

HISTORICAL APPROACHES AND MODERN METHODS IN ANALYZING THE BRACHISTOCHRONE PROBLEM

BEHZAD KAFASH¹

ABSTRACT. This paper presents the history of competition of mathematicians to uncover the characteristics of the cycloid curve, titled "Helen of Geometry". It also includes historical notes related to the Brachistochrone problem. The cycloid is introduced in parametric form, and its properties and applications are obtained. Additionally, the calculus of variations and the study of the Brachistochrone problem, along with various solutions, are presented. We show that the optimal solution to the Brachistochrone problem is the cycloid curve. Several procedures in Maple software are introduced to provide a more accurate analysis. These graphical outputs help in understanding the yields. The proposed Maple procedures allow for the comparison of the shortest time problem along paths such as lines, circular arcs, and cycloids. These procedures also aid in drawing connecting curves between points and in calculating optimal travel times numerically. The findings clearly demonstrate that the travel time along the cycloid curve is significantly shorter than along other paths.

1. Introduction and Historical Background

Undoubtedly, the significant achievements of humanity across various areas of science and technology rely on the focus given to fundamental sciences, particularly mathematics. UNESCO's decision to acknowledge the year 2000 as the 'International Year of Mathematics'¹ and the year 2022 as

Keywords: Calculus of variation problems, Brachistochrone problem, cycloid curve or Helen of geometry, Euler-Lagrange equation, Maple software.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Saeid Maghsoudi. Received: 29-07-2024, Accepted: 24-12-2024, Published Online: 10-07-2025.

Cite this article: B. Kafash, Historical approaches and modern methods in analyzing the brachistochrone problem, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 3 (2025) 53–97. <http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.142651.1687> .

¹world mathematical year 2000



the “*International Year of Basic Sciences for Sustainable Development*”² illustrates this. The goals that have motivated these declarations have been to enhance awareness of the fundamental sciences as the foundation for the progress and growth of communities.

The study of leading nations in high technologies reveals a significant emphasis on advancing fundamental sciences, particularly mathematics. Mathematics occupies a crucial role in fostering creativity, logical reasoning, and systematic thinking, with its wide-ranging applications across engineering, computer science, aerospace, military science, and economics. Galileo Galilei³ referred to mathematics as the “language of nature”, while Gauss⁴ labeled it the “queen of sciences” [1]. This field not only endures but also stands as one of humanity’s greatest achievements.

The mathematical sciences originated from humanity’s needs and observations of nature and gradually expanded with the advancement of societies. Mathematicians first sought to uncover the laws of nature and later formulated precise models, paving the way for scientific and technological progress [12]. One of the prominent subjects in the history of mathematics is the study of the *cycloid*⁵, a curve celebrated for its geometric beauty and unique properties. Due to its significance, it is famously known as the “*Helen of Geometry*”⁶ [1, 8].

The cycloid is the path followed by a point on the edge of a circle as it rolls along a line path. This curve captivates mathematicians and has also been a platform for scientific competition among leading academics. Historical research suggests that Galileo was the pioneer in showing, through a clever geometric approach, that the area beneath one arch of the cycloid is three times larger than that of its generating circle [11].

After Galileo, his student Vincenzo Viviani⁷ and Marin Mersenne⁸ developed an interest in exploring this curve. Mersenne’s computations showed that the horizontal distance between two points on the cycloid is equal to the circumference of the circle that generates it. He also proposed that the curve might conform to a semi-ellipse [8].

²international year of basic sciences for sustainable development

³Galileo Galilei (1564-1642)

⁴Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

⁵Cycloid

⁶Helen of Geometry

⁷Vincenzo Viviani (1622-1703)

⁸Marin Mersenne (1588-1648)



Additional inquiries and discussions were conducted by mathematicians like Roberval⁹, Descartes¹⁰, and Fermat¹¹. Roberval, applying *Cavalieri’s principle*¹², determined the area beneath a single arch of the cycloid and demonstrated that it is three times the area of the circle that generates it. In addition, he created a technique for finding tangents to the curve and determining the volume of the solid generated by rotating one arch [11].

In the latter half of the 17th century, Blaise Pascal¹³ conducted a study of the geometric properties of cycloid, driven by personal motivation. Pascal presented several new problems related to this curve in the form of a scientific competition. Prominent mathematicians, including John Wallis¹⁴, participated in the challenge; however, none were able to provide a complete solution. These competitions significantly contributed to the advancement of geometric methods and later facilitated the development of calculus [1].

The endeavors to uncover the properties of the cycloid laid the groundwork for the emergence of the *calculus of variations*, a branch of mathematics that investigates the optimization of functionals. This field has played a pivotal role in solving dynamic optimization problems and optimal control theory. Consequently, the study of the cycloid is significant not only from a historical perspective but also in terms of its contributions to mathematical methods and modern applications [6, 7].

2. The Cycloid Curve

The cycloid is the famous curve in mathematics, with its roots tracing back to the early 16th century. Defined as the trajectory of a point on the circumference of a circle rolling along a line without slipping, the cycloid has captured both mathematical intrigue and practical applications. Galileo named this curve the *cycloid* and proposed its use in the design of bridge arches. This concept became feasible with the advent of reinforced concrete, establishing the cycloid as a reliable choice in structural engineering [3, 9].

The cycloid curve can be mathematically described using the following parametric form [10]:

$$(2.1) \quad \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

where a is the radius of the generating circle. Depending on the position of the tracing point relative to the center of circle, this curve can take one of three forms:

⁹Gilles Personne de Roberval (1602-1675)

¹⁰René Descartes (1596-1650)

¹¹Pierre de Fermat (1607-1665)

¹²Cavalieri’s principle

¹³Blaise Pascal (1623-1662)

¹⁴John Wallis (1616-1703)



- **Ordinary Cycloid:** The point lies on the circumference of the circle.
- **Curtate Cycloid:** The point lies inside the circle.
- **Prolate Cycloid:** The point lies outside the circle.

2.1. **Geometric and Physical Properties.** The cycloid possesses numerous fascinating properties that are highly relevant to both mathematics and physics:

- (1) **Arc Length:** The length of one complete arch is $8a$, which is eight times the radius of circle.
- (2) **Area Under the Curve:** The area enclosed by one arch and the baseline is $3\pi a^2$, equivalent to three times the area of the generating circle.
- (3) **Dimensions:** The height of the cycloid is equal to the diameter of circle ($2a$), and its base is the circumference of circle ($2\pi a$).
- (4) **Radius of Curvature:** At any given point, the radius of curvature is twice the distance between the point and the center of rotation.

2.2. **Applications of the Cycloid Curve.** The cycloid has applications in a variety of scientific and engineering based on its unique geometric and physical characteristics:

- **Structural Design:** The cycloid serves as an ideal model for designing arches in bridges and other robust structures.
- **Optimal Paths:** The cycloid is the solution to the Brachistochrone problem, representing the fastest descent between two points under gravity.
- **Pendulum Clocks:** Cycloidal arcs ensure consistent oscillation periods, independent of amplitude.
- **Physics of Particles:** The trajectory of charged particles in orthogonal electric and magnetic fields forms a cycloid.

3. The Brachistochrone Problem

The brachistochrone problem, famous for its intrinsic appeal and its pivotal role in shaping the calculus of variations, holds a significant place in the annals of mathematical history. This problem posits a frictionless bead sliding from a higher point A to a lower point B. The query is: which path, a line or an arbitrary curve connecting the two points, would minimize the time taken for the bead to reach B? [2] Intuitively, the line, being the shortest distance between two points, might seem the quickest. However, a deeper analysis reveals that this assumption might be incorrect. In fact, the bead could potentially cover a longer path in less time if it were to initially fall vertically and then continue its motion [10]. This concept was historically proposed by Galileo. In 1694, Johann Bernoulli posed a more common version of this problem, now known as the brachistochrone problem.



To model this problem, we consider the motion of a bead under gravity along an arbitrary curve connecting two points A and B. The primary objective is to determine the equation of the curve that minimizes the time taken for the bead to travel from A to B. By applying the principles of conservation of energy and the velocity of the bead along the curve, an equation for the time taken along the path is derived [3, 9]:

$$(3.1) \quad T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y}} dx,$$

where g is the acceleration due to gravity . By the Euler-Lagrange equation, the differential equation corresponding to the desired curve is obtained as follows [5]:

$$(3.2) \quad y \left(1 + (y')^2 \right) = c,$$

where c is a constant.

Furthermore, the cycloid is introduced as a particular curve to solve the brachistochrone problem. The distinctive feature of this curve, specifically recognized as the curve of fastest descent, is that the motion of the bead along this curve from point A to point B always occurs in a fixed and minimal time. This curve also finds practical applications in the design of pendulum clocks and timekeeping instruments. The differential equation associated with the cycloid is solved, demonstrating that it is indeed the unique curve that guarantees the shortest time for motion between two points. The solutions to the differential equations yield the parametric equations of the cycloid. This curve, recognized as the curve of shortest time between two points, has found extensive applications in various scientific and engineering analyses [4].

4. Analysis of the Shortest Time Problem Along Different Paths

This section examines the **shortest time problem** for three distinct paths (cycloid, line, and circular arc) demonstrating that the cycloid minimizes time. The parametric equations of cycloid and their role in solving the Brachistochrone Problem highlight its optimality. Using the Maple procedure, the analysis compares travel times numerically and visually across paths, confirming the efficiency of cycloid and reinforcing its importance in both theoretical and practical applications.

4.1. Cycloid Path Analysis. The cycloid, known as the solution to the Brachistochrone Problem, is defined by the parametric equations (2.1) where $a = r$ is the radius of the generating circle and $0 \leq t \leq t_1$. The solution is obtained numerically for given endpoints $B(x_1, y_1)$. The results for several cases are shown in Table 1.



TABLE 1. Time Calculations for Cycloid Paths

Example	Endpoint (x_1, y_1)	Time to B	Time to Minimum Point
I	(1, 1)	0.5829950146	0.7593384715
II	(3, 1)	1.018486861	0.7897247281
III	(1, 2)	0.6940765647	1.555971031
IV	(3, 2)	0.9806021830	1.003869908

TABLE 2. Time Calculations for Line Paths

Example	Endpoint (x_1, y_1)	Time to B
I	(1, 1)	0.6386599136
II	(3, 1)	2.473519209
III	(1, 2)	0.7140434906
IV	(3, 2)	1.994214941

TABLE 3. Time Calculations for Circular Paths

Example	Endpoint (x_1, y_1)	Time to B
I	(1, 1)	0.5920615866
II	(3, 1)	1.057726406
III	(1, 2)	0.6978216999
IV	(3, 2)	1.004460007

4.2. **Line Path Analysis.** The equation for a line passing through $A(0, 0)$ and $B(x_1, y_1)$ is:

$$(4.1) \quad y = mx, \quad m = \frac{y_1}{x_1}.$$

The travel time along this path is:

$$(4.2) \quad T = \sqrt{\frac{2(x_1^2 + y_1^2)x_1}{y_1g}},$$

where g is the gravitational acceleration.

4.3. **Circular Path Analysis.** For a circular trajectory centered at $(r, 0)$ with radius r , passing through $B(x_1, y_1)$, the circle is defined as:

$$(4.3) \quad (x - r)^2 + y^2 = r^2, \quad r = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2x_1}.$$

TABLE 4. Comparison of Travel Times

Path Type	Time to (2, 3)	Time to (5, 3)
Line	1.329476627	3.399526989
Circle	0.9045011664	1.299965875
Cycloid	0.8967041001	1.266150837

4.4. **Comparison of Paths.** The results of time comparisons for cycloid, line, and circular paths are summarized in Table 4. The cycloid consistently provides the shortest travel time.

Also, the various paths traveled between the initial and final points are plotted in comparison to the optimal path of the cycloid curve in Figure (1). This comparison enables the evaluation of the results along the line and circular paths relative to the optimal trajectory.

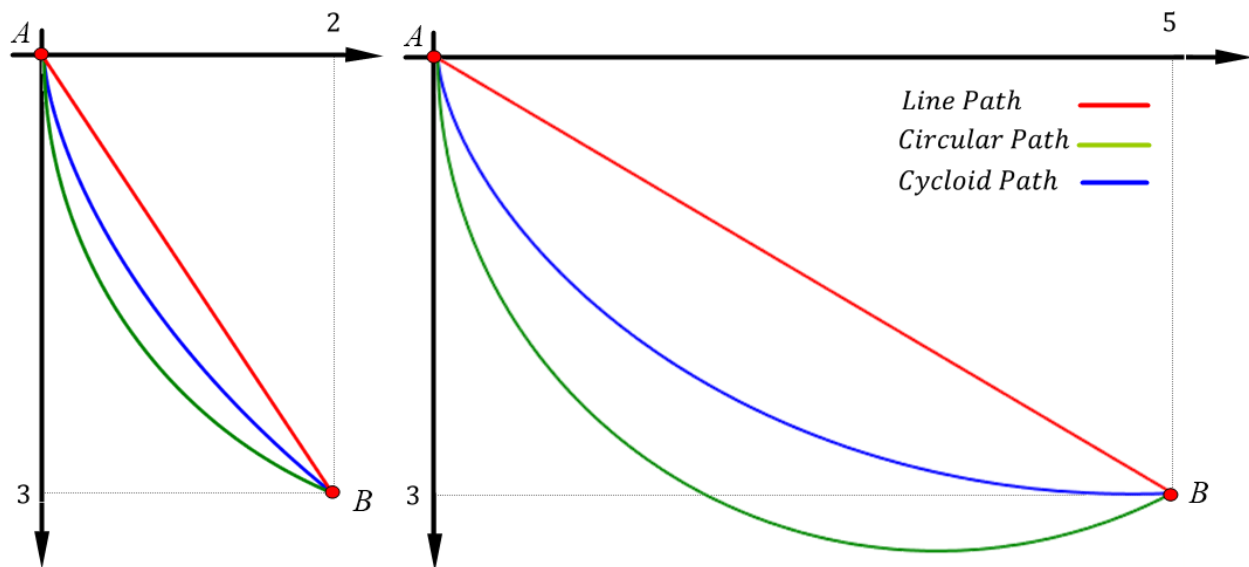


FIGURE 1. Comparison of paths between (0,0) to (2,3) and (0,0) to (5,3)

5. CONCLUSION

This paper explores the historical and mathematical significance of the Brachistochrone problem, highlighting the cycloid as the optimal solution. It discusses the development of variational calculus, the various methods used to solve the shortest time problem, and introduces Maple procedures for analyzing optimal paths and comparing results numerically and graphically.

REFERENCES

[1] E. T. Bell, (1986). Men of mathematics. Simon and Schuster, New York.



- [2] J. Bernoulli, (1697). Jacobi Bernoulli solutio problematum fraternalium. Acta Eruditorum, Leipzig, 214, 1697.
- [3] B. Brunt, (2004). The Calculus of Variations. Springer-Verlag, New York.
- [4] Deterministic and stochastic dynamics: Introduction to the calculus of variations (2016). The Open University, Milton Keynes, United Kingdom. <http://www.open.edu/openlearn/ocw/mod/resource/view.php?id=72745>.
- [5] L. Euler, (1744). The Method of Finding Plane Curves that Show Some Property of Maximum or Minimum, Lausanne and Geneva.
- [6] P. G. Ciarlet, C. Mardare, (2022). On the Brachistochrone Problem. Communications in Mathematical Analysis and Applications, 1(1), 213-240.
- [7] L. G. B. De Sousa, L. P. F. Lima, (2024). An educational product based on the brachistochrone problem. International Journal of Professional Business Review: Int. J. Prof. Bus. Rev., 9(5), 2.
- [8] J. Martin, (2010). The Helen of geometry. The College Mathematics Journal, 41(1), 17-28.
- [9] E. R. Pinch, (1993). Optimal control and the calculus of variations. Oxford University Press, London.
- [10] G. B. Thomas, et al. (2010). Thomas calculus (Vol. 12). Boston: Pearson.
- [11] E. A. Whitman, (1943). Some historical notes on the cycloid. The American Mathematical Monthly, 50(5), 309-315.
- [12] P. Shahriari, The History of Mathematics, Tehran: Mohajer Publications, 2001. In Persian.

Behzad Kafash

Faculty of Engineering, Ardakan University, P.O. Box 184, Ardakan, Iran.

Email: bkafash@ardakan.ac.ir

رویکردهای تاریخی و روش‌های نوین در تحلیل مسأله کوتاه‌ترین زمان

بهزاد کفاش^{ID}

چکیده. در این مقاله، تاریخچه‌ای از رقابت ریاضی‌دانان در کشف ویژگی‌های منحنی چرخ‌زاد، که به «هلن هندسه» مشهور است، ارائه و برخی یادداشت‌های تاریخی مرتبط با مسأله کوتاه‌ترین زمان بیان گردیده است. همچنین شکل پارامتری این منحنی معرفی و برخی ویژگی‌ها و کاربردهای آن ارائه شده است. در ادامه مسائل حساب تغییرات و مسأله کوتاه‌ترین زمان به همراه روش‌های مختلف حل آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته و پاسخ بهینه‌ی مسأله کوتاه‌ترین زمان به صورت منحنی چرخ‌زاد تعیین گردیده است. برای تحلیل دقیق‌تر مسأله کوتاه‌ترین زمان، چند رویه در نرم‌افزار مپل معرفی شده که خروجی گرافیکی آن‌ها در درک بهتر این مسأله مؤثر می‌باشد. رویه‌های پیشنهادی امکان بررسی مسأله کوتاه‌ترین زمان در امتداد مسیرهایی نظیر خط مستقیم، دایره‌ای و منحنی چرخ‌زاد را فراهم نموده و مقایسه نتایج به دست آمده را ممکن ساخته است. این رویه‌ها قابلیت رسم منحنی‌های اصل بین نقاط و محاسبه عددی زمان بهینه را داشته و نشان می‌دهد که زمان حرکت مهره در امتداد منحنی چرخ‌زاد به طور قابل توجهی کمتر از مسیرهای دیگر است.

۱. مقدمه و بیان تاریخچه

بدون تردید، پیشرفت‌های روزافزون بشر، نتیجه توجه به علوم پایه‌ای همچون ریاضیات است. اهمیت این موضوع در مصوبات سازمان یونسکو نیز مشهود است. به عنوان نمونه، سال ۲۰۰۰ میلادی به عنوان سال جهانی ریاضیات^۱ و سال ۲۰۲۲ به عنوان سال جهانی بزرگداشت علوم پایه^۲ نام‌گذاری شده‌اند. هدف از چنین نام‌گذاری‌هایی، تأکید بر نقش علوم پایه به عنوان زیربنای توسعه و پیشرفت در جوامع مختلف است.

نگاهی به کشورهایی که در بهره‌گیری از فناوری‌های پیشرفته پیشتاز هستند، نشان می‌دهد که این کشورها توجه ویژه‌ای به علوم پایه، به ویژه ریاضیات، داشته‌اند. ریاضیات با کاربردهای گسترده‌ای در حوزه‌هایی مانند مهندسی، علوم کامپیوتر، علوم نظامی، هوافضا و اقتصاد، از اهمیت خاصی برخوردار است. این علم نه تنها خلاقیت و توانایی استدلال را تقویت می‌کند، بلکه نظم فکری و زیبایی‌شناسی را نیز ترویج می‌دهد.

