t, \vec{xy})G(t, \vec{x}) = F(t, \vec{y}).$$

□ اثبات. تمامی این روابط با استفاده از تعریف ۱۶.۱، اثبات می‌شوند.

قضیه ۲۷.۱. فرض کنید \vec{x} و \vec{y} دو بردار از طول دلخواه باشند. در این صورت روابط زیر برقرارند.

$$(i) \quad \sum_{i=0}^m \binom{\vec{x}}{i} \binom{\vec{y}}{m-i} = \binom{\vec{xy}}{m},$$

$$(ii) \quad \sum_{i=0}^m \left(\binom{\vec{x}}{i} \right) \left(\binom{\vec{y}}{m-i} \right) = \left(\binom{\vec{xy}}{m} \right),$$

$$(iii) \quad \sum_{i=0}^m (-1)^i \left(\binom{\vec{xy}}{i} \right) \binom{\vec{x}}{m-i} = (-1)^m \left(\binom{\vec{y}}{m} \right),$$

$$(iv) \quad \sum_{i=0}^m \binom{\vec{xy}}{i} \left(\binom{\vec{x}}{m-i} \right) = \binom{\vec{y}}{m}.$$

اثبات. هر یک از قسمت‌های این قضیه به سادگی از قسمت‌های نظیر، در گزاره ۲۶.۱ نتیجه می‌شود. به‌عنوان نمونه، اثبات قسمت اول به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \binom{\vec{xy}}{m} &= [t^m] F(t, \vec{xy}) \\ &= [t^m] (F(t, \vec{x}) F(t, \vec{y})) \\ &= \sum_{i=0}^m [t^i] F(t, \vec{x}) [t^{m-i}] F(t, \vec{y}) \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{\vec{x}}{i} \binom{\vec{y}}{m-i} \end{aligned}$$

□

مراجع

- [1] E. Artin, *Galois theory*, Edited and with a supplemental chapter by Arthur N. Milgram, Reprint of the 1944 second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1998.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, No. 55, U. S. Government Printing Office, Washington, DC, 1964.
- [3] J. Bewersdorff, *Galois theory for beginners—a historical perspective*, Student Mathematical Library, 95, American Mathematical Society, Providence, RI, 2021.
- [4] D. Cox, J. Little and D. O’Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, Second edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.

- [5] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory, Vol. 2, Loop amplitudes, anomalies and phenomenology*, 25th anniversary edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [6] M. Haiman, Combinatorics, symmetric functions and Hilbert schemes, *Current developments in mathematics*, **2002** (2003) 39–111.
- [7] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, Second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994.
- [8] S. Ling and C. Xing, *Coding theory: A first course*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [9] D. Loeb, Sets with a negative number of elements, *Adv. Math.*, **91** no. 1 (1992) 64–74.
- [10] L. Lovasz, J. Pelikán and K. Vesztergombi, *Discrete mathematics: Elementary and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [11] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford university press, 1998.
- [12] T. Mansour, and M. Schork, *Commutation relations, normal ordering, and Stirling numbers*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [13] J. Matoušek and J. Nešetřil, *Invitation to discrete mathematics*, Second edition, Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [14] M. Mohammad-Noori, N. Ghareghani and M. Ghandi, Generalized gapped k -mer filters for robust frequency estimation, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **50** no. 5 (2024) 23 pp.
- [15] H. Oruç and H. Akmaz, Symmetric functions and the Vandermonde matrix, *J. Comput. Appl. Math.*, **172** no. 1 (2004) 49–64.
- [16] S. Sahi and H. Salmasian, The Capelli problem for $gl(m|n)$ and the spectrum of invariant differential operators, *Adv. Math.*, **303** (2016) 1–38.

نرگس غرقانی

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران
ghareghani@ut.ac.ir

نرگس غرقانی متولد مرداد ماه ۱۳۵۹ در شهر تهران است، وی در سال ۱۳۸۱ از دانشگاه تهران در رشته ریاضی محض فارغ التحصیل شد و کارشناسی ارشد و دکتری خود را به ترتیب در سالهای ۱۳۸۳ و ۱۳۸۷ در رشته ریاضی محض گرایش ترکیبیات در دانشگاه تهران به اتمام رساند. او از سال ۱۳۹۲ تا کنون عضو هیات علمی دانشگاه تهران است.



مرتضی محمدنوری

گروه علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران
mmnoori@ut.ac.ir

مرتضی محمدنوری متولد دی ماه ۱۳۵۳ در شهر تهران است. وی در سال ۱۳۷۶ در رشته مهندسی برق از دانشکده فنی دانشگاه تهران فارغ التحصیل شد. سپس در ۱۳۷۸ دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض دانشگاه تهران را به اتمام رساند و دکتری خود را در ۱۳۸۴ از دانشگاههای تهران و پاریس جنوب در رشته های ریاضی محض و علم کامپیوتر اخذ کرد. او از سال ۱۳۸۴ تا کنون عضو هیات علمی دانشگاه تهران است.