ریاضیات علمی است که هرگز کهنه نمی‌شود و همچنان یکی از پایدارترین دستاوردهای بشر باقی مانده است. گالیله^۳ ریاضیات را «زبان طبیعت» و گوس^۴ آن را «سلطان دانش‌ها» نامیده‌اند [۳]. تاریخ نشان می‌دهد که طبیعت و زندگی،

عبارت و کلمات کلیدی: مسائل حساب تغییرات، مسأله کوتاه‌ترین زمان، منحنی چرخ‌زاد یا هلن هندسه، معادله اوایلر-لاگرانژ، نرم‌افزار مپل.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیر تخصصی رابط: سعید مقصودی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱/۰۴ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۴/۱۹

ارجاع به مقاله: ب. کفاش، رویکردهای تاریخی و روش‌های نوین در تحلیل مسأله کوتاه‌ترین زمان، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۳ (۱۴۰۴) ۹۷-۵۳.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.142284.1678>

¹word mathematical year 2000 [36] ²international year of basic sciences for sustainable development [21] ³Galileo Galilei (1564-1642) ⁴Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

سرچشمه اصلی پیدایش علوم، به‌ویژه ریاضیات بوده است. ریاضی‌دانان در ابتدا با تأثیر از نیازهای بشر و مشاهده طبیعت پیرامون، کار خود را به‌صورت مقدماتی آغاز کردند و با پیشرفت جوامع انسانی، این علم به‌طور ملموس‌تر و جدی‌تر توسعه یافت. ریاضی‌دانان گاه از طریق تجربه و آزمایش، قوانین اولیه‌ای که بر طبیعت و جوامع حاکم است را کشف می‌کنند و گاه با گسترش مبانی ریاضی، مسیر را برای درک عمیق‌تر این قوانین و تسلط بیشتر بر آن‌ها هموار می‌سازند. این تلاش‌ها سبب شده است که ریاضیات به‌عنوان پایه‌ای برای بسیاری از علوم، فناوری‌ها، و صنایع عمل کرده و تأثیر بسزایی در پیشرفت علمی، صنعتی، و بهبود زندگی اجتماعی داشته باشد [۳۹].

جهان گسترده ریاضیات، مملو از شگفتی‌هاست و هرچه بیشتر در مسیر شناخت آن گام برداریم، رازهای بیشتری کشف می‌شود. یکی از منحنی‌های شگفت‌انگیز در این عرصه، منحنی چرخ‌زاد^۵ یا سیکلوئید است. این منحنی به دلیل ویژگی‌های ساده و درعین‌حال جذاب خود، و همچنین رقابت‌های پرشور ریاضی‌دانان برای کشف خواص آن، به «هلن هندسه»^۶ مشهور شده است [۳، ۲۰]. این لقب برگرفته از نام یکی از شخصیت‌های اسطوره‌ای یونان است که علاوه بر زیبایی، منشاء نزاع‌ها و درگیری‌های بسیاری بوده است.

تعریف این منحنی به‌صورت «مکان هندسی حاصل از حرکت یک نقطه از یک چرخ یا دایره که بر روی مسیر مستقیم (خط راست) غلتش محض^۷ انجام می‌دهد»، ارائه شده است. با این حال، این منحنی بسیار پیچیده‌تر از آن است که تعریفش نشان می‌دهد. شواهد تاریخی نشان می‌دهد که نام این منحنی برای نخستین بار در سال ۱۵۰۱ در مقاله‌ای پیرامون تربیع دایره توسط شارل بوول^۸ مطرح شده است [۳]. یکی از نخستین مطالعات رسمی در خصوص منحنی چرخ‌زاد توسط گالیله انجام شده است. او با مقایسه وزن طاق و دایره مولد، به این نتیجه رسید که مساحت زیر یک قوس منحنی چرخ‌زاد، سه برابر مساحت دایره مولد آن است [۳۵]. همچنین گالیله به همراه یکی از شاگردانش به نام وینچنزو ویویانی^۹، به مطالعه‌ی مسأله ترسیم مماس بر این منحنی پرداختند.

مارین مرسن^{۱۰} در حوالی سال ۱۶۱۵ علاقه‌ی ویژه‌ای به مطالعه در خصوص منحنی چرخ‌زاد پیدا کرد. با توجه به ارتباط گسترده او با بسیاری از ریاضی‌دانان برجسته، این احتمال وجود دارد که او نام این منحنی را از گالیله شنیده باشد. مرسن نشان داد که فاصله نقاط روی یک قوس منحنی چرخ‌زاد در امتداد خط ممنا برابر با محیط دایره مولد است. او همچنین این فرضیه را مطرح کرد که منحنی چرخ‌زاد با یک نیمه بیضی منطبق است [۲۰]. هرچند این حدس نادرست بود، اما به واقعیت خیلی نزدیک است.

در سال ۱۶۲۸، مرسن از روبروال^{۱۱} خواست تا مطالعه روی منحنی چرخ‌زاد را ادامه دهد. تا سال ۱۶۳۴، روبروال موفق شد مساحت زیر یک قوس منحنی چرخ‌زاد را محاسبه کند و نشان دهد که این مساحت، سه برابر مساحت دایره مولد است. او در این محاسبات از اصل کاوالیری^{۱۲} استفاده کرد. دکارت^{۱۳} و فرما^{۱۴} نیز از طریق مرسن از روش روبروال برای محاسبه مساحت منحنی مطلع شدند و نتیجه را تأیید کردند. دکارت پس از بررسی روش روبروال، اظهار داشت که «روبروال با زحمت کمی به این نتیجه دست یافته است» [۲۵]. روبروال در پاسخ گفت: «بدون شک، دانش قبلی در ارائه‌ی این پاسخ مؤثر بوده است».

تا سال ۱۶۳۸، روبروال موفق به ترسیم مماس بر منحنی چرخ‌زاد در هر نقطه شد و حجم جسم حاصل از دوران ناحیه زیر یک قوس حول محور x ‌ها را محاسبه نمود. منابع تاریخی نشان می‌دهند که در آگوست همان سال، روبروال، فرما و دکارت هر یک روش‌های متفاوتی برای ترسیم مماس بر این منحنی به مرسن ارائه دادند. این موضوع به بحث‌ها و مشاجراتی درباره‌ی برتری روش‌ها انجامید. علت اصلی این اختلافات، نبود توافق کلی درباره‌ی معنای مماس بودن یک خط بر منحنی

⁵cycloid ⁶Helen of Geometry ⁷pure rolling/rolling without sliding ⁸Carolus Bovillus (1475-1566) ⁹Vincenzo Viviani(1622-1703) ¹⁰Marin Mersenne (1588-1648) ¹¹Gilles Personne de Roberval (1602-1675) ¹²Cavalieri's principle ¹³René Descartes (1596-1650) ¹⁴Pierre de Fermat (1607-1665)

بود [۲۵]. در لابه‌لای این مشاجره‌ها، بحث‌ها و رقابت‌ها این رویکرد فرما بود که در نهایت منجر به تعریف امروزی مماس بر منحنی گردید.

نکته‌ای که درباره‌ی روبروال جالب توجه است، تمایل او به حفظ انحصار علمی بود که باعث می‌شد یافته‌هایش را به‌ندرت منتشر کند. این رفتار در طول سالیان متمادی، اختلافاتی میان او و سایر ریاضی‌دانان ایجاد کرد. روبروال اغلب ادعا می‌کرد که هر نتیجه‌ای درباره‌ی منحنی چرخ‌زاد، پیش‌تر توسط او کشف شده است. در نهایت، روش‌های او ۱۸ سال پس از مرگش، در سال ۱۶۹۳ منتشر شدند [۲۰].

در سال ۱۶۴۴، یکی از شاگردان گالیله، توریچلی^{۱۵}، روش خود برای محاسبه مساحت یک قوس منحنی چرخ‌زاد را ارائه کرد. او این مساحت را سه برابر مساحت دایره‌ی مولد آن دانست و این موضوع را به‌صورت زیر بیان نمود: «اکنون این سؤال مطرح می‌شود که مساحت یک قوس از منحنی چرخ‌زاد چه نسبتی با مساحت دایره مولد آن دارد؟ ما ثابت می‌کنیم که این مقدار سه برابر است.» مطالب توریچلی به‌عنوان اولین مقاله‌ی شناخته‌شده درباره‌ی منحنی چرخ‌زاد به‌شمار می‌رود. انتشار این نتیجه، خشم روبروال را برانگیخت؛ زیرا آن را متعلق به خود می‌دانست. او در نامه‌ای که به‌صورت گسترده منتشر شد، توریچلی را به سرقت مدرک متهم کرد. در سال ۱۶۴۷، توریچلی، در حالی که برای اثبات اصالت کار خود تلاش می‌کرد، درگذشت. هرچند مرگ او بر اثر بیماری حصبه بود، شایعاتی منتشر شد که این مرگ ناشی از شرمساری نسبت به اتهام سرقت علمی بوده است. امروزه مشخص شده که هر دو ریاضی‌دان به‌طور مستقل به این نتایج دست یافته بودند [۲۰].

پاسکال^{۱۶}، پس از نشان دادن استعداد خود در ریاضیات، به الهیات روی آورد. اما در سال ۱۶۵۸، زمانی که از دندان‌درد شدید رنج می‌برد، با تمرکز بر منحنی چرخ‌زاد، درد او تسکین یافت. او این اتفاق را نشانه‌ای الهی دانسته و هشت روز متوالی به مطالعه‌ی این منحنی پرداخت. طی این مدت، او تقریباً تمام ویژگی‌های هندسی این منحنی را کشف و مسائل مربوط به آن را حل کرد. پاسکال در همان سال، نتایج خود را به‌شکل مسابقه‌ای مطرح نمود و جوایزی برای آن تعیین کرد [۳]. دو سؤال مسابقه عبارت بودند از:

• یافتن مساحت و مرکز ثقل ناحیه محدود به یک قوس از منحنی چرخ‌زاد و محور x ‌ها.

• تعیین حجم و مرکز ثقل جسم حاصل از دوران ناحیه مربوط به مسئله اول حول محور x و y ‌ها.

در موعد مقرر، تنها دو راه‌حل دریافت شد که یکی مربوط به ریاضی‌دان انگلیسی، والیس^{۱۷} بود. با این حال، کیفیت هیچ‌یک از پاسخ‌ها به‌اندازه کافی مطلوب نبود و هیچ‌کس برنده‌ی مسابقه نشد. والیس بعدها اشتباهات خود را تصحیح و نتایجش را منتشر کرد. پاسکال نیز راه‌حل‌های خود را در مقاله‌ای با عنوان «تاریخ منحنی چرخ‌زاد» منتشر کرد. در این مقاله، او در جریان مناقشه روبروال و توریچلی، از روبروال حمایت کرد. این موضوع باعث خشم ایتالیایی‌ها شد [۲۰].

تا دهه ۱۶۵۰، بسیاری از ریاضی‌دانان از جمله دکارت، یافتن طول قوس یک منحنی را غیرقابل حل می‌دانستند. اما معمار انگلیسی، کریستوفر رن^{۱۸}، توانست طول قوس منحنی چرخ‌زاد را محاسبه کند و آن را هشت برابر شعاع دایره مولد دانست. اگرچه رن راه‌حلی برای این محاسبه ارائه نکرد، اما به‌طور قطع شواهدی برای تأیید ادعای خود در اختیار داشت. این نتیجه برای پاسکال تازگی داشت، اما روبروال همچنان اصرار داشت که چند سال پیش از این، همین مسئله را اثبات کرده است. بعدها، والیس اثبات رن را که مبتنی بر استفاده از سری‌های بی‌نهایت بود، در رساله‌ای درباره‌ی منحنی چرخ‌زاد منتشر کرد [۳، ۲۰].

باید توجه داشت که تمامی مسائلی که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته‌اند، از جمله محاسبه‌ی مساحت قوس منحنی چرخ‌زاد توسط روبروال، معرفی مماس بر این منحنی توسط دکارت، مسائل مطرح‌شده در مسابقه‌ی پاسکال، و محاسبه‌ی طول قوس منحنی چرخ‌زاد توسط رن، همگی در ابتدا با استفاده از روش‌های هندسی حل شده‌اند. این راه‌حل‌ها نیازمند تفکر عمیق

¹⁵Evangelista Torricelli (1608-1647) ¹⁶Blaise Pascal (1623-1662) ¹⁷John Wallis (1616-1703) ¹⁸Sir Christopher Wren (1632-1723)

و بینشی خارق‌العاده بوده‌اند. با این حال، با ظهور حساب دیفرانسیل و انتگرال، چنین محاسباتی ساده‌تر شده و به‌عنوان تمرین‌هایی برای دانشجویان و علاقه‌مندان وارد کتب درسی گردیده‌اند [۳].

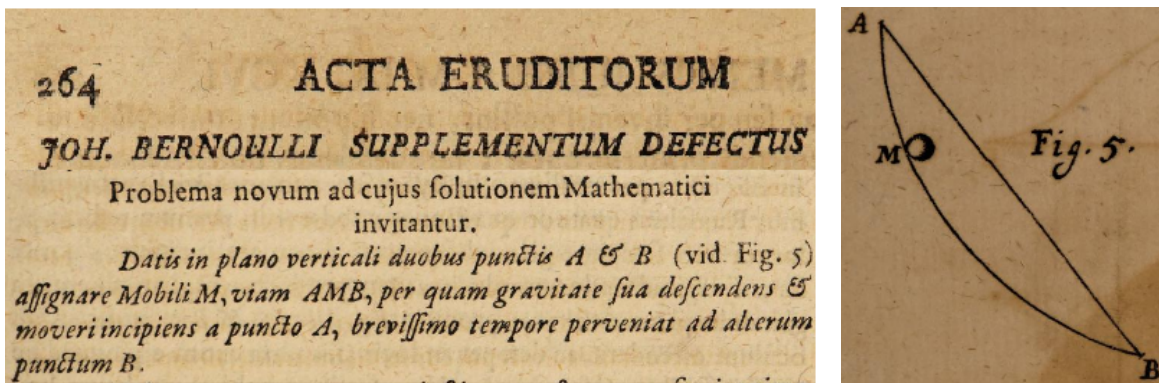
لازم به ذکر است که تلاش‌های انجام‌شده برای یافتن ویژگی‌های مختلف منحنی چرخ‌زاد توسط ریاضی‌دانان مختلف، ارتباط تنگاتنگی با تاریخچه‌ی مسأله‌ی کوتاه‌ترین زمان داشته و زمینه‌ساز پیشرفت در حوزه‌ی حساب تغییرات شده است. حساب تغییرات، به‌عنوان شاخه‌ای با قدمتی طولانی، نام خود را از اواسط قرن هجدهم گرفته است. این شاخه به بهینه‌سازی انتگرال‌ها پرداخته و با مفهومی به نام تابعک (تابع تابع) سروکار دارد [۲۶].

طبق یک افسانه‌ی قدیمی، در هنگام بنیان‌گذاری شهر فنیقی کارتاژ (واقع در محل کنونی کشور تونس)، قانونی وضع شد که هر فرد می‌توانست زمینی را که با شیار نوک گاواهن طی یک روز مشخص کند، به‌عنوان ملک خود تصاحب نماید. مسأله‌ی ریاضیاتی این روایت چنین مطرح می‌شود: اگر طول شیاری که افراد می‌توانند طی یک روز رسم کنند مشخص باشد، چه شکلی برای این شیار مساحت بیشینه را خواهد داشت؟ از منظر ریاضی، این مسأله به این صورت بیان می‌شود که در میان تمام اشکال مسطح و محدودی که طول محیط آن‌ها برابر است، کدام شکل حداکثر مساحت را دارد؟ این مسأله که با عنوان مسأله هم‌محیط‌ها^{۱۹} شناخته می‌شود، پاسخی ساده اما مهم دارد: شکلی که مساحت بیشینه را فراهم می‌کند، دایره است [۳]. راه‌حل ریاضی آن بر این اساس است که مشخص کنیم تحت یک شرط محدودکننده‌ی مشخص، انتگرال معینی حداکثر مقدار خود را به دست می‌آورد. ژاکوب برنولی^{۲۰}، معروف به ژاک اول، این مسأله را حل کرده و آن را تعمیم داد. او کسی است که با نوآوری‌های خود در هندسه‌ی تحلیلی، حساب احتمالات، و حساب تغییرات، تأثیری بی‌بدیل در پیشرفت هر یک از این حوزه‌ها داشته است [۳]. تاریخچه‌ی حساب تغییرات به‌طور جدی با مسأله‌ی کوتاه‌ترین زمان^{۲۱} پیوند خورده است. این مسأله یکی از نخستین مسائل مطرح‌شده در حساب تغییرات بوده و شامل کمینه‌کردن یک انتگرال است. همچنین، این مسأله از حاشیه‌های تاریخی جذاب و قابل‌توجهی برخوردار است.

در سال ۱۶۹۶، یوهان برنولی^{۲۲} (ژان اول) مسأله‌ی کوتاه‌ترین زمان را به‌عنوان چالشی برای تیزترین ریاضی‌دانان اروپا مطرح کرد تا توان علمی ریاضی‌دانان آلمانی-سوئسی را به جهانیان نشان دهد [۶]. این مسأله در مجله‌ی آکتا اوردیتوروم^{۲۳} (اولین نشریه‌ی علمی آلمانی) به همراه نمودار نمایش داده شده در شکل (۱) منتشر شد [۵]. شواهد تاریخی نشان می‌دهد که پیش از یوهان برنولی، گالیله^{۲۴} در کتاب گفتگوهای مربوط به دو علم جدید^{۲۵} به مطالعه‌ی این مسأله پرداخته بود. گالیله بر این باور بود که مسیر بهینه در مسأله‌ی کوتاه‌ترین زمان در امتداد مسیر دایره‌ای گذرا از نقاط مورد نظر است [۱۶]. با توجه به محاسبات انجام‌شده در این مقاله، اختلاف بین جواب گالیله و جواب بهینه مشخص شده است.

بعد از شش ماه که این مسأله ریاضی‌دانان اروپایی را به چالش کشید و هیچ پاسخی از هلند و فرانسه دریافت نشد، مسأله دوباره مطرح شد و نیوتن^{۲۶} برای اولین بار در تاریخ ۲۹ ژانویه ۱۶۹۷ از آن مطلع شده و آن را به‌طور کامل حل کرد و راه‌حل خود را بدون نام ارائه داد. یوهان برنولی، با دیدن راه‌حل بی‌نام، بلافاصله تشخیص داد که این راه‌حل متعلق به نیوتن است. او در این باره اظهار داشت [۳، ۹]: ”اگرچه نویسنده با فروتنی نام خود را فاش نکرده است، بدون شک می‌توان گفت که این راه‌حل متعلق به نیوتن است، زیرا حتی اگر هیچ اطلاعات دیگری جز این نمونه نداشتیم، او را از سبک کارش می‌شناختم، همانطور که شیر را از رد پنجه‌اش می‌شناسم^{۲۷}“. به گواه تاریخ، مسأله کوتاه‌ترین زمان به مدت یک سال توسط پنج ریاضی‌دان بزرگ آن زمان، شامل لایبنز^{۲۸}، نیوتن، هوییتال^{۲۹}، چیرنهاوس^{۳۰}، و ژاکوب و یوهان برنولی حل شد [۳۱].

¹⁹isoperimetric problem ²⁰Jacob Bernoulli (1654-1705) ²¹brachystochrone ²²Johann Bernoulli (1667-1748) ²³Acta Eruditorum ²⁴Galileo Galilei (1564-1642) ²⁵dialogues concerning two new sciences ²⁶Isaac Newton (1642-1726) ²⁷“Ah! I recognize the lion by his paw.” ²⁸Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ²⁹Guillaume de l’Hôpital (1661-1704) ³⁰Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708)



شکل ۱. طرح مسأله کوتاه‌ترین زمان در مجله آکتا اِروِدیتوروم در سال ۱۶۹۶

Figure 1: The formulation of the brachistochrone problem in Acta Eruditorum, 1696

راه‌حل‌های یوهان برنولی، نیوتن، ژاکوب برنولی و لایبنیتز در سال ۱۶۹۷ منتشر گردید، اما راه‌حل هوپیتال تا سال ۱۹۸۸ چاپ نشد.

لازم به ذکر است که ارائه‌ی سریع راه‌حل توسط نیوتن، توانمندی فکری بالای او را نشان می‌دهد، در حالی که یوهان برای حل این مسأله دو هفته وقت صرف کرده بود [۸]. البته راه‌حل یوهان ظریف‌تر از راه‌حل پیچیده و کلی ژاکوب بود. این مسأله سرآغاز نزاع تنیدی بین دو برادر گردید که چندین سال ادامه یافت. بحث آن‌ها در اغلب موارد به ناسازگویی شدید و حتی مشاجره در ملاء عام کشیده می‌شد [۴۱].

از دیگر جنبه‌های برجسته در تاریخ حساب تغییرات، می‌توان به عملکرد درخشان اویلر^{۳۱} اشاره کرد [۳]. اویلر که همواره با جوانمردی درباره‌ی آثار دیگران قضاوت می‌کرد، در مواجهه با رقیب جوان خود، لاگرانژ^{۳۲}، نمونه‌ای شایسته از گذشت و بی‌غرضی علمی را به نمایش گذاشت. هنگامی که لاگرانژ در سن نوزده سالگی برخی از آثار خود را برای اویلر ارسال کرد، اویلر به سرعت ارزش آن‌ها را درک کرده و وی را تشویق به ادامه‌ی کار نمود.

چهار سال بعد، لاگرانژ روش خود برای حل مسأله‌ی هم‌محیط‌ها را برای اویلر ارسال کرد. اویلر که تا آن زمان نتوانسته بود مسائل مشابه را با روش نیمه‌هندسی خود حل کند، در نامه‌ای به لاگرانژ نوشت که روش نوین او توانسته است مشکلات زیادی را در این زمینه برطرف کند. اویلر با جوانمردی علمی، انتشار راه‌حل خود را که مدت‌ها در جستجوی آن بود، به تأخیر انداخت تا ابتدا لاگرانژ بتواند یافته‌هایش را منتشر کند. او در این باره نوشت: «نمی‌خواستم او را از حقوقی که در افتخار کشف این موضوع دارد، محروم کنم» [۳].

روش‌های اویلر و لاگرانژ در حل این مسائل، پایه و اساس مبنای تحلیلی جدیدی شد که به معرفی معادله اویلر-لاگرانژ انجامید. این معادله به‌عنوان ابزار اصلی در حساب تغییرات مطرح شد و بعدها به‌طور گسترده برای حل مسائل مختلف در این حوزه به‌کار گرفته شد. به نوعی می‌توان اویلر و لاگرانژ را پایه‌گذاران روش‌های نوین حل مسائل کنترل بهینه دانست؛ چراکه مقاله‌های آن‌ها رویکردی اساسی و ماندگار برای حل این دسته از مسائل ارائه داد [۱۳].

حساب تغییرات به‌عنوان یکی از شاخه‌های مهم و پرکاربرد علوم ریاضی، علاوه بر داشتن تاریخچه‌ای جذاب و غنی، همچنان در حال توسعه است و ظهور دستاوردهای جدید در این زمینه دور از انتظار نیست. این حوزه نقش اساسی در پیشبرد مسائل کنترل بهینه داشته است. هدف در مسائل کنترل بهینه، هدایت سیستم‌ها به گونه‌ای است که یک تابع هدف مشخص، بیشینه یا کمینه شود. از کاربردهای برجسته این شاخه می‌توان به کنترل پرواز هواپیماها، مدیریت تولید برق و کنترل حرکت ربات‌ها اشاره کرد؛ این موارد، نمونه‌هایی از دستاوردهای عملی حساب تغییرات هستند.

³¹Leonhard Euler (1701-1783) ³²Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

در بین منابع فراوان علمی در حوزه حساب تغییرات، برخی محققان به مرور تاریخی مسأله کوتاه‌ترین زمان و توسعه حساب تغییرات پرداخته‌اند، که این مطالعات ریشه در مشارکت‌های برجسته‌ی ریاضی‌دانانی چون برادران برنولی، نیوتن، لایبنیتز، اویلر، لاگرانژ، ژاکوبی^{۳۳}، وایرستراس^{۳۴}، هیلبرت^{۳۵} و دیگران دارند (نظیر منابع [۱۷، ۲۴]). با توجه به تاریخچه طولانی مسأله کوتاه‌ترین زمان و حساب تغییرات، و به دلیل کاربردهای گسترده و متنوع آن‌ها، این مباحث همواره مورد توجه محققین قرار گرفته و تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است [۷، ۱۸]. در مقاله [۱۰] نویسندگان مسأله کوتاه‌ترین زمان را به‌عنوان یک منحنی پارامتری در فضای سه‌بعدی مدل کرده و مبنای روش پیشنهادی خود را تحلیل کرده‌اند. همچنین، مقاله [۱] یک روش جدید برای حل مسأله کوتاه‌ترین زمان معرفی کرده است که با استفاده از فرآیند فیزیکی جامدات برای ساخت شبکه‌ای با واحد سلول و عامل تبدیل، خطای کمی نسبت به جواب بهینه دارد. در منبع [۴] محققان با گسترش مسأله کوتاه‌ترین زمان، کاربرد عملی آن را در یافتن مسیر بهینه برای دوچرخه‌سوار (به‌عنوان ذره متحرک) در پیست دوچرخه‌سواری بررسی کرده‌اند. در مقاله [۳۲] گسترش آتش‌سوزی در امتداد مسیر کوتاه‌ترین زمان مورد بررسی قرار گرفته و مقایسه‌ای با سایر مسیرهای محتمل انجام شده است. همچنین، در منبع [۱۱] یک بسته آموزشی برای مسأله کوتاه‌ترین زمان ایجاد و نتایج تجربی این مدل ارائه گردیده است. علاوه بر این، در مقاله [۴۰] مفهوم مکان هندسی که یکی از مباحث مهم هندسه دوره متوسطه است، بررسی شده و روش رسم منحنی چرخ‌زاد به‌عنوان نمونه‌ای از مکان‌های هندسی معرفی گردیده است.

مقاله حاضر با بخش مقدمه آغاز می‌شود که در آن به معرفی کلی مسأله کوتاه‌ترین زمان و تاریخچه‌ای از تحولات مهم در زمینه حساب تغییرات پرداخته می‌شود. در بخش ۲ منحنی چرخ‌زاد معرفی شده و برخی ویژگی‌های آن بررسی می‌شود. بخش ۳ به معرفی مباحث پایه‌ای حساب تغییرات و معادله اویلر-لاگرانژ اختصاص دارد که به عنوان ابزارهای کلیدی در تحلیل مسائل این حوزه محسوب می‌شود. در بخش ۴ مسأله کوتاه‌ترین زمان به‌عنوان یکی از مسائل کلاسیک حساب تغییرات معرفی شده و اصول اولیه آن مطرح می‌شود. بخش ۵ به بررسی روش‌های مختلف حل مسأله کوتاه‌ترین زمان پرداخته است. در بخش ۶، به یافتن جواب تحلیلی مسأله کوتاه‌ترین زمان به‌صورت منحنی چرخ‌زاد پرداخته می‌شود. بخش ۷ با ارائه رویه‌هایی در نرم‌افزار میپل به تحلیل مسأله کوتاه‌ترین زمان در امتداد مسیرهای مختلف اختصاص دارد و پاسخ این مسئله در شرایط متنوع تحلیل می‌شود. مقاله با نتیجه‌گیری و بررسی‌های نهایی در بخش ۸ ادامه می‌یابد. در نهایت، پیوست آ به برنامه‌های کامپیوتری و کدهای مربوط به حل مسأله کوتاه‌ترین زمان با استفاده از نرم‌افزار میپل پرداخته است.

۲. منحنی چرخ‌زاد

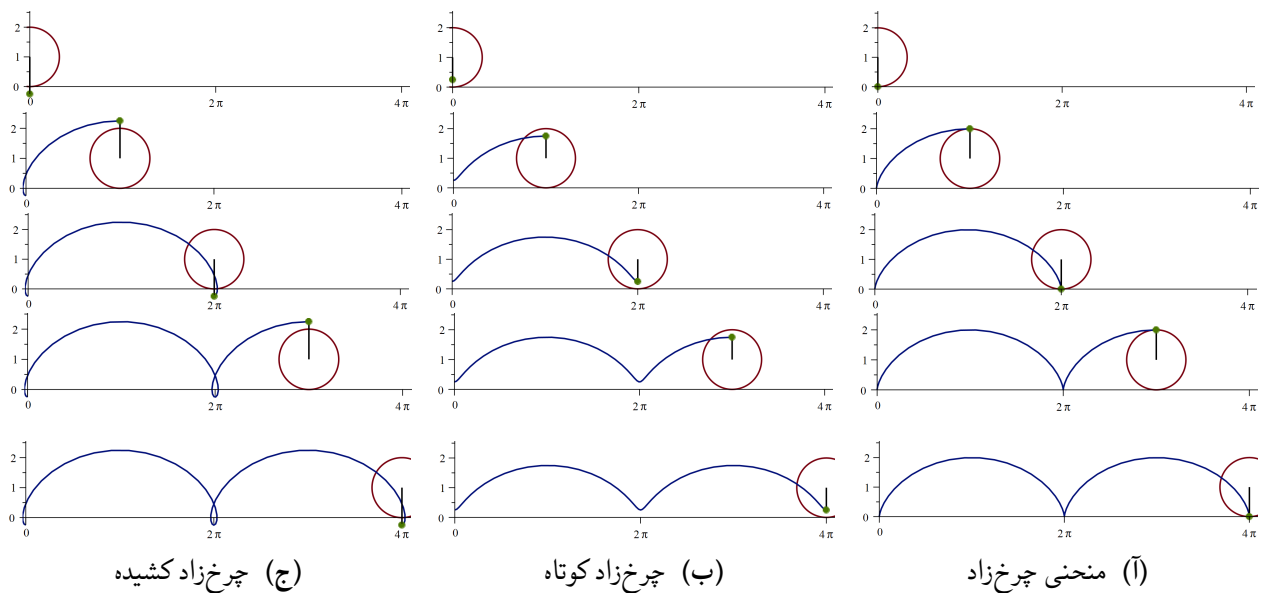
چرخ حدود ۳۰۰۰ سال قبل از میلاد اختراع شد، اما اولین اشاره به منحنی‌ای که توسط یک نقطه روی دایره متحرک ایجاد می‌شود، در سال ۱۵۰۱ میلادی ظاهر گردید [۳۴]. این منحنی به‌عنوان «مکان هندسی حاصل از حرکت یک نقطه از یک چرخ یا دایره که بر روی مسیر مستقیم (خط راست) غلتش محض انجام می‌دهد» تعریف می‌شود. منحنی چرخ‌زاد به دلیل زیبایی ظاهری، ویژگی‌های ساده و جذاب، و همچنین رقابت‌های مداومی که میان ریاضی‌دانان برای کشف ویژگی‌های آن وجود داشت، به نام «هلن هندسه» شهرت یافته است [۳، ۲۰]. این نام به افتخار یکی از شخصیت‌های مشهور یونانی، هلن، انتخاب شده است؛ شخصیتی که علاوه بر زیبایی، موجب منازعات و جنگ‌های فراوانی گردید [۲۰]. گالیله در سال ۱۶۴۰ این منحنی را «سیکلوئید» نامید که از واژه یونانی به معنای دایره‌مانند گرفته شده است. او ادعا کرد که بیش از پنجاه سال به این منحنی فکر کرده است. اگرچه ممکن است منحنی چرخ‌زاد سال‌ها قبل از گالیله کشف شده باشد، اما هیچ مدرکی دال بر تأیید آن وجود ندارد. به‌طور معمول این منحنی با استفاده از معادلات پارامتری نمایش داده می‌شود و مکان هندسی

³³Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) ³⁴Karl Weierstrass (1815-1897) ³⁵David Hilbert (1862-1943)

نقاطی است که از حرکت یک چرخ یا دایره در صفحه به دست می‌آید، همانطور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود. این منحنی را می‌توان به عنوان مسیر حرکت سنگ‌ریزه‌ای تصور کرد که به شیار لاستیک یک اتومبیل در حال حرکت چسبیده است [۲۸]. فرض کنید شعاع دایره غلتانی که در امتداد خط $y = 0$ حرکت می‌کند، برابر با a باشد و فاصله نقطه‌ای از محیط دایره تا مرکز آن برابر با h باشد. در این شرایط، معادله پارامتری منحنی چرخ‌زاد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(1) \quad \begin{cases} x = at + h \sin t, \\ y = a - h \cos t, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty.$$

در معادله (۱) به سه حالت مختلف می‌توان اشاره نمود. ابتدا حالتی در نظر گرفته شده که نقطه مفروض روی محیط دایره قرار دارد (یعنی $h = a$ است) که در این حالت منحنی چرخ‌زاد معمولی حاصل می‌شود (مانند شکل (۱۲)). حالت دوم وقتی است که نقطه مفروض P داخل دایره (یعنی $h < a$) باشد که منحنی یک چرخ‌زاد کوتاه^{۳۶} به دست آمده (مانند شکل (۲ب)) و سومین حالت وقتی است که نقطه مفروض P خارج از دایره با فرض $h > a$ در نظر گرفته شده که منحنی یک چرخ‌زاد کشیده^{۳۷} حاصل خواهد شد (مانند شکل (۲ج)).



شکل ۲. مسیر حرکت منحنی سه چرخ‌زاد مختلف با فرض $a = 1$ و مقادیر مختلف h

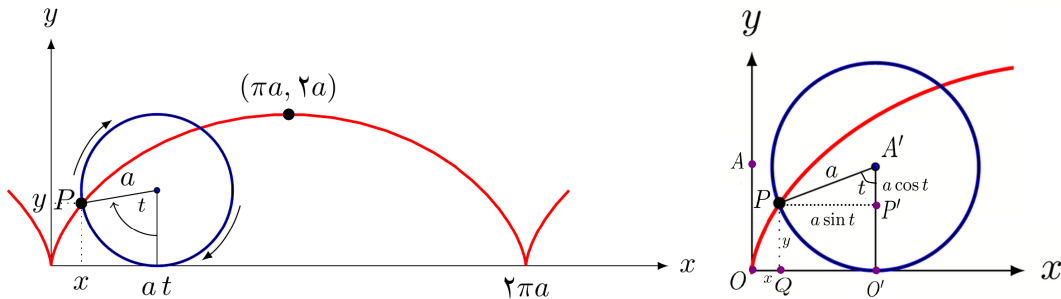
Figure 2: Trajectories of three different cycloidal curves assuming $a = 1$ and varying values of h

منحنی چرخ‌زاد خواص قابل توجه‌ای هم از لحاظ هندسی و هم از جنبه فیزیکی دارد که در این بخش به برخی از آن‌ها اشاره خواهد شد.

در ادامه برای یافتن معادله منحنی چرخ‌زاد، دایره‌ای به شعاع a که در امتداد یک خط مستقیم افقی بدون لغزش می‌غلتد، در نظر گرفته شده است. بدین منظور منحنی پیموده شده توسط یک نقطه ثابت از محیط دایره مانند نقطه $P(x, y)$ به دست آورده می‌شود. لازم به ذکر است خط مستقیم افقی را محور x در نظر گرفته و زاویه‌ی حاصل از تغییر موضع نقطه مفروض

³⁶curtate cycloid ³⁷prolate cycloid

دایره از جابجایی از مبدا O به نقطه P مطابق شکل (۲) با t نشان داده شده است. در این صورت منحنی پیموده شده توسط نقطه P منحنی چرخزاد است، که به صورت زیر بیان می‌شود [۲۸، ۳۰، ۳۳]:



شکل ۳. موقعیت یک نقطه از محیط دایره (نقطه P) در مسیر تشکیل منحنی چرخزاد

Figure 3: The position of a point on the circumference of a circle (point P) during the formation of a cycloidal curve

$$(۲) \quad \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

باید توجه داشت که منحنی چرخزاد، نشان دهنده‌ی نمودار یک تابع به شکل $y = f(x)$ است، که دارای دوره تناوب اصلی برابر با محیط دایره یعنی $2\pi a$ است و در هر نقطه از مجموعه $x = \{2r\pi a | r \in \mathbb{Z}\}$ داری مماس قائم یا نقطه بازگشتی است. به علاوه برای $r \in \mathbb{Z}$ هر قوس منحنی چرخزاد بر بازه $t \in [(r-1)a\pi, r\pi]$ با ضابطه‌ی $x = g(y)$ قابل نمایش است، به عنوان نمونه این تابع در بازه $0 \leq t \leq \pi$ دارای معادله‌ای به صورت زیر است:

$$x(y) = \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

شایان ذکر است، نمایش منحنی چرخزاد به شکل پارامتری با استفاده از توابع مثلثاتی، نسبت به هر دو شکل معادل $y = f(x)$ و $x = g(y)$ آسان‌تر است و حذف پارامتر از معادلات آن کارایی لازم را نخواهد داشت.

نتیجه ۱.۲. با توجه به نمایش پارامتری (۲) می‌توان نتیجه گرفت که منحنی تمام چرخزادها با یکدیگر متشابه هستند [۹].

۱.۲ ویژگی‌های منحنی چرخزاد. همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، منحنی چرخزاد نخستین بار در سال ۱۵۰۱ در متون علمی مطرح گردید. گالیله پیشنهاد داد که طاق پل‌ها به شکل این منحنی ساخته شود، و با پیشرفت فناوری بتن مسلح، بسیاری از پل‌ها بر اساس این طراحی شکل گرفتند [۳]. جالب است که به دلایلی مرتبط با اصول مکانیک و مقاومت مصالح، که در زمان گالیله ناشناخته بود، قوس چرخزاد به عنوان گزینه‌ای بسیار مناسب شناخته می‌شود. به عنوان نمونه، جیمز اسکس^{۳۸} در سال ۱۷۶۹ با الهام از این منحنی، پلی را بر روی رودخانه کم^{۳۹} در محوطه کالج ترینیتی، کمبریج^{۴۰} طراحی و ساخت [۱۲]. در ادامه، برخی از ویژگی‌های برجسته و خواص جالب منحنی چرخزاد توصیف می‌شوند. این بخش با معرفی مفاهیم اساسی مرتبط با اجزای این منحنی آغاز شده و سپس به تشریح سایر ویژگی‌های آن پرداخته می‌شود، در حالی که تلاش شده است نکات تاریخی مرتبط نیز ارائه گردد.

³⁸James Essex (1722–1784) ³⁹River Cam ⁴⁰Trinity College, Cambridge

- **قاعده منحنی چرخ‌زاد:** به فاصله افقی بین دو نقطه متوالی از محل تلاقی منحنی چرخ‌زاد با محور x ، قاعده منحنی چرخ‌زاد گفته می‌شود. این فاصله برابر با محیط دایره مولد، یعنی برای دایره‌ی مولدی به شعاع a برابر با $2\pi a$ ، است (شکل (۲) را ملاحظه نمائید).
- **ارتفاع منحنی چرخ‌زاد:** به اختلاف ارتفاع بین بالاترین و پایین‌ترین نقطه منحنی چرخ‌زاد، ارتفاع منحنی گفته می‌شود. این فاصله برابر با قطر دایره مولد منحنی چرخ‌زاد، یعنی برای دایره‌ی مولدی به شعاع a برابر با $2a$ ، است (شکل (۲) را ملاحظه نمائید).
- **المان طول قوس منحنی چرخ‌زاد:** المان طول قوس ds برای منحنی چرخ‌زاد به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(۳) \quad ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{4a^2 \sin^2\left(\frac{t}{\rho}\right)} dt = 2a \sin\left(\frac{t}{\rho}\right) dt.$$

- **شعاع انحنای منحنی چرخ‌زاد:** شعاع انحنای منحنی چرخ‌زاد دو برابر فاصله $|PO'|$ در شکل (۳) است که از این فاصله به عنوان شعاع دوران نقطه‌ی P یاد می‌شود و به ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$|PO'| = \sqrt{(a \sin t)^2 + (a - a \cos t)^2} = a\sqrt{2 - 2 \cos t} = a\sqrt{4 \sin^2\left(\frac{t}{\rho}\right)} = 2a \sin\left(\frac{t}{\rho}\right).$$

انحنای منحنی چرخ‌زاد را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

اکنون با توجه به رابطه‌ی $\kappa = \frac{1}{\rho}$ می‌توان شعاع انحنای منحنی چرخ‌زاد را به صورت زیر به دست آورد:

$$\rho = \frac{(a^2(1 - \cos t))^2 + a^2 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}{a^2 \sin^2 t - a^2 \cos t(1 - \cos t)} = \frac{(2a^2 - 2a^2 \cos t)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1 - \cos t)} =$$

$$a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} = a\sqrt{2}\sqrt{2 \sin^2\left(\frac{t}{\rho}\right)} = 4a \sin\left(\frac{t}{\rho}\right) = 2|PO'|.$$

- **سرعت خطی نقطه روی منحنی چرخ‌زاد:** باید توجه داشت که سرعت خطی نقطه‌ی P در شکل (۳) از رابطه $V_P = \omega|PO'|$ حاصل می‌شود که در آن $\omega = \frac{dt}{dt}$ سرعت زاویه‌ای دایره مولد منحنی چرخ‌زاد است. این رابطه نتیجه ترکیب دو مؤلفه‌ی سرعت چرخشی و سرعت انتقالی است که نقطه P هنگام غلتش دایره روی خط راست تجربه می‌کند و به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$V_P = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{(at'(1 - \cos t))^2 + (at' \sin t)^2} = aw\sqrt{2(1 - \cos t)} = w|PO'|,$$

لازم به ذکر است که همواره سرعت V_P مماس بر مسیر منحنی چرخ‌زاد و عمود بر PO' است و مرکز انحنای این منحنی در امتداد همین پاره‌خط قرار دارد.

از بین اشخاص مشهوری که این منحنی را مورد مطالعه قرار داده می‌توان به سر کریستوفر ورن، معمار کلیسای بزرگ سنت پل^{۴۱} در لندن، اشاره نمود. او در سال ۱۶۵۸ برای اولین بار نشان داد طول یک قوس کامل از منحنی چرخ‌زاد (۲) که با دایره‌ای به شعاع a تشکیل شده، ۸ برابر شعاع دایره تشکیل دهنده‌ی آن یعنی برابر با $8a$ است (مراجع [۱۲] و [۳]). برای به دست آوردن این نتیجه، از فرمول محاسبه طول قوس منحنی پارامتری C به صورت زیر استفاده،

$$(۴) \quad l = \int_C ds.$$

⁴¹St. Paul's Cathedral

و با جای‌گذاری (۲) در (۴) با فرض $t_0 = 0$ و $t_1 = 2\pi$ داریم:

$$l = \int_C ds = 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) dt = -\sqrt{2}a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

نتیجه ۲.۲. طول منحنی چرخزاد، چهار برابر قطر دایره مولد آن است و با تقسیم محیط آن به محیط دایره مولد، نسبت $\frac{l}{4\pi} \approx 1.27$ حاصل می‌شود؛ به عبارتی محیط منحنی چرخزاد تقریباً به میزان $1/27$ بار از محیط دایره به شعاع a که در ساختن منحنی چرخزاد به‌کار رفته بزرگتر است. این بدان معناست که به ازای هر کیلومتر طی شده توسط یک اتومبیل، سنگریزه چسبیده به شیار لاستیک، مسافتی حدود $273/2 \approx 1000 \times (1 - \frac{1}{27})$ متر را بدون توجه به اندازه لاستیک، بیشتر طی می‌نماید.

یکی دیگر از ماجراجویی‌های محاسباتی در خصوص منحنی چرخزاد، محاسبه مساحت ناحیه‌ی محدود به یک قوس از این منحنی بود. به نظر می‌رسد که گاليله این نتیجه را حدس زده بود ولی اولین بار روبروال فرانسوی و توریچلی ایتالیایی آن را ثابت کرده‌اند [۲۵]. مسأله به این شکل مطرح می‌شود که، مساحت ناحیه محدود به یک قوس کامل از منحنی چرخزاد (۲) که با دایره‌ای به شعاع a تشکیل شده و محور x ها، ۳ برابر مساحت دایره تشکیل دهنده‌ی آن یعنی برابر با $3\pi a^2$ است. برای به‌دست آوردن این نتیجه، با توجه به اینکه مساحت ناحیه محدود به یک منحنی پارامتری و محور x ها به ازای $t \in [t_0, t_1]$ از رابطه،

$$(5) \quad s = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt,$$

به‌دست می‌آید که با جای‌گذاری (۲) در (۵) و با فرض $t_0 = 0$ ، $t_1 = 2\pi$ و $a > 0$ می‌توان نتیجه زیر را به‌دست آورد:

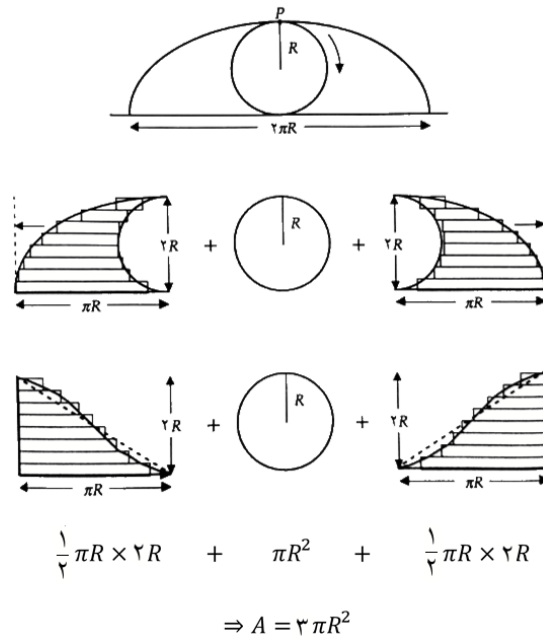
$$s = \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \right) dt = 3a^2\pi.$$

با استفاده از قضیه مماس روبنده مامیکن^{۴۲}، می‌توان این نتیجه را که از ویژگی‌های حرکت دایره مولد و تقارن هندسی منحنی چرخزاد حاصل می‌شود، را به‌دست آورد [۴۲].

محاسبه مساحت ناحیه‌ی محدود به یک قوس از منحنی چرخزاد در سال ۱۹۹۳ در قالب یک «اثبات بدون کلام» در شماره ۶۶ مجله متمیکس مگزین^{۴۳} به شرح شکل (۴) به اثبات رسید [۲]. لازم به ذکر است در سال ۱۹۷۳ مجله ساینترفیک آمریکن^{۴۴}، از اثبات‌های بدون کلام استفاده و به این موضوع اشاره کرد که در بسیاری از حالت‌ها می‌توان یک اثبات کسالت‌آور را با یک شبیه‌سازی هندسی چنان به سادگی و زیبایی تکمیل کرد که درستی قضیه در یک نگاه دیده شود. انتشارچنین اثبات‌هایی از سال ۱۹۷۵ در مجله متمیکس مگزین آغاز و به بخش منظمی تبدیل شد [۲۳].

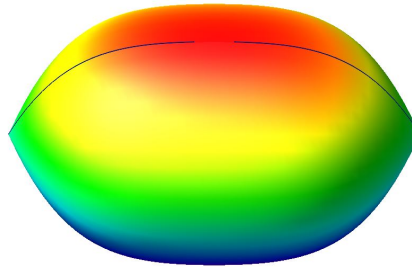
همانطور که پیش از این گفته شد، در سال ۱۶۵۸ پاسکال به مدت هشت روز متوالی مشغول مطالعه در خصوص خواص هندسی منحنی چرخزاد شد. وی در این مدت توانست بسیاری از مسائل مربوط به این منحنی را کشف و حل نماید که محاسبه طول قوس و مساحت منحنی چرخزاد از آن جمله هستند. به‌علاوه وی به محاسبه مساحت و حجم جسم حاصل از دوران یک قوس کامل از منحنی چرخزاد پرداخت و مرکز گرانش این منحنی را پیدا نمود [۳] که در ادامه به محاسبه این موارد پرداخته شده است. ابتدا نشان داده می‌شود که مساحت و حجم جسم حاصل از دوران یک قوس کامل از منحنی چرخزاد (۲) که با دایره‌ای به شعاع a تشکیل شده حول محور x ها (که مطابق شکل (۵) شبیه به توپ راگیبی است) به ترتیب برابر با $\frac{64}{3}\pi a^2$ و $5\pi^2 a^3$ است [۲۸].

⁴²Mamikon's sweeping-tangent theorem ⁴³mathematics magazine ⁴⁴scientific american



شکل ۴. اثبات بدون کلام مساحت زیر یک قوس منحنی چرخزاد با دایره مولدی به شعاع R

Figure 4: Proof without words of the area under a cycloidal arc generated by a circle of radius R



شکل ۵. جسم حاصل از دوران یک قوس منحنی چرخزاد حول محور x ها

Figure 5: The solid formed by rotating a cycloidal arc about the x -axis

باید توجه داشت که مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی پارامتری در بازه‌ی $t \in [t_0, t_1]$ حول محور x از رابطه (۶) به دست می‌آید:

$$(۶) \quad S = 2\pi \int_C y(t) ds.$$

با جای‌گذاری (۳) در (۶) و با فرض $t_0 = 0$ و $t_1 = 2\pi$ داریم:

$$(۷) \quad S = 2\pi \int_C y(t) ds = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos(t)) \left(2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

همچنین از آنجایی که حجم جسم حاصل از دوران یک منحنی حول محور x به ازای $t \in [t_0, t_1]$ از رابطه،

$$(۸) \quad V = \pi \int_{t_0}^{t_1} y^2(t)x'(t)dt,$$

به دست می آید، می توان با جای گذاری (۲) در (۸) و با فرض $t_0 = 0$ و $t_1 = 2\pi$ نتیجه زیر را به دست آورد:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t)x'(t)dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^3 dt = 5\pi^2 a^3.$$

در ادامه چند خاصیت کاربردی دیگر از منحنی چرخزاد بررسی گردیده است. لازم است به این نکته توجه داشته باشیم که گشتاور اول جرمی^{۴۵} (ممان استاتیکی^{۴۶} یا گشتاور ایستائی) یک جسم اطلاعاتی در مورد تعادل و گشتاوری که در یک میدان گرانشی حول محورهای مختلف به جسم وارد می شود، نتیجه می دهد. فرمول مربوط به محاسبه گشتاور اول جرمی به ترتیب حول محورهای مختصات x و y برای سیم یا میله ی نازکی که روی خم همواری چون C قرار دارند به ترتیب زیر به دست می آیند که در آن ρ چگالی جرم توزیع شده در واحد طول و در امتداد منحنی مورد نظر است [۳۷]، [۳۸] و [۳۰]:

$$(۹) \quad M_x = \int_C \rho y(t)ds, \quad M_y = \int_C \rho x(t)ds,$$

به علاوه مختصات مرکز جرم^{۴۷} یا مرکز ثقل منحنی^{۴۸} هر منحنی از رابطه زیر به دست می آید [۳۷]، [۳۸] و [۳۰]:

$$(۱۰) \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right),$$

که در آن $M = \int_C \rho ds$ جرم یک میله نازک است. می توان نشان داد که گشتاور اول جرمی یک قوس کامل از منحنی چرخزاد (۲) که با دایره ای به شعاع a تشکیل شده حول محور x و y به ترتیب $\frac{32}{3}a^2$ و $8\pi a^2$ و مختصات مرکز جرم یا مرکز ثقل یک قوس کامل از این منحنی چرخزاد به صورت $(\pi a, \frac{4}{3}a)$ است.

گشتاور اول جرمی منحنی چرخزاد حول محور x و y با جای گذاری (۲) در (۹) و با فرض $t_0 = 0$ و $t_1 = 2\pi$ و $\rho = 1$ مشابه رابطه (۷) به ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$(۱۱) \quad M_x = \int_C \rho y(t)ds = 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t)) \left(\sin\left(\frac{t}{3}\right) \right) dt = \frac{32}{3}a^2,$$

$$M_y = \int_C \rho x(t)ds = 2a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin(t)) \left(\sin\left(\frac{t}{3}\right) \right) dt = 8\pi a^2.$$

با استفاده از نتایج فوق می توان مختصات مرکز جرم یا مرکز ثقل یک قوس کامل از منحنی چرخزاد (۲) را به دست آورد. برای محاسبه این مقادیر با جای گذاری (۱۱) در (۱۰) می توان نتیجه زیر را به دست آورد:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{8\pi a^2}{8\pi a^2} = \pi a,$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{32}{3}a^2}{8\pi a^2} = \frac{4}{3}a,$$

بنابراین مرکز ثقل منحنی چرخزاد به صورت $(\pi a, \frac{4}{3}a)$ است، که در آن M به توجه به تساوی $\rho = 1$ ، برابر با $8\pi a$ قرار گرفته است.

⁴⁵first moment of mass ⁴⁶statistical moment ⁴⁷center of mass ⁴⁸center of gravity

در ادامه، گشتاور دوم جرمی^{۴۹} (ممان اینرسی جرمی^{۵۰} یا لختی دورانی) منحنی چرخزاد بررسی شده است. این مفهوم بدین ترتیب است که اگر جرمی حول یک محور مشخص دوران داشته باشد، به میزان انرژی جنبشی ذخیره شده در آن علاقمند بوده یا می‌خواهیم بدانیم اگر جسم سرعت زاویه‌ای خاصی داشته باشد، چقدر انرژی جنبشی می‌تواند تولید کند. این اطلاعات در گشتاور دوم نهفته است که فرمول‌های مربوط به آن برای سیم یا میله‌ی نازکی که روی خم همواری چون C قرار دارد به ترتیب زیر به دست می‌آیند که در آن چگالی جرمی توزیع شده در امتداد منحنی مورد نظر است [۳۷]، [۳۸] و [۳۰]. لازم به ذکر است که ممان اینرسی جرمی برای محاسبه‌ی شتاب زاویه‌ای جسمی که حول یک محور ثابت دوران می‌کند، کاربرد دارد. گشتاور دوم جرمی یک منحنی حول محور x و y به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(۱۲) \quad I_x = \int_C \rho y^2(t) ds, \quad I_y = \int_C \rho x^2(t) ds,$$

نشان داده می‌شود که گشتاور دوم جرمی یک قوس کامل از منحنی چرخزاد (۲) که با دایره‌ای به شعاع a تشکیل شده حول محور x و y مضاربی از a^3 هستند.

می‌توان گشتاور دوم جرمی یک منحنی به شکل منحنی چرخزاد را حول محور x و y را با جای‌گذاری (۳) در (۱۲) و با فرض $t_0 = 0$ ، $t_1 = 2\pi$ و $\rho = 1$ را مشابه (۷) به ترتیب زیر محاسبه نمود:

$$I_x = \int_C \rho y^2(t) ds = 2a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt = 8a^3 \int_0^{2\pi} \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^5 dt = \frac{256}{15} a^3,$$

$$I_y = \int_C \rho x^2(t) ds = 2a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin(t))^2 \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt = \left(16\pi^2 - \frac{2048}{45}\right) a^3,$$

که هر دو مضاربی از a^3 هستند.

مثال قابل ذکر دیگر از این منحنی، الگوی منحنی فضایی مسیر ذره‌ای بارداری با بار مثبت در میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی B که بر یکدیگر عمود هستند، با رابطه‌ی زیر است:

$$\vec{r}(t) = (t - \sin(t)) \vec{i} + (1 - \cos(t)) \vec{j} + t \vec{k},$$

در واقع بر حسب این‌که سرعت اولیه‌ی ذره‌ی مورد نظر در مبدأ چقدر است، مسیر این ذره یک منحنی فضایی مطابق شکل (۶) است که تصویر آن بر صفحه‌ی افقی به شکل منحنی چرخزاد، منحنی چرخزاد کشیده یا منحنی چرخزاد کوتاه است [۳۰].



شکل ۶. حرکت ذره‌ی بارداری با بار مثبت در میدان‌های متعامد الکتریکی و مغناطیسی

Figure 6: Motion of a positively charged particle in orthogonal electric and magnetic fields

⁴⁹second moment ⁵⁰moment of inertia

۳. حساب تغییرات و معادله اویلر-لاگرانژ

بعد از معرفی حساب دیفرانسیل توسط نیوتن و لایبنیتز در قرن هفدهم، حساب تغییرات و در پی آن مسائل کنترل بهینه پدید آمدند. در حساب دیفرانسیل، مسائلی مطرح می‌شوند که هدف آن‌ها یافتن مقادیری از متغیرهای مستقل است که منجر به کمینه یا بیشینه شدن توابع وابسته شوند. اما در حساب تغییرات، مسأله اساسی یافتن روش‌هایی برای حل مسائلی است که مجهول در آن‌ها یک یا چند تابع است، نه صرفاً مقادیر عددی. در این حوزه، هدف یافتن تابع یا توابعی است که انتگرال معین شامل آن‌ها، کمینه یا بیشینه شود.

در این بخش، شکل کلی مسأله حساب تغییرات و مفاهیم مرتبط با آن معرفی می‌شوند. به طور خاص، هدف از حل این مسائل، یافتن منحنی $y = y(x)$ است که تحت شرایط خاصی روی $y(x_0)$ و $y(x_1)$ ، مقدار انتگرال زیر را کمینه یا بیشینه کند:

$$(۱۳) \quad J[y] = \int_{x_0}^{x_1} L\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx,$$

که در آن $L\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ یک تابع حقیقی مقدار با سه متغیر حقیقی است و به آن تابع انتگرالده تغییراتی^{۵۱} گفته می‌شود. لازم به ذکر است که تابع (۱۳) در مسائل حساب تغییرات و کنترل بهینه، شاخص عملکرد^{۵۲} یا تابع هزینه^{۵۳} نامیده می‌شود. این تابع معیاری برای ارزیابی کیفیت یا مطلوبیت عملکرد یک سیستم دینامیکی در طول زمان است که معمولاً به صورت یک انتگرال از متغیرهای سیستم تعریف می‌شود. هدف اصلی آن، کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی مقدارهایی نظیر هزینه، زمان، انرژی یا سود به گونه‌ای است که رفتار بهینه سیستم تحت شرایط مشخص حاصل شود. در مسائل حساب تغییرات، شرایط مرزی $y(x_0) = y_0$ و $y(x_1) = y_1 \in M$ برقرار است و فرض می‌شود که x_0, x_1 و $y_0 \in \mathbb{R}^n$ دارای مقادیر ثابت باشند و M زیرمجموعه‌ای بسته از فضای \mathbb{R}^n باشد. اگر $M = \{y_1\}$ ، نقطه انتهایی به صورت نقطه ثابت (x_1, y_1) در نظر گرفته شده و به این ترتیب ساده‌ترین مسأله در حساب تغییرات حاصل می‌شود. در مقابل، اگر $M = \mathbb{R}^n$ باشد، نشان‌دهنده نبود هیچ محدودیتی بر $y(x_1)$ است [۱۵].

باید توجه داشت که در مسائل حساب تغییرات، نقاط (x_0, y_0) و (x_1, y_1) همیشه ثابت نیستند و ممکن است متعلق به یک زیرمجموعه بسته از فضای \mathbb{R}^n باشند. به عبارتی، در حالت خاص هدف این است که منحنی $y(x)$ ضمن کمینه (یا بیشینه) کردن تابع (۱۳)، نقطه ثابت (x_0, y_0) را به نقطه ثابت (x_1, y_1) وصل کند. برای فرمول‌بندی ساده‌ترین مسأله در حساب تغییرات، مشتقات جزئی L با $L_x, L_y, L_{y'}$ نشان داده می‌شوند. همچنین L از کلاس C^r است اگر تمامی مشتقات جزئی آن تا مرتبه r پیوسته باشند. از این پس فرض می‌کنیم که L حداقل از کلاس C^2 باشد.

حل کامل این مسائل شامل یافتن شرایط لازم و کافی برای منحنی $y = y^*(x)$ است، به طوری که در میان تمام توابع پیوسته‌ای که نقطه ابتدایی (x_0, y_0) را به نقطه انتهایی (x_1, y_1) وصل می‌کنند، به تابع $J[y]$ مقدار کمینه (یا بیشینه) تخصیص داده شود. با بررسی شرایط حاکم بر مسأله، اولین شرط لازم برای یک کمینه موضعی ضعیف^{۵۴} تحت قضیه زیر قابل دستیابی است.

قضیه ۱.۳. برای این که $y = y^*(x)$ یک جواب مسأله (۱۳) در رده‌ی توابع C^2 باشد، لازم است که در هر نقطه از این منحنی، شرط زیر را برقرار نماید:

$$(۱۴) \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0.$$

⁵¹variational integrand ⁵²performance index ⁵³cost function ⁵⁴locally weak minimum

این معادله دیفرانسیل، معادله‌ی اویلر-لاگرانژ^{۵۵} نامیده می‌شود. نشان داده می‌شود که معادله (۱۴) یک شرط لازم برای کمینه‌ی موضعی است. به همین دلیل به جواب‌های معادله اویلر-لاگرانژ اکسترمال^{۵۶} گفته می‌شود. این معادله را می‌توان به صورت‌های دیگری که با شکل اصلی معادله‌ی اویلر-لاگرانژ معادل هستند، بازنویسی نمود.

گزاره ۲.۳. با اعمال $\frac{d}{dx}(\frac{\partial L}{\partial y'})$ می‌توان معادله‌ای به شکل زیر را نتیجه گرفت که شکل معادل با معادله (۱۴) است:

$$(15) \quad L_y - L_{y'x} - y' L_{y'y} - y'' L_{y'y'} = 0.$$

لازم به ذکر است، برای باقی‌ماندن معادله (۱۵) به عنوان یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به منظور تحمیل شرایط مرزی، لازم است رابطه $y'' \neq 0$ که شرط لژاندر^{۵۷} نامیده می‌شود، برقرار باشد.

گزاره ۳.۳. معادله اویلر-لاگرانژ با معادله‌ی:

$$\frac{d}{dx}(L - y' L_{y'}) - L_x = 0,$$

معادل است. به این معادله، رابطه بلرامی^{۵۸} یا فرم دوم معادله اویلر-لاگرانژ گفته می‌شود.

نتیجه ۴.۳. اگر تابع انتگرالده تغییراتی L مستقل از x و به شکل $L(y, y')$ باشد، شرط اکسترمال بودن یک منحنی به صورت زیر است:

$$(16) \quad L - y' L_{y'} = C \text{ مقدار ثابتی چون}$$

همان‌گونه که اشاره شد، حالت خاص مسأله‌ی (۱۳)، مسائل با نقطه‌ی انتهایی ثابت هستند. در حساب تغییرات مسایلی نیز وجود دارند که نقطه‌ی انتهایی آن‌ها ثابت نیست و مثلاً بر روی منحنی $c(t)$ قرار دارد. هم‌چنین مسائل حساب تغییرات مفید دسته‌ی دیگری هستند که شباهت بیشتری به مسأله‌ی کنترل بهینه دارند. خوانندگان علاقمند می‌توانند برای مشاهده شروط لازم و کافی جواب بهینه این دسته از مسائل و مطالعه جزئیات بیشتر، به منابع [۱۴، ۲۶، ۲۷] مراجعه نمایند.

۴. مسأله کوتاه‌ترین زمان

مسأله کوتاه‌ترین زمان، علاوه بر جذابیت ذاتی، به دلیل نقش تاریخی آن در شکل‌گیری حساب تغییرات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛ شاخه‌ای از آنالیز ریاضی که امروزه به‌طور عمیق به بررسی ساختارهای پیچیده جهان فیزیکی پرداخته است. جالب توجه است که اینشتین^{۵۹} با تعریف المان دیفرانسیلی طول قوس در فضای چهاربعدی نظریه نسبیت عام، توانست فاصله بین دو نقطه را در این فضا محاسبه کند. در این چارچوب، هر نقطه در فضا-زمان به‌عنوان یک رویداد تعریف شده و مسیرهایی که این نقاط را به هم متصل می‌کنند، به‌عنوان ژئودزیک‌ها^{۶۰} معرفی می‌شوند. با کمینه‌سازی فاصله میان این نقاط، اینشتین مفهوم ژئودزیک‌ها را به‌دست آورد که کوتاه‌ترین مسیر در فضای خمیده را مشخص می‌کند. این مفهوم، پایه‌ای برای توضیح حرکت اجسام در فضا-زمان و تأثیر گرانش بر آن‌ها است و به نحوی با مسأله مورد مطالعه در این مقاله ارتباط پیدا می‌کند [۲۲].

برای بررسی مسأله کوتاه‌ترین زمان، مطابق شکل (۱۷) فرض شده است که نقطه A به‌وسیله دو مسیر، یکی در امتداد خط مستقیم و دیگری بر روی قوس دایره‌ای، به نقطه پایین‌تر B متصل باشد و مهره‌ای بدون اصطکاک از A به B بلغزد. سوالی که مطرح می‌شود این است که مهره در امتداد کدام یک از این دو مسیر کمترین زمان را برای رسیدن به نقطه B نیاز دارد؟ در نگاه اول ممکن است خط مستقیم که کوتاه‌ترین فاصله میان دو نقطه است، به‌عنوان مسیر سریع‌تر به نظر برسد. با این حال، ممکن

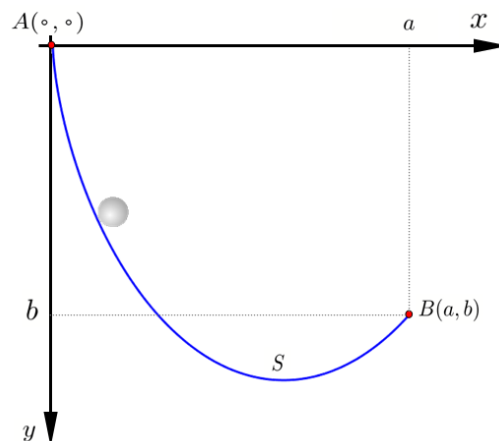
⁵⁵Euler-Lagrange equation ⁵⁶External ⁵⁷Legendre condition ⁵⁸Beltrami identity ⁵⁹Albert Einstein (1879-1955)

⁶⁰Geodesics

در نهایت با جای‌گذاری (۱۹) در رابطه (۱۸) تابعی که می‌بایست تحت شرایط مرزی $y(a) = b$ و $y(0) = 0$ کمینه شود، به دست می‌آید:

$$(20) \quad T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y}} dx,$$

لازم به ذکر است هر انتخاب برای تابع $y(x)$ در بازه $[0, a]$ به عددی برای سپری شدن زمان منجر می‌شود. در واقع تابع $T[y]$ بر مجموعه‌ای از توابع با نقاط مرزی ثابت عمل می‌کند تا مجموعه اعداد متناظرش را تولید نماید که در این مسأله هدف یافتن کوتاه‌ترین زمان است.



شکل ۸. مسیر دلخواه مربوط به مسأله کوتاه‌ترین زمان

Figure 8: An arbitrary path related to the brachistochrone problem

۵. روش‌های مختلف حل مسأله کوتاه‌ترین زمان

در این قسمت به بیان برخی روش‌ها که برای حل مسأله کوتاه‌ترین زمان وجود دارد پرداخته شده است.

۱.۵. حل معادله اویلر-لاگرانژ. با مقایسه رابطه (۲۰) با شکل کلی مسأله حساب تغییرات (۱۳) می‌توان تابع انتگرالده تغییراتی را به صورت زیر به دست آورد:

$$(21) \quad L(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}}.$$

این تابع مستقل از x است پس معادله اویلر-لاگرانژ طبق نتیجه (۴.۲) به شکل تساوی زیر حاصل خواهد شد:

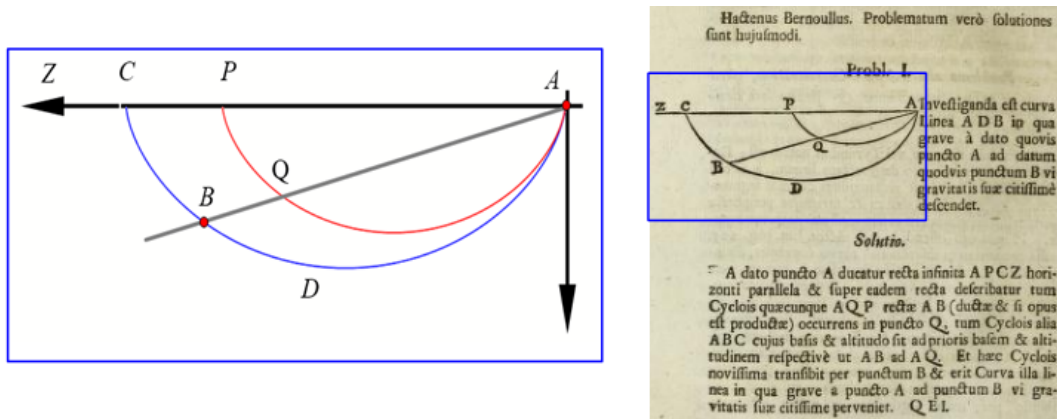
$$(22) \quad L - y' L_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1 + (y')^2)}} \right) = C$$

با ساده کردن رابطه (۲۲)، معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$(23) \quad y(1 + (y')^2) = c,$$

که در آن $c = \frac{1}{\sqrt{2g}C}$ و معادله (۲۳)، معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان نامیده می‌شود.

۲.۵. راه حل نیوتن. راه حل نیوتن با آن سبک شاهانه‌اش، بر پایه‌ی نتیجه (۱.۲) بنا شده است. جوابی که بعدها بدون نام در مجله فیلاسُفیکال ترنزکشنز^{۶۱} به شرح شکل ۹ به چاپ رسید. در این روش که به یک دستورالعمل مختصر و مفید شبیه است، ابتدا از نقطه شروع A نیم‌خط افقی $APCZ$ و پاره‌خط AB رسم می‌شود. سپس منحنی چرخزادی رسم می‌شود که محل تقاطع آن با پاره‌خط AB با Q نشان داده شده است. حال منحنی چرخزاد ADC را با این ویژگی رسم که نسبت قاعده و ارتفاع آن به نسبت قاعده و ارتفاع منحنی چرخزاد AQP برابر با نسبت طول پاره‌خط AB به طول پاره‌خط AQ یعنی $\frac{AB}{AQ}$ باشد. همانطور که در شکل (۹) نشان داده شده است، این منحنی چرخزاد از نقطه پایانی B می‌گذرد. این همان منحنی مورد نظری است که حرکت جسم تحت اثر گرانش، در امتداد آن از A به B در کوتاه‌ترین زمان رخ می‌دهد.



شکل ۹. راه‌حل نیوتن برای مسأله کوتاه‌ترین زمان که در سال ۱۶۹۷ در مجله فیلاسُفیکال ترنزکشنز به چاپ رسید

Figure 9: Solution of Newton to the brachistochrone problem published in Philosophical Transactions in 1697

بعدها نیوتن راه‌حل خود برای مسأله کوتاه‌ترین زمان را بدین ترتیب شرح داد که ابتدا تابع (۲.۰) به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\int_a^x F(x)dx,$$

که در آن انتگرالده تغییراتی به صورت تابعی بر حسب x است:

$$F(x) = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}},$$

در ادامه نموداری مطابق شکل (۱.۰) واصل بین نقاط A و B را به شکل $x(y)$ (روی دستگاه مختصاتی که در آن محور y با جهت مثبت رو به پائین است) رسم می‌نمائیم که در آن $AC = y$ ، $CF = x$ و $CD = DE = dy$ است. از روی نمودار (۱.۰) و با توجه به بسط تیلور تابع $x(y)$ می‌توان نتایج زیر را به دست آورد:

$$DJ \approx DG = x(y + dy) \approx x + dy x' + \frac{1}{2}(dy)^2 x'',$$

$$EH = x(y + 2dy) \approx x + 2dy x' + 2(dy)^2 x''.$$

⁶¹philosophical transactions

رابطه‌ی (۲۵) با دو تعریف،

$$(26) \quad R^2 = \frac{(dy)^2 + (dx - q)^2}{y}, \quad S^2 = \frac{(dy)^2 + (dx + q)^2}{y + dy},$$

به صورت $R + S$ قابل بازنویسی است. با مشتق‌گیری از طرفین دو تساوی (۲۶) بر حسب پارامتر q داریم:

$$2RR' = \frac{-2dxq' + 2qq'}{y}, \quad 2SS' = \frac{2dxq' + 2qq'}{y + dy},$$

کمینه زمان در رابطه (۲۵) با حل معادله $R' + S' = 0$ رخ خواهد داشت که به تساوی زیر منجر می‌شود:

$$R' + S' = \frac{-dxq' + qq'}{Ry} + \frac{dxq' + qq'}{S(y + dy)} = 0,$$

که با توجه به تعاریف R و S می‌توان تساوی زیر را نتیجه گرفت:

$$(27) \quad \frac{dx - q}{\sqrt{(dy)^2 + (dx - q)^2} \sqrt{y}} = \frac{dx + q}{\sqrt{(dy)^2 + (dx + q)^2} \sqrt{y + dy}}.$$

حال با توجه به رابطه‌ی،

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\sqrt{(dy)^2 + p^2}}{\sqrt{y}} \right) = \frac{p}{\sqrt{(dy)^2 + p^2} \sqrt{y}}.$$

و با بازنویسی تساوی (۲۷) با فرض $q = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که طرف چپ این تساوی باید برابر با مقدار ثابتی باشد:

$$\frac{dx}{\sqrt{(dy)^2 + (dx)^2} \sqrt{y}} = \text{مقدار ثابت},$$

که به صورت معادله‌ی دیفرانسیل زیر قابل بازنویسی است:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2} \sqrt{y}} = \text{مقدار ثابت},$$

که همان معادله‌ی دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان محاسبه شده در رابطه (۲۳) است.

۳.۵. راه‌حل یوهان برنولی. در این قسمت به ارائه روش منتسب به یوهان برنولی پرداخته می‌شود [۱۹، ۲۹] که با بررسی مسأله‌ای از مبحث نور آغاز گردیده است. بدین منظور مطابق شکل (۱۱) فرض شده است که پرتوی نورانی با سرعت v_1 از A به نقطه P وارد و سپس به محیط رقیق‌تر وارد شده و با سرعت بیشتر v_2 از P به B می‌رسد. بدین ترتیب مطابق شکل (۱۱) و با توجه به رابطه‌ی (۲۴)، مدت زمان لازم برای طی مسیر پرتو نور از نقطه A تا نقطه B برابر است با:

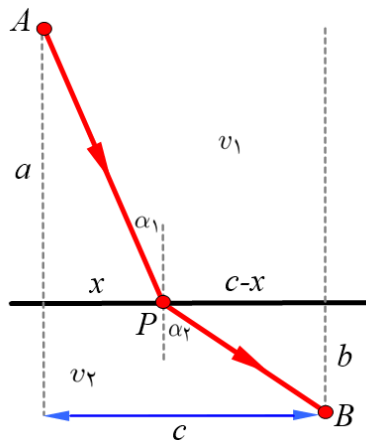
$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}.$$

با فرض این‌که مسیر پیمودن پرتو نورانی از نقطه A تا نقطه B در حداقل زمان T صورت پذیرد، در این صورت می‌بایست $\frac{dT}{dx} = 0$ باشد که نتیجه‌ای به ترتیب ذیل را به همراه دارد،

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

که معادل با رابطه زیر است:

$$(28) \quad \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}.$$



شکل ۱۱. مسیر حرکت پرتو نور در ورود به یک محیط رقیق‌تر

Figure 11: Light ray trajectory entering a less dense medium

تساوی (۲۸) که به قانون شکست^{۶۲} یا قانون اسنل^{۶۳} معروف است، با اصل فرما^{۶۴} یا اصل حداقل زمان^{۶۵} ارتباط نزدیکی دارد. بر اساس این اصل، نور مسیری را از یک نقطه به نقطه دیگر طی می‌کند که زمان لازم برای پیمودن آن حداقل باشد. این اصل نه تنها توضیح منطقی برای قانون اسنل ارائه می‌دهد، بلکه برای تعیین مسیر پرتوی نورانی که از محیطی با چگالی متغیر عبور می‌کند نیز به کار می‌رود. در چنین شرایطی، پرتوی نور به جای حرکت در یک خط مستقیم، از روی یک منحنی عبور می‌کند. همان‌طور که در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود، محیط نوری شامل چندین لایه است که در هر لایه سرعت نور ثابت بوده و در لایه‌های زیرین افزایش می‌یابد. در نتیجه، پرتوی نور هنگام عبور از هر لایه به لایه پایین‌تر، به تدریج به سمت امتداد افقی شکسته می‌شود. با استفاده از قانون اسنل در مرزهای بین لایه‌ها، می‌توان رابطه زیر را استخراج کرد:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = \frac{\sin \alpha_4}{v_4},$$

حال اگر مانند شکل (۱۳) لایه‌ها نازک‌تر و در نتیجه تعدادشان بیشتر گردد، در حالت حدی سرعت نور با پایین آمدن پرتو به طور پیوسته افزایش یافته و نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$(۲۹) \quad \frac{\sin \alpha}{v} = \text{مقدار ثابت},$$

که مشابه حالتی است که برای پرتویی از نور خورشید که به زمین می‌تابد پیش می‌آید، با این تفاوت که پرتو نور خورشید هنگام ورود به جو، سرعتش با افزایش تراکم محیط کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که با توجه به (۱۹)، رابطه زیر برای سرعت حرکت یک ذره صادق است:

$$(۳۰) \quad v = \sqrt{2gy},$$

همچنین با پذیرش فرضیه‌ی ذره‌ای بودن نور و با توجه به شکل (۱۳) و تساوی‌های $\sin \alpha = \cos \beta$ و $y' = \tan \beta$ می‌توان رابطه زیر را نتیجه گرفت:

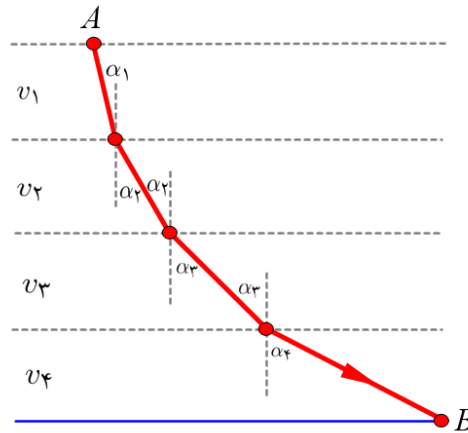
$$(۳۱) \quad \sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

⁶²law of refraction ⁶³Snell's law ⁶⁴Fermat's principle ⁶⁵principle of least time

با ترکیب روابط (۲۹) و (۳۰) و (۳۱) که از نورشناسی، مکانیک و حساب دیفرانسیل و انتگرال استخراج شده است، معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

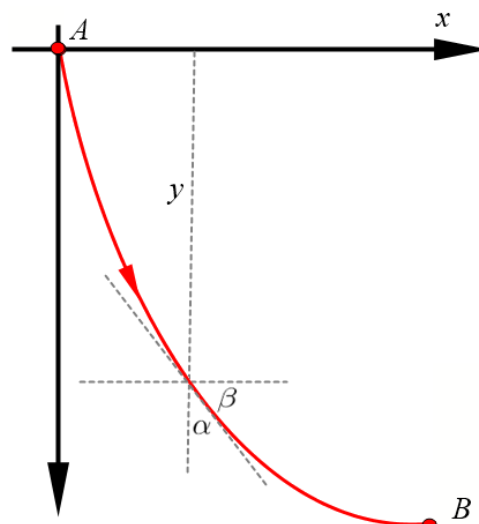
$$(32) \quad y(1 + (y')^2) = c.$$

معادله (۳۲)، همان معادله‌ی دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان محاسبه شده در رابطه (۲۲) است.



شکل ۱۲. مسیر حرکت پرتو نور در محیطی چند لایه که هر لایه رقیق‌تر از لایه قبلی است

Figure 12: Path of a light ray through a multi-layered medium with successively lower densities



شکل ۱۳. در نظر گرفتن مسیر حرکت مهره مانند پرتو نور در طی مسیر مسأله کوتاه‌ترین زمان بین نقاط A و B

Figure 13: Treating the trajectory of bead as that of a light ray in the brachistochrone path between A and B

۴.۵. استفاده از عمل‌گر تغییراتی (وردشی). در این قسمت مسأله کوتاه‌ترین زمان با استفاده از عمل‌گر تغییراتی و به زبان امروزی حل شده است [۹]. برای استفاده از این روش ابتدا تابع (۲۰) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$(۳۳) \quad T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{y}} dy,$$

حال وردش رابطه‌ی (۳۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta(T[y]) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \delta \left(\frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{x' \delta x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} \frac{d(\delta x)}{dy} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(\frac{x' \delta x}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} \Big|_0^a - \int_0^a \delta x \left\{ \frac{d}{dy} \frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} \right\} dy \right), \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که انتگرال نهایی به روش انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء محاسبه گردیده و با توجه اینکه $\delta(x(0)) = 0$ و $\delta(x(a)) = 0$ می‌توان نتیجه زیر را به دست آورد:

$$\delta(T[y]) = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \delta x \left\{ \frac{d}{dy} \frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} \right\} dy,$$

حال اگر حرکت در امتداد مسیر کوتاه‌ترین زمان باشد، می‌بایست برای هر $\delta(x)$ شرط $\delta(T[y]) = 0$ برقرار و تساوی زیر را داشته باشیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{d}{dy} \frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} = 0,$$

که معادل با رابطه‌ای به شکل زیر است:

$$\frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} = C \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y((\frac{1}{x'})^2 + 1)}} = C,$$

و در نهایت معادله دیفرانسیل زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$(۳۴) \quad \frac{1}{\sqrt{y((y')^2 + 1)}} = C \Rightarrow y(1+(y')^2) = c,$$

معادله (۳۴)، همان معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان محاسبه شده در رابطه (۲۳) است.

۶. یافتن شکل منحنی کوتاه‌ترین زمان

در این بخش، مسأله کوتاه‌ترین زمان با تمرکز بر تحلیل دقیق و محاسبه شاخص عملکرد مورد بررسی قرار گرفته است. در این راستا، به تحلیل ویژگی‌های خاص منحنی چرخ‌زاد پرداخته شده و مفهوم هم‌زمانی این منحنی به تفصیل توضیح داده شده است. این ویژگی به عنوان یکی از خصوصیات برجسته منحنی چرخ‌زاد، نشان می‌دهد که حرکت مهره بر روی این منحنی از نقطه ابتدایی به نقطه انتهایی، در هر فاصله‌ای از نقطه مبدأ، همواره در زمان ثابت و حداقل انجام می‌شود. علاوه بر این، نحوه طراحی یک ساعت آونگ‌دار که حرکت نوسانی وزنه آن با منحنی چرخ‌زاد منطبق باشد، تشریح شده است. چنین طراحی منجر

به بسامدی می‌شود که مستقل از دامنه نوسان آونگ است. این ویژگی که به عنوان یکی از کاربردهای عملی منحنی چرخ‌زاد شناخته می‌شود، به افزایش دقت در طراحی ابزارهای زمان‌سنجی کمک شایانی می‌کند.

۱.۶. حل معادله‌ی دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان. در این قسمت با حل معادله‌ی دیفرانسیل مسأله کوتاه‌ترین زمان، مشخص می‌شود که منحنی کوتاه‌ترین زمان دارای چه شکلی دارد. با استفاده از تساوی $y' = \frac{dy}{dx}$ می‌توان معادله دیفرانسیل منحنی کوتاه‌ترین زمان را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$(۳۵) \quad dx = \left(\frac{y}{c-y} \right)^{\frac{1}{2}} dy.$$

در ادامه متغیر جدید ϕ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۳۶) \quad \left(\frac{y}{c-y} \right)^{\frac{1}{2}} = \tan \phi,$$

با این انتخاب می‌توان تساوی $y = c \sin^2 \phi$ را نتیجه گرفت و به تبع آن حاصل dy را به ترتیب زیر به دست آورد:

$$(۳۷) \quad dy = 2c \sin \phi \cos \phi d\phi,$$

بدین ترتیب جای‌گذاری (۳۶) و (۳۷) در (۳۵) نتیجه زیر را به همراه دارد:

$$(۳۸) \quad dx = \tan \phi dy = 2c \sin^2 \phi d\phi = c(1 - \cos(2\phi)) d\phi.$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۳۸) داریم:

$$x = \frac{c}{2} (2\phi - \sin 2\phi) + c_1,$$

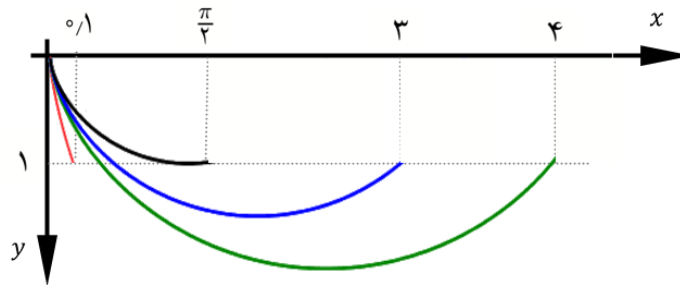
از آنجایی که منحنی جواب می‌بایست از مبدا مختصات بگذرد لذا به کمک رابطه (۳۵) وقتی $\phi = 0$ داریم $x = y = 0$ و $c_1 = 0$ که نتیجه می‌دهد:

$$(۳۹) \quad \begin{cases} x = \frac{c}{2} (2\phi - \sin(2\phi)), \\ y = c \sin^2 \phi = \frac{c}{2} (1 - \cos(2\phi)). \end{cases}$$

حال اگر تغییر متغیرهای $r = \frac{c}{2}$ و $t = 2\phi$ را در رابطه (۳۹) به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t), \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$

که معادله پارامتری منحنی چرخ‌زاد معرفی شده در رابطه (۲) است. در این محاسبه مشخص گردید منحنی چرخ‌زاد، خم کوتاه‌ترین زمان بین دو نقطه است. لازم به ذکر است که با توجه به اینکه جهت مثبت محور y رو به پائین فرض شده است قوس منحنی چرخ‌زاد وارونه و رو به پائین در نظر گرفته می‌شود. همچنین مقدار واحدی از r وجود دارد که اولین کمان منحنی چرخ‌زاد را وادار به عبور از نقطه انتهایی B می‌نماید. بدین ترتیب، حل این مسأله نشان می‌دهد که منحنی چرخ‌زاد تنها خم کوتاه‌ترین زمان است. به عنوان نمونه شکل (۱۴) نمودارهای مسیرهایی که نقطه $(0, 0)$ را به نقطه $(b, 1)$ برای مقادیر مختلف b متصل می‌کنند، نمایش می‌دهد. از این شکل ملاحظه می‌شود، که برای مقادیر کوچک b ، مسیری نزدیک به یک خط مستقیم است. اگر $b < \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه مسیر ثابت فقط یک بار در نقطه پایانی از خط $y = 1$ عبور می‌کند. همچنین اگر $b > \frac{\pi}{2}$ ، مسیر ثابت دو بار از خط $y = 1$ عبور می‌کند. لازم به ذکر است که مقدار بحرانی b ، جایی که مسیر ثابت بر خط $y = 1$ در نقطه پایانی خود مماس است، در $b = \frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد [۱۲].



شکل ۱۴. نمایش منحنی چرخزادهای واصل بین مبدا و نقاط $(0.1, 1)$ ، $(\frac{\pi}{3}, 1)$ ، $(3, 1)$ و $(4, 1)$

Figure 14: Cycloidal curves connecting the origin to points $(0.1, 1)$, $(\frac{\pi}{3}, 1)$, $(3, 1)$, and $(4, 1)$

۲.۶. کشف ویژگی‌های دیگری از منحنی کوتاه‌ترین زمان. در این قسمت به بررسی ویژگی‌های دیگری از منحنی چرخزاد به‌عنوان منحنی کوتاه‌ترین زمان پرداخته شده است. الف) زمان مورد نیاز برای طی مسیر از مبدا تا نقطه کمینه منحنی: در این قسمت نشان داده می‌شود که مدت زمانی که طول می‌کشد تا مهره‌ای که از مبدا مختصات رها شده و بدون اصطکاک بر روی مسیری به شکل منحنی چرخزاد وارونه (۲) به طرف پایین می‌لغزد به نقطه زیرین $(\pi a, 2a)$ برسد برابر با $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ است. با جای‌گذاری (۲) در رابطه (۲۰) به عنوان تابعی که می‌بایست تحت شرایط مرزی $y(\pi a) = 2a$ و $y(0) = 0$ کمینه شود، و توجه به اینکه از تقسیم $\frac{dy}{dt}$ بر $\frac{dx}{dt}$ حاصل $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ به‌دست می‌آید، داریم:

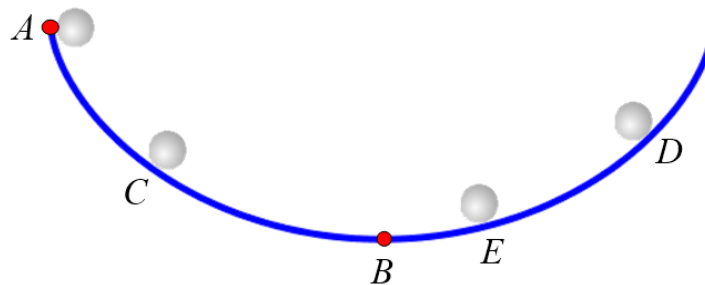
$$\begin{aligned} T[x(t), y(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{2a(1 - \cos t)}}{\sqrt{a(1 - \cos t)}} a(1 - \cos t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{2a} dt = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}. \end{aligned}$$

ب) خاصیت هم‌زمانی^{۶۶} منحنی چرخزاد: ویژگی جالب دیگری از منحنی چرخزاد آن است که اگر مطابق نمودار (۱۵) یک مهره به جای مبدا مختصات (یعنی نقطه A) سقوط آزاد خود را از هر نقطه‌ی دیگری نظیر نقاط C ، D یا E به سمت نقطه انتهائی B شروع کند، در همان مدت زمان به نقطه پایانی می‌رسد. به بیان دیگر، چرخزاد منحنی هم‌زمان بین دو نقطه محسوب می‌شود و این خاصیت به خاصیت هم‌زمانی منحنی چرخزاد موسوم است. در این قسمت به اثبات این ویژگی پرداخته شده است، به عبارتی نشان داده می‌شود که مدت زمان لازم برای انتقال یک مهره از هر نقطه دلخواه از منحنی چرخزاد به نقطه زیرین منحنی، یکسان است. یعنی چند مهره، فارغ از این‌که در چه نقطه‌ای از منحنی چرخزاد رها می‌شوند در مدت زمان مساوی به نقطه پایانی می‌رسند و این زمان به محل رها شدن مهره‌ها بستگی ندارد [۳۳، ۱۲].

برای اثبات، فرض می‌کنیم که یک مهره حرکت خود را به جای نقطه ابتدائی A از نقطه‌ی پائین‌تری از منحنی چرخزاد مانند (x_0, y_0) متناظر با $t_0 > 0$ شروع کند. در این صورت سرعت مهره در هر نقطه‌ی بعدی مانند (x, y) روی منحنی چرخزاد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2ga(\cos(t_0) - \cos(t))},$$

⁶⁶isochrone



شکل ۱۵. اگر هم‌زمان چهار مهره از نقاط A ، C ، D یا E رها شوند با هم به نقطه B خواهند رسید

Figure 15: If four beads are released simultaneously from points A ، C ، D ، and E ، they will all arrive at point B together

همچنین زمان لازم برای رسیدن مهره از نقطه (x_0, y_0) به نقطه انتهائی B به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 T[\text{چرخزاد منحنی } (۲)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2 (2 - 2 \cos t)}{a(\cos(t_0) - \cos(t))}} dx \\
 &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2 \sin^2(\frac{t}{2})}{(2 \cos^2(\frac{t_0}{2}) - 1) - (2 \cos^2(\frac{t}{2}) - 1)}} dt \\
 &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sqrt{\cos^2(\frac{t_0}{2}) - \cos^2(\frac{t}{2})}} dt \\
 &= -2\sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{\cos(\frac{t_0}{2})}\right) \Big|_{t_0}^{\pi} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.
 \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌شود این دقیقاً همان زمان رسیدن مهره از مبدا مختصات به نقطه انتهائی B است که قبلاً به دست آمد. به عبارت دیگر، صرف نظر از اینکه مهره حرکت خود را از کجای منحنی چرخزاد شروع کند، مدت زمانی که طول می‌کشد تا به پائین‌ترین نقطه آن برسد، همیشه یکسان است.

هویگنس^{۶۷} در سال ۱۶۷۳ آونگی برای ساعت طراحی کرد که وزنه‌ی آن روی کمانی به شکل منحنی چرخزاد مطابق شکل (۱۶) نوسان می‌کرد.

وی این کار را به کمک حفاظهایی به شکل منحنی چرخزاد انجام داد که حرکت سیم متصل به وزنه را محدود می‌کرد. لازم به ذکر است، اگر وزنه یک آونگ روی کمانی به شکل دایره حرکت تناوبی کند، بسامد نوسان $(\omega = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{g}{L}})$ به دامنه‌ی حرکت بستگی دارد. هرچه دامنه‌ی این نوسان بزرگ‌تر باشد، زمان بیشتری طول می‌کشد تا وزنه به مرکز یعنی پائین‌ترین مکان خود برگردد. اما این اتفاق در نوسان روی کمانی به شکل منحنی چرخزاد نمی‌افتد. دلیل مستقل بودن زمان نوسان آونگ هویگنس از دامنه‌ی حرکت وزنه‌ی آونگ نیز همین ویژگی هم‌زمان بودن منحنی چرخزاد است [۳۳]. این واقعیت یوهان برنولی را سخت تحت تاثیر قرار داد و آن را خاصیت قابل ملاحظه‌ای می‌دانست و اظهار داشت: ”شایسته و به حق است که هویگنس را مورد تمجید قرار دهیم که برای اولین بار کشف کرد که هر ذره‌ی وزین که در طول منحنی چرخزاد سقوط کند همواره در زمان واحدی به انتهای مسیر می‌رسد و نقطه عزیمت در این موضوع نقشی ندارد. لیکن هنگامی که بدانید همین منحنی چرخزاد، یعنی

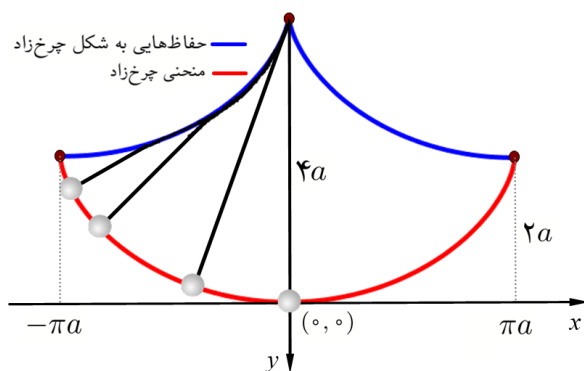
⁶⁷Christiaan Huygens(1629-1695)

منحنی هم‌زمان هویکنس، در عین حال منحنی کوتاه‌ترین زمانی است که در جستجوی آن هستیم، حیرت شما زیاد خواهد یافت. شواهد تاریخی نشان می‌دهد که ژاکوب برنولی نیز از مشاهده این خاصیت به شور و نشاط در آمد [۳].

۷. بررسی مسأله کوتاه‌ترین زمان در امتداد مسیرهای مختلف

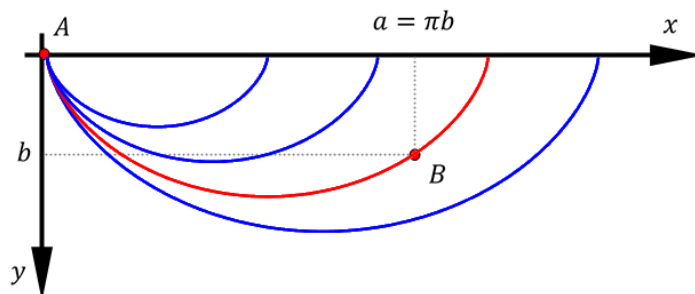
در بخش (۶) معادله منحنی چرخ‌زاد به عنوان جواب بهینه‌ی مسأله کوتاه‌ترین زمان در قالب رابطه‌ی (۲) به دست آمد. در این رابطه اگر شعاع دایره مولد برابر با r باشد و بتواند از صفر تا بینهایت تغییر نماید، یک قوس از منحنی چرخ‌زاد بزرگ و بزرگ‌تر شده و سراسر ربع اول را مطابق شکل (۱۷) می‌پوشاند. از این تحلیل می‌توان نتیجه گرفت که می‌شود با انتخاب مقدار مناسبی برای r ، منحنی چرخ‌زاد گذرنده از نقطه انتهائی و دلخواه B در مسأله کوتاه‌ترین زمان را تعیین نمود. برای پیاده‌سازی و مقایسه زمان در مسأله کوتاه‌ترین زمان، شرایطی که در آن نقطه‌ی ابتدائی مبداء مختصات یعنی $A(0, 0)$ و مقصد گلوله نقطه $B(x_1, y_1)$ است، در نظر گرفته شده است. بدین منظور منحنی پارامتری (۲) گذرا از مبداء مختصات که می‌بایست متناظر با $t = t_1$ از نقطه B نیز بگذرد را در نظر گرفته که دستگاه معادلاتی را به صورت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$(۴۰) \quad \begin{cases} x(t_1) = r(t_1 - \sin(t_1)) = x_1, \\ y(t_1) = r(1 - \cos(t_1)) = y_1, \end{cases}$$



شکل ۱۶. نوسان آونگ ساعت هویکنس منطبق بر منحنی چرخ‌زاد و بسامدش مستقل از دامنه حرکت آونگ است

Figure 16: The oscillation of clock pendulum of Huygens follows a cycloidal path, with frequency independent of amplitude



شکل ۱۷. نمایش منحنی چرخ‌زاد مختلف با نقطه شروع A به همراه نمونه گذرا از نقطه B

Figure 17: Representation of various cycloidal curves from point A and a transient case from point B

حل دستگاه (۴۰) به حل دستگاه معادلات زیر منجر می‌شود:

$$(۴۱) \quad \begin{cases} x_1 \cos(t_1) - y_1 \sin(t_1) + y_1 t - x_1 = 0, \\ r = \frac{y_1}{1 - \cos(t_1)}, \end{cases}$$

با بررسی دستگاه به دست آمده (۴۱)، نتیجه می‌شود که ابتدا می‌بایست معادله‌ی،

$$(۴۲) \quad x_1 \cos(t_1) - y_1 \sin(t_1) + y_1 t - x_1 = 0,$$

حل و پس از محاسبه‌ی t_1 مقدار r محاسبه گردد. از آنجایی که حل معادله‌ی (۴۲) با استفاده از روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر نیست، به‌کارگیری روش‌های عددی منطقی به نظر می‌رسد. بدین ترتیب، با حل دستگاه (۴۱) و یافتن مقادیر t_1 و r ، همان‌طور که در شکل (۱۷) مشاهده می‌شود، می‌توان معادله‌ی منحنی چرخ‌زاد گذرا از نقطه $B(x_1, y_1)$ را محاسبه نمود. در این قسمت فرایند حل عددی (۴۱) و یافتن معادله منحنی چرخ‌زادی که از مبداء مختصات آغاز و به نقطه B برای مقادیر دلخواه (x_1, y_1) منتهی می‌شود، به اجرای رویه‌ی ۶۸ (آ.۱) در نرم‌افزار میپل با عنوان Brachistochrone سپرده شده است.

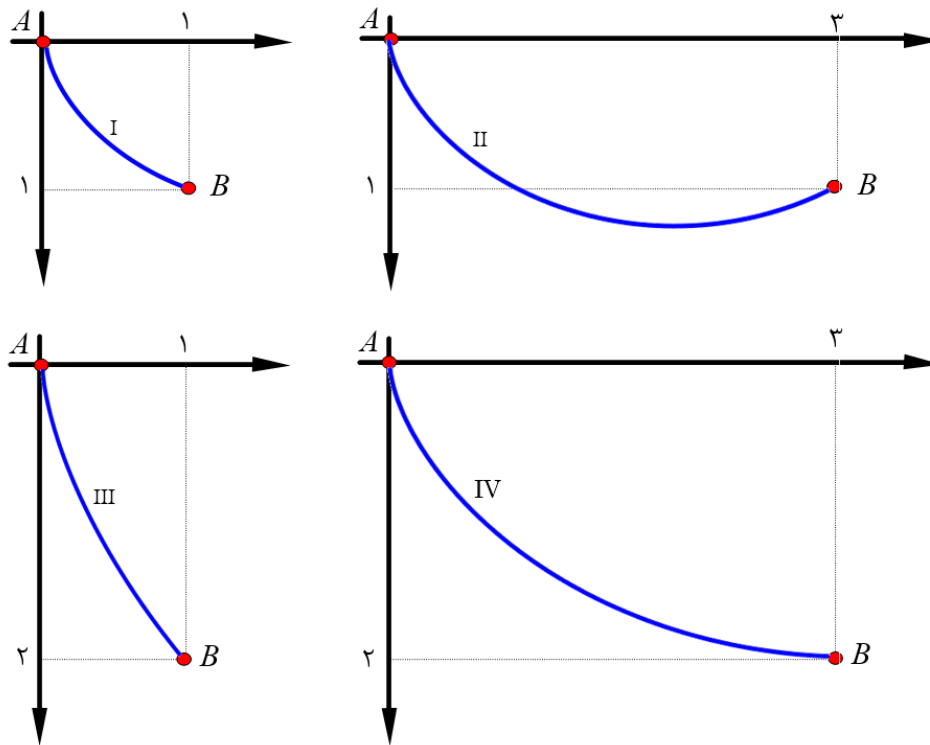
این رویه در حالی که دو ورودی آن مولفه‌های نقطه انتهائی $B(x_1, y_1)$ است، تعریف شده است. با اجرای این رویه و وارد نمودن مولفه‌های نقطه پایانی، جواب دستگاه معادلات (۴۰) یعنی مقدار عددی پارامترهای مجهول r و t_1 که به‌ترتیب متناظر با شعاع دایره مولد منحنی چرخ‌زاد و زاویه مربوط به زمان عبور مهره از نقطه پایانی است، به‌دست می‌آید. در ادامه علاوه بر رسم نقاط ابتدائی و انتهائی و منحنی چرخ‌زاد متناظر با ورودی داده شده، مقادیر مربوط به زمان مورد نیاز برای عبور مهره از نقطه پایانی و نقطه کمینه منحنی چرخ‌زاد حاصل می‌شود. در جدول (۱) نتایج حاصل از اجرای رویه متناظر با چهار حالت مختلف I، II، III و IV گزارش گردیده است:

جدول ۱. مقدار عددی شاخص عملکرد در امتداد چرخ‌زاد منتهی به نقاط مختلف در چهار حالت

Table 1: Numerical values of the performance index along cycloidal paths to various points in four scenarios

مثال	مختصات نقطه پایانی	زمان لازم برای عبور از B	زمان لازم برای عبور از نقطه کمینه
نمونه I	$(x_1, y_1) = (1, 1)$	۰٫۵۸۲۹۹۵۰۱۴۶	۰٫۷۵۹۳۳۸۴۷۱۵
نمونه II	$(x_1, y_1) = (3, 1)$	۱٫۰۱۸۴۸۶۸۶۱	۰٫۷۸۹۷۲۴۷۲۸۱
نمونه III	$(x_1, y_1) = (1, 2)$	۰٫۶۹۴۰۷۶۵۶۴۷	۱٫۵۵۵۹۷۱۰۳۱
نمونه IV	$(x_1, y_1) = (3, 2)$	۰٫۹۸۰۶۰۲۱۸۳۰	۱٫۰۰۳۸۶۹۹۰۸

همچنین شکل (۱۸) شامل نمودارهای متناظر با اجرای این رویه و مسیرهای گذرنده از نقاط ابتدائی و انتهائی در چهار حالت مختلف I، II، III و IV و در امتداد منحنی چرخ‌زادهای مختلف گذرا از نقاط مفروض است.



شکل ۱۸. بخشی از مسیر منحنی چرخ‌زادهای مختلف با نقطه شروع A منتهی به نقطه B

Figure 18: Segment of various cycloidal paths from point A to point B

۱.۷ حرکت در امتداد خط. معادله‌ی خط گذرا از نقاط $A(0, 0)$ و نقطه $B(x_1, y_1)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(۴۳) \quad y = mx, \quad m = \frac{y_1}{x_1},$$

بدین ترتیب مقدار شاخص عملکرد (۲۰) در امتداد مسیر (۴۳)، به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$(۴۴) \quad T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} dx = \sqrt{\frac{1 + m^2}{2gm}} \int_0^{x_1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{2(1 + m^2)x_1}{mg}} = \sqrt{\frac{2(x_1^2 + y_1^2)x_1}{y_1 g}}$$

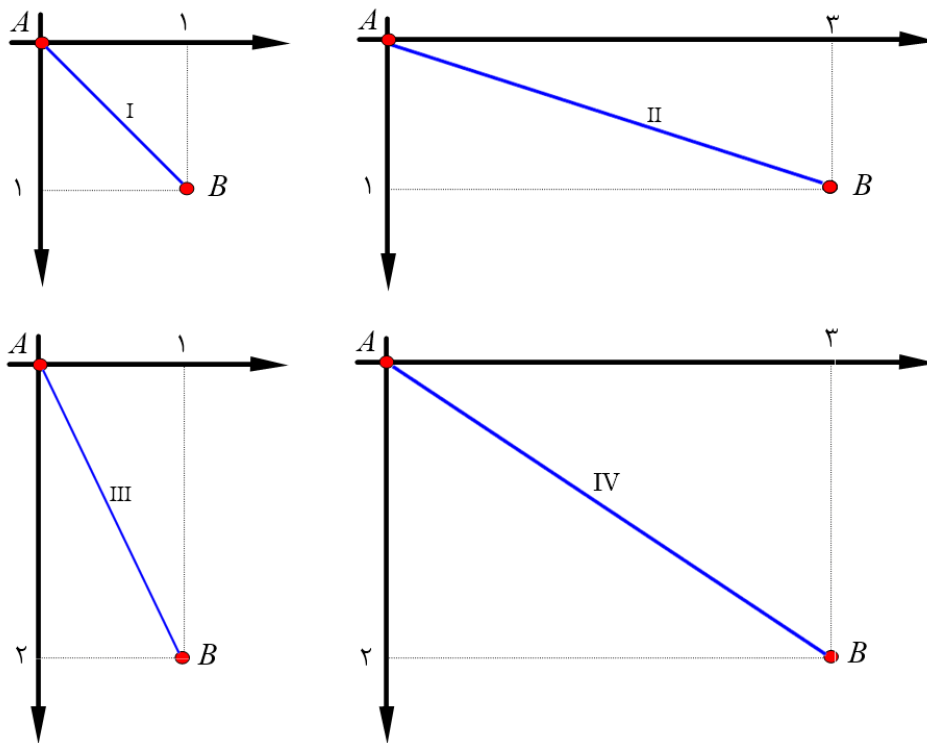
در این بخش، فرایند یافتن معادله خطی که از مبدأ مختصات آغاز می‌شود و از نقطه B با مختصات دلخواه (x_1, y_1) عبور می‌کند، با استفاده از رویه (۲.آ) در نرم‌افزار میپل تحت عنوان Line انجام شده است. این رویه به گونه‌ای تعریف شده است که با دو ورودی، یعنی مؤلفه‌های نقطه انتهایی (x_1, y_1) ، علاوه بر رسم نقاط ابتدایی و انتهایی و مسیر بخشی از خط متناظر با ورودی‌های داده شده، زمان مورد نیاز برای عبور از نقطه پایانی را نیز محاسبه می‌کند. نتایج حاصل از اجرای این رویه برای چهار نقطه مختلف در جدول (۲) گزارش شده است.

همچنین شکل (۱۹) شامل نمودارهای متناظر با اجرای این رویه و مسیرهای گذرنده از نقاط ابتدایی و انتهایی در امتداد خط است.

جدول ۲. مقدار عددی شاخص عملکرد در امتداد مسیر خط منتهی به نقاط مختلف در چهار حالت

Table 2: Numerical values of the performance index along straight-line paths to various points in four scenarios

مثال	مختصات نقطه پایانی	زمان لازم برای عبور از B
نمونه I	$(x_1, y_1) = (1, 1)$	۰/۶۳۸۶۵۹۹۱۳۶
نمونه II	$(x_1, y_1) = (3, 1)$	۲/۴۷۳۵۱۹۲۰۹
نمونه III	$(x_1, y_1) = (1, 2)$	۰/۷۱۴۰۴۳۴۹۰۶
نمونه IV	$(x_1, y_1) = (3, 2)$	۱/۹۹۴۲۱۴۹۴۱



B point to A point from paths linear various of Segment

شکل ۱۹. بخشی از مسیر خط‌های مختلف با نقطه شروع A منتهی به نقطه B

Figure 19: Segment of various linear paths from point A to point B

۲.۷. حرکت در مسیر دایره. در این قسمت، منحنی گذرا از مبداء مختصات $A(0, 0)$ ، دایره‌ای به مرکز $(r, 0)$ و شعاع r به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$(45) \quad (x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

با توجه به اینکه این دایره می‌بایست از نقطه $B(x_1, y_1)$ نیز بگذرد، مقدار r به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$(۴۶) \quad r = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2x_1},$$

با تحمیل شرط $x(t_1) = x_1$ در شکل پارامتری دایره (۴۵) داریم:

$$(۴۷) \quad \begin{cases} x(t_1) = r(1 - \cos(t_1)), \\ y(t_1) = r \sin(t_1), \end{cases}$$

حال می‌توان مقدار t_1 را به صورت زیر به دست آورد:

$$(۴۸) \quad t_1 = \arccos\left(1 - \frac{x_1}{r}\right),$$

در نهایت، می‌توان مقدار شاخص عملکرد (۲۰) در امتداد مسیر دایره‌ای را به ترتیب زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} T[y(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{2a(1 - \cos(t))}}{\sqrt{\sin(t)}} dt. \end{aligned}$$

در این قسمت فرایند یافتن معادله دایره که از مبدا مختصات آغاز و از نقطه B برای مقادیر دلخواه (x_1, y_1) بگذرد را می‌توان با اجرای رویه‌ی (۳.۱) در نرم‌افزار میپل با عنوان Circle انجام داد.

این رویه به گونه‌ای تعریف شده است که دو ورودی آن شامل مؤلفه‌های نقطه انتهایی (x_1, y_1) می‌باشد. با اجرای این رویه و تعیین مؤلفه‌های نقطه پایانی، پاسخ دستگاه، یعنی مقادیر عددی پارامترهای مجهول r و t_1 ، که به ترتیب نمایانگر شعاع دایره و زاویه مربوط به زمان عبور مهره از نقطه پایانی هستند، به دست می‌آید. علاوه بر این، این رویه نقاط ابتدایی و انتهایی را رسم کرده و مسیر بخشی از دایره متناظر با ورودی‌های داده شده را نیز ترسیم می‌کند. همچنین، زمان مورد نیاز برای عبور از نقطه پایانی نیز محاسبه می‌شود. نتایج حاصل از اجرای این رویه برای چهار نقطه مختلف در جدول (۳) گزارش شده است.

جدول ۳. مقدار عددی شاخص عملکرد در امتداد مسیر دایره منتهی به نقاط مختلف در چهار حالت

Table 3: Numerical values of the performance index along circular paths to various points in four scenarios

مثال	مختصات نقطه پایانی	زمان لازم برای عبور از B
نمونه I	$(x_1, y_1) = (1, 1)$	۰.۵۹۲۰۶۱۵۸۶۶
نمونه II	$(x_1, y_1) = (3, 1)$	۱.۰۵۷۷۲۶۴۰۶
نمونه III	$(x_1, y_1) = (1, 2)$	۰.۶۹۷۸۲۱۶۹۹۹
نمونه IV	$(x_1, y_1) = (3, 2)$	۱.۰۰۴۴۶۰۰۰۷

همچنین شکل (۲۰) شامل نمودارهای متناظر با اجرای این رویه و مسیرهای گذرنده از نقاط ابتدایی و انتهایی در امتداد منحنی دایره است.

حال اگر از رویه (۴.۱) را استفاده کنیم، علاوه بر مشاهده مقادیر شاخص عملکرد در نقطه مورد نظر، امکان مقایسه همزمان نمودارهای مختلف شامل خط، دایره و منحنی چرخ‌زاد فراهم می‌شود. برای مشاهده خروجی این رویه، کافی است دستور Comparison(x,y) را برای نقطه انتهایی دلخواه اجرا کنید. با اجرای این رویه، علاوه بر مشاهده مقدار شاخص عملکرد، می‌توان نتایج به دست آمده را در امتداد مسیرهای مختلف که به نقاط مورد نظر منتهی می‌شوند، مقایسه کرد. به منظور بررسی

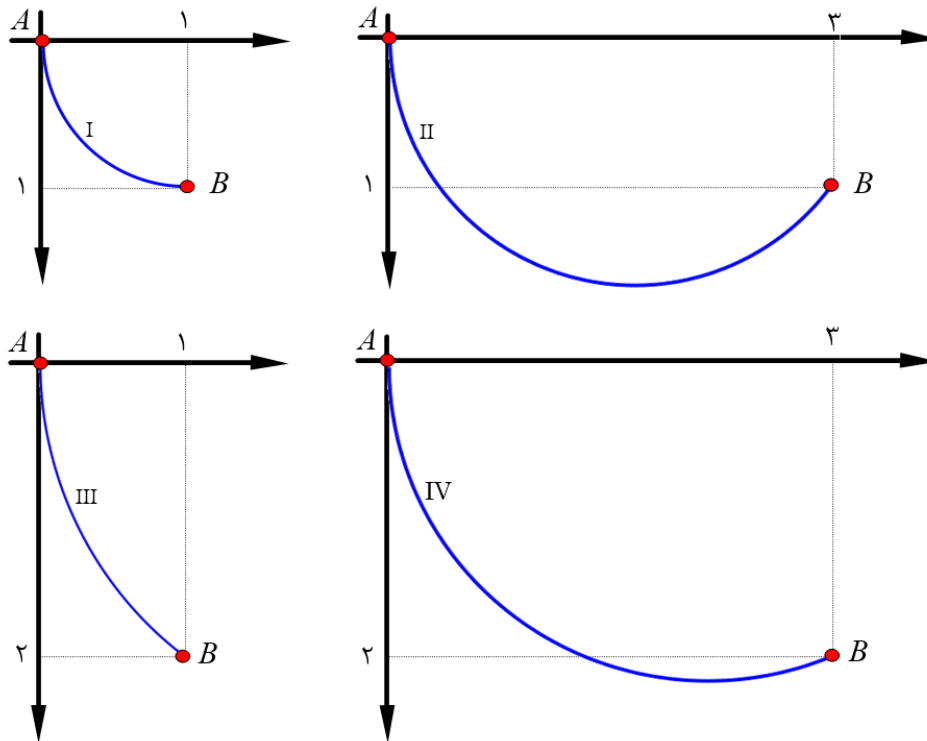
این موضوع، مسئله کوتاه‌ترین زمان منتهی به دو نقطه $(2, 3)$ و $(5, 3)$ با استفاده از رویه (۴.آ) حل شده و نتایج حاصل در جدول (۴) ارائه شده است. در هر مورد، خطای نسبی تقریب نیز محاسبه گردیده است. همچنین، مسیرهای مختلف پیموده‌شده

جدول ۴. مقدار شاخص عملکرد حاصل از اجرای رویه (۴.آ) برای دو حالت مختلف

Table 4: Performance index values obtained by executing Procedure (4.) for two different cases

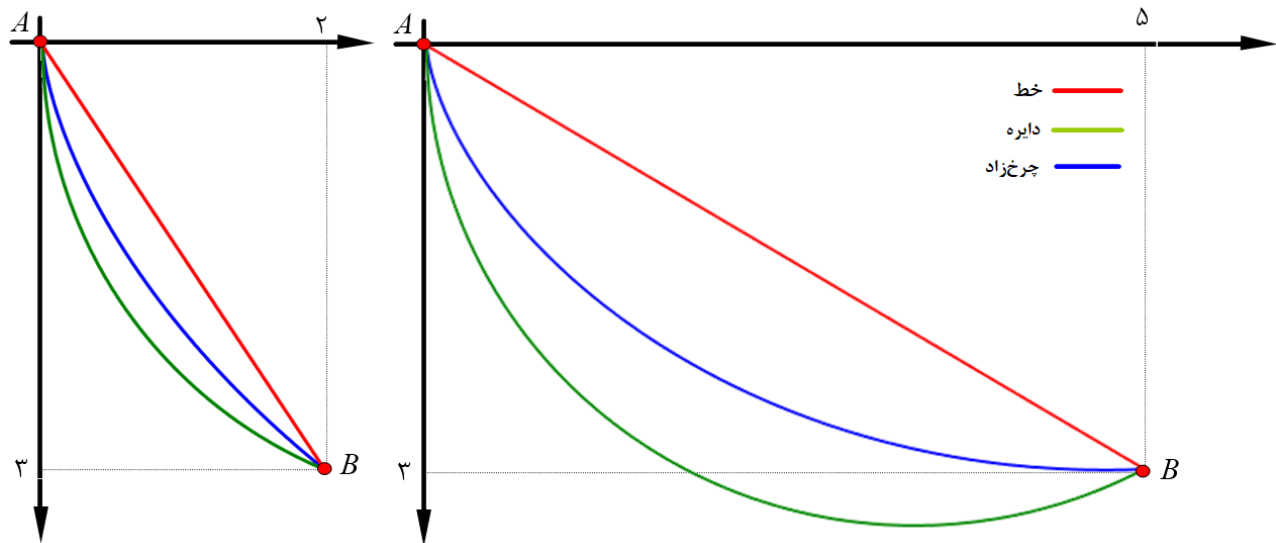
خطای نسبی	شاخص عملکرد منتهی به $(5, 3)$	خطای نسبی	شاخص عملکرد منتهی به $(2, 3)$	مسیر
$1.7E^0$	۳۳۹۹۵۲۶۹۸۹	$4.8E - 1$	۱۳۲۹۴۷۶۶۲۷	خط
$3.4E - 2$	۱۲۹۹۹۶۵۸۷۵	$7.8E - 3$	۰.۹۰۴۵۰۱۱۶۶۴	دایره
۰	۱۲۶۶۱۵۰۸۳۷	۰	۰.۸۹۶۷۰۴۱۰۰۱	منحنی چرخ‌زاد (جواب بهینه)

بین نقاط ابتدایی و انتهایی در مقایسه با مسیر بهینه منحنی چرخ‌زاد در شکل (۲۱) ترسیم شده است. این مقایسه امکان ارزیابی نتایج در امتداد مسیر خط و دایره را نسبت به مسیر بهینه فراهم می‌آورد.



شکل ۲۰. بخشی از مسیر دایره‌های مختلف با نقطه شروع A منتهی به نقطه B

Figure 20: Segment of various circular paths from point A to point B



شکل ۲۱. مقایسه مسیرهای مختلف حاصل از اجرای رویه (۴.آ) برای دو حالت مختلف منتهی به $(2, 3)$ و $(5, 3)$

Figure 21: Comparison of various paths obtained from Procedure (4.) for the two cases ending at $(2, 3)$ and $(5, 3)$

۸. نتیجه‌گیری

مسائل حساب تغییرات به دلیل کاربردهای گسترده در علوم مختلف از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. یکی از مسائل شاخص در این حوزه، مسئله کوتاه‌ترین زمان است که نقشی اساسی در پیدایش این شاخه از ریاضیات ایفا کرده است. پاسخ بهینه این مسئله به طرز شگفت‌انگیزی، منحنی چرخ‌زاد است؛ موضوعی که پیوندی تاریخی میان این دو مفهوم ایجاد کرده است. یادداشت‌های متعددی درباره این منحنی و مسئله کوتاه‌ترین زمان وجود دارد که نشان می‌دهد این موضوعات همواره به عنوان یک زمینه فعال و مورد توجه در تحقیقات ریاضی مطرح بوده‌اند. پژوهش‌های اخیر نیز حاکی از ظهور نتایج شگفت‌انگیز جدیدی در حوزه حساب تغییرات است. در این مقاله، بخش‌هایی از تاریخ ریاضیات پیرامون مطالعات انجام‌شده بر روی منحنی چرخ‌زاد و مسئله کوتاه‌ترین زمان بررسی شده است. در این راستا، علاوه بر معرفی دستاوردهای ریاضیدانان مختلف، به برخی از مناقشات، بحث‌ها، رقابت‌ها و مبارزات علمی نیز پرداخته شده است؛ از این رو اطلاق عنوان «هلن هندسه» به این منحنی زیبا و تاریخ‌ساز برازنده دانسته شده است. افزون بر این، مطالبی در خصوص پیدایش حساب تغییرات بیان و مسئله کوتاه‌ترین زمان به‌عنوان مسئله‌ای در این حوزه مطرح شده است. همچنین، روش‌های مختلف حل مسئله کوتاه‌ترین زمان بررسی که برخی از این روش‌ها از دل تاریخ ریاضیات اقتباس شده‌اند. در انتها، چند رویه در نرم‌افزار میپل معرفی شده که به کمک آن‌ها می‌توان مسیرهای بهینه را برای ثبت کمترین زمان حرکت مهره بین دو نقطه تحلیل کرد. این رویه‌ها امکان مقایسه نتایج حاصل از حل مسئله در مسیرهای مختلف را، هم به صورت نموداری و هم با محاسبه شاخص عددی عملکرد (یعنی زمان طی مسیر)، فراهم می‌کنند.

مراجع

- [1] E. H. Abdul-Hafidh, A new approach to solve the Brachistochrone problem by constructing a lattice unit cell, *Helvion*, 8 no. 12 (2022) e11994.
- [2] R. M. Beekman, Proof without Words: Area under a Cycloid Cusp, *Math. Mag.*, 66 (1993) no. 1 39–39.
- [3] E. T. Bell, *Men of mathematics*, Simon & Schuster, New York, 1937.

- [4] G. P. Benham, C. Cohen, E. Brunet and C. Clanet, Brachistochrone on a velodrome, *Proc. A.*, **476** no. 2238 (2020) 18 pp.
- [5] J. Bernoulli, Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur [A new problem to whose solution mathematicians are invited], *Acta Eruditorum*, **18** (1696) p. 269.
- [6] J. Bernoulli, Jacobi Bernoulli solutio problematum fraternorum. *Acta Eruditorum*, Leipzig, **214** (1697) p. 214.
- [7]] G. Brookfield, Yet another elementary solution of the brachistochrone problem, *Math. Mag.*, **83** no. 1 (2010) 59–63.
- [8] B. Brunt, *The Calculus of Variations*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [9] S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the common reader*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.
- [10] P. G. Ciarlet and C. Mardare, On the brachistochrone problem, *Commun. Math. Anal. Appl.*, **1** (2022) no. 1 213–240.
- [11] L. G. B. De Sousa and L. P. F. Lima, An educational product based on the brachistochrone problem, *Int. J. Prof. Bus. Rev.*, **9** no. 5 (2024) 18 p.
- [12] *Deterministic and stochastic dynamics: Introduction to the calculus of variations (2016)*, The Open University, Milton Keynes, United Kingdom. <http://www.open.edu/openlearn/ocw/mod/resource/view.php?id=72745>.
- [13] L. Euler, The method of finding plane curves that show some property of maximum or minimum, Lausanne and Geneva, (1744).
- [14] W. H. Fleming and R. W. Rishel, *Deterministic and stochastic optimal control*, Applications of Mathematics, **1**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
- [15] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled markov processes and viscosity solutions*, Springer-Verlag, 2006.
- [16] G. Galilei, *Dialogues concerning two new sciences*, Dover, 1914.
- [17] H. H. Goldstine, *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, **5**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
- [18] S. S. Lemak and M. D. Belousova, The brachistochrone problem with constraints on the curvature of the trajectory, *IFAC-PapersOnLine*, **54** no. 13 (2021) 437–442.
- [19] A. K. Mallik, Optimization problems in elementary geometry, *Resonance*, **13** (2008) 561–582.
- [20] J. Martin, The Helen of geometry, *College Math. J.*, **41** no. 1 (2010) 17–28.
- [21] S. Michel, The International Year of Basic Sciences for a Sustainable Development: 8 July 2022–6 October 2023, *Nuclear Physics News*, **32** no. 4 (2022) 3–4.
- [22] R. M. Mills, *General relativity for students*, Wiley, 2012.
- [23] R. B. Nelsen, *Proofs without words: Exercises in visual thinking (Classroom Resource Materials)*, 1993.
- [24] Y. Nishiyama, The brachistochrone curve: The problem of quickest descent, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **82** no. 3 (2013) 409–419.
- [25] P. J. Phillips, Brachistochrone, tautochrone, cycloid—apple of discord, *Math. Teacher*, **60** no. 5 (1967) 506–508.
- [26] E. R. Pinch, *Optimal control and the calculus of variations*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.
- [27] I. B. Russak, Calculus of variations MA 4311 lecture notes, Mathematics, Economics, (2002).
- [28] R. A. Silverman, *Calculus with analytic geometry*, Prentice-Hall, Inc. United States, 1985.
- [29] G. F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, Third edition, Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2017.
- [30] J. Stewart, D. K. Clegg and S. Watson, *Calculus: Early Transcendentals*, (9th Edition), Toronto: Cengage Learning, 2021.

- [31] D. J. Struik, *A source book in mathematics, 1200-1800*, 445, Princeton University Press, 2014.
- [32] P. Sun, Y. Liu and X. Huang, Exploring the brachistochrone (shortest-time) path in fire spread, *Scientific Reports*, 12 no. 1 (2022).
- [33] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, F. R. Giordano and R. Korkmaz, *Thomas' calculus*, 12, Boston: Pearson, 2010.
- [34] J. Yoder, *Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [35] E. A. Whitman, Some historical notes on the cycloid, *Amer. Math. Monthly*, 50 (1943) 309-315.
- [36] R. Wilson, World mathematical year 2000, *The Mathematical Intelligencer*, 23 (2001) pp. 76.
- [۳۷] ا. اکبرلو، خ. قلی‌او. مسائل کاربردی در ریاضیات عالی، تبریز، انتشارات محب‌المهدی، ۱۳۸۲.
- [۳۸] کیث. ر. سایمون، ترجمه ا. نیرومندراد و غ. ح. همدانی. مکانیک، تهران، دانشگاه صنعتی شریف، مؤسسه انتشارات علمی، ۱۳۸۵.
- [۳۹] پ. شهریاری، سرگذشت ریاضیات، تهران انتشارات مهاجر، سال ۱۳۸۰.
- [۴۰] ب. کفاش، منحنی چرخ‌زاد یا هِلِن هندسه: یادداشت‌های تاریخی و کاربردها، نوزدهمین کنفرانس ملی آموزش ریاضی ایران، ۱۹ (۱۴۰۳) ۱-۱۲.
- [۴۱] س. ع. م. محسنی الحسینی و د. سنمار، خانواده برنولی وحل معادله دیفرانسیل برنولی، ریاضی و جامعه، ۳ no. ۲ (۱۳۹۷) ۴۵-۵۸.
- [۴۲] م. سلیمانی ملکان، قضیهٔ ماس روبندهٔ مامیکن، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۲ no. ۱ (۱۴۰۲) ۱۲۹-۱۶۳.

پیوست آ. برنامه‌های کامپیوتری با نرم‌افزار میپل

در این بخش، برنامه‌های کامپیوتری مربوط به حل مسأله کوتاه‌ترین زمان با استفاده از نرم‌افزار میپل ارائه شده است.

رویه آ.۱. این کد برای حل مسئله کوتاه‌ترین زمان با استفاده از منحنی چرخ‌زاد و نمایش آن در سیستم مختصات دو بعدی طراحی شده است. در ابتدا معادلات پارامتری منحنی چرخ‌زاد تعریف می‌شوند و سپس مقادیر مجهول r و t به دست می‌آیند. سپس، منحنی چرخ‌زاد به همراه نقطه‌های مبدا و مقصد رسم می‌شود. همچنین، زمان بهینه حرکت از نقطه مبدا به مقصد محاسبه و نمایش داده می‌شود.

```

1 restart;
2 with(plots); with(plottools);
3 Brachistochrone := proc(x_1, y_1)
4   local g, x, y, r, t, s, Point, Cycloid;
5   g := 9.80665;
6   x := t -> r*(t - sin(t));
7   y := t -> r*(1 - cos(t));
8   assign(fsolve({x(t) = x_1, y(t) = y_1}, {r, t}));
9   Point := pointplot([[0, 0], [x_1, -y_1]], color = [red, blue], symbol =
      solidcircle, symbolsize = 20);
10  Cycloid := plot([x(s), -y(s), s = 0 .. t], color = blue, thickness = 4);
11  print(t*sqrt(r/g));
12  print(Pi*sqrt(r/g));
13  display(Point, Cycloid);
14 end proc;
```

رویه آ.۲. این کد برای رسم مسیر خطی و محاسبه زمان عبور از این مسیر استفاده می‌شود. در اینجا ابتدا شیب خط با استفاده از نقاط ورودی محاسبه شده و مسیر خطی با استفاده از معادله خط حاصل رسم می‌شود. در نهایت، زمان لازم برای عبور از این مسیر محاسبه و به همراه نقطه مبدا به مقصد نمایش داده می‌شود.

```

1 Line := proc(x_1, y_1)
2   local g, m, Point, Line;
3   g := 9.80665;
4   m := y_1/x_1;
5   Point := pointplot([[0, 0], [x_1, -y_1]], color = [red, brown],
6     symbol = solidcircle,
7     symbolsize = 20);
8   Line := plot(-m*x, x = 0 .. x_1, color = blue, thickness = 4);
9   print(sqrt(2*x_1*(y_1^2 + x_1^2)/(y_1*g)));
10  display(Point, Line);
11 end proc:
    
```

رویه آ.۳. این کد برای رسم مسیر دایره‌ای و محاسبه زمان عبور از این مسیر استفاده می‌شود. معادلات پارامتری برای مسیر دایره‌ای تعریف می‌شوند و سپس شعاع دایره با استفاده از مختصات نقاط ورودی محاسبه می‌شود. زمان عبور از مسیر دایره‌ای نیز محاسبه و به همراه نقطه مبدا به مقصد نمایش داده می‌شود.

```

1 Circle := proc(x_1, y_1)
2   local g, x, y, r, t, s, Point, Circle;
3   g := 9.80665;
4   x := t -> r*(1 - cos(t));
5   y := t -> r*sin(t);
6   r := 1/2*(y_1^2 + x_1^2)/x_1;
7   t_1 := arccos(1 - x_1/r)
8   Point := pointplot([[0, 0], [x_1, -y_1]], color=[red, brown],
9     symbol = solidcircle, symbolsize = 20);
10  Circle := plot([x(s), -y(s), s = 0 .. t_1], color = blue,
11    thickness = 4);
12  print(int(sqrt(1/2*(diff(x(s), s)^2 + diff(y(s), s)^2)/(g*y(s)
13    )), s = 0 .. t));
14  display(Point, Circle);
15 end proc:
    
```

رویه آ.۴. این کد برای مقایسه سه مسیر مختلف (چرخ‌زاد، دایره‌ای و خط) طراحی شده است. با استفاده از این کد، مسیرهای مختلف نمایش داده می‌شوند و زمان عبور از هر مسیر برای مقایسه محاسبه می‌شود.

```
1 Comparison := proc(x_1, y_1)
2   display(Brachistochrone(x_1, y_1), Circle(x_1, y_1), Line(x_1, y_1));
3 end proc;
```

بهزاد کفاش

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران.

ایمیل: bkafash@ardakan.ac.ir

بهزاد کفاش، متولد یزد و دانش‌آموخته دوره کارشناسی در رشته ریاضی محض است. وی دوره کارشناسی ارشد خود را در رشته ریاضی کاربردی در دانشگاه یزد به پایان رسانده و سپس موفق به اخذ درجه دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی با گرایش کنترل بهینه از همان دانشگاه شده است. در حال حاضر، وی به عنوان دانشیار در دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه اردکان مشغول به فعالیت است. حوزه‌های پژوهشی مورد علاقه وی شامل روش‌های حل مسائل حساب تغییرات، کنترل بهینه قطعی و تصادفی، همچنین کاربردهای مرتبط با این زمینه‌ها است.

