

## GENERATION OF SYMMETRICAL PATTERNS USING DISCRETE DYNAMICAL SYSTEM

MORTEZA BISHEH-NIASAR 

**ABSTRACT.** Nowadays symmetrical patterns are widely used in various industries, such as jewelry design, carpet design, patterns on wallpaper, and textile design. During the design stage, designers perform most of the work manually. Therefore, the development of methods for symmetrical pattern generation is beneficial. In this paper, we are going to present some methods for generating symmetrical patterns using the discrete dynamical system. For this, the discrete dynamical system is considered as a standard iterative method, and then the general algorithm applied for Polynomiography is used for this to generate patterns. Through phase portrait, we analyze the conditions of the existence of some conventional symmetries. Several non-standard iterative methods can be employed to create a variety of visually appealing patterns. These methods include Mann iteration, Ishikawa iteration, and S-iteration which we use them. Through numerous examples, it is demonstrated that by manipulating the parameters and coefficients, it is possible to generate beautiful symmetrical patterns that have potential artistic applications.

### 1. Introduction

Symmetrical patterns have been used since ancient times in various industries, such as jewelry design, carpet design, and fabric design. Today, with the increasing use of computers, the generation of symmetrical patterns is carried out by computers and algorithms. In this work, we demonstrate how to utilize iterative processes, discrete dynamical systems, and the applied algorithm for Polynomiography

Keywords: Discrete dynamical system, sequence, convergence, pattern.

Article Type: Promotional Paper.

Communicated by Saeid Maghsoudi. Received: 30-03-2024, Accepted: 07-08-2024, Published Online: 17-04-2025.

**Cite this article:** M. Bisheh-Niasar, Generation of symmetrical patterns using discrete dynamical system, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 2 (2025) 27–46.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141065.1654> .

to generate aesthetic and symmetrical patterns. To get to know Polynomiography, refer to [9, 10, 2, 1, 8, 3].

This paper is structured as follows: in section 2, we introduce some non-standard iteration processes and an algorithm to generate symmetrical patterns. In section 3, some basic information on generating symmetrical patterns from discrete dynamical systems is presented. We present various examples of symmetrical patterns obtained from the proposed technique in section 4. Finally, section 5 contains the conclusion.

## 2. Overview of iterative methods

We can express an iterative method as the general form

$$(2.1) \quad X_{n+1} = T(X_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

In the above iterative method, the sequence  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  is named the orbit of the starting point  $X_0$ . Our objective is to create patterns, so based on the method (2.1), we can formulate the following non-standard iterative techniques:

1. Mann iteration (which is a one-step iteration):

$$(2.2) \quad X_{n+1} = (1 - \alpha)X_n + \alpha T(X_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

2. Ishikawa iteration (which is a two-step iteration):

$$(2.3) \quad \begin{cases} X_{n+1} = (1 - \alpha)X_n + \alpha T(V_n), \\ V_n = (1 - \beta)X_n + \beta T(X_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

3.  $S$ -iteration (which is a two-step iteration):

$$(2.4) \quad \begin{cases} X_{n+1} = (1 - \alpha) T(X_n) + \alpha T(V_n), \\ V_n = (1 - \beta)X_n + \beta T(X_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

where  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ . Moreover, we notice that the iteration for particular values of the parameters can be reduced to other iterations. For instance, if we take  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , the above non-standard methods reduce to the standard method (2.1). Also, with  $\beta = 0$ , Ishikawa reduces to Mann. Unlike most works, in which constant parameters have been used, we can apply variable parameters and consider  $\alpha = \alpha_n$  and  $\beta = \beta_n$  [2]. A review of various nonstandard iterations and their dependencies can be found in [5].

To generate patterns, it is sufficient to apply an iterative method in the complex plane, it means  $X_n = (x_n, y_n)^T$ . We need a stop criterion or a convergence test in the iteration processes. In this work, we use the following standard convergence test

$$(2.5) \quad \|X_{n+1} - X_n\|_2 = \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \leq \epsilon,$$

where  $\epsilon > 0$  is a given accuracy and  $X_n, X_{n+1}$  are two successive points in an iterative process. In [6, 7], Gdawice proposed some different convergence tests, for instance

$$\begin{aligned} & (|x_{n+1} - x_n|^q + |y_{n+1} - y_n|^q)^{\frac{1}{q}} < \epsilon, \\ & |(a|x_{n+1} - x_n|^q - (b|y_{n+1} - y_n|^r)| < \epsilon, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad q, r \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Now, we can use the following algorithm to generate patterns [2, 1, 7]:

---

**Algorithm 1:** Iteration colouring.

---

**Input:**  $A \subset \mathbb{C}$  – area,  $K$  – maximum number of iterations,  $I$  – iteration method,  $C$  – convergence test.

**Output:** a symmetrical pattern on the area  $A$ .

```

1 for  $X_0 \in A$  do
2    $i = 0$ 
3   while  $i \leq K$  do
4      $X_{i+1} = I(X_i)$ 
5     if  $C(X_i, X_{i+1}) = true$  then
6       break
7      $i = i + 1$ 
8   determine the colour for  $X_0$  according to  $i$ .
```

---

### 3. symmetry in a discrete dynamical system

Dynamical systems are mathematical models that contain rules describing how a quantity changes over time. In this work, we consider the following discrete dynamical system [7, 4]

$$(3.1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - f(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = y_n - g(x_n, y_n). \end{cases}$$

where  $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$  and  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  are known functions. We can consider the above form as an iterative process and apply the defined algorithm for it. In what follows, we will explore certain conditions under which the resulting patterns exhibit a unique symmetry.

■ Translation Symmetry: Suppose that the pattern has a period  $T$  along the  $x$ -axis. Thus, the phase portrait must have this property and

$$(3.2) \quad \begin{cases} x_{n+1} + T = (x_n + T) - f(x_n + T, y_n), \\ y_{n+1} = y_n - g(x_n + T, y_n). \end{cases}$$

by comparing (3.1) and (3.2), we have

$$(3.3) \quad f(x_n + T, y_n) = f(x_n, y_n), \quad g(x_n + T, y_n) = g(x_n, y_n).$$

Similarly, if the pattern has a period  $T^*$  along the  $y$ -axis, the following relation must be held:

$$(3.4) \quad f(x_n, y_n + T^*) = f(x_n, y_n), \quad g(x_n, y_n + T^*) = g(x_n, y_n)$$

■ **Reflective Symmetry:** Suppose that the pattern has reflective symmetry about the  $x$ -axis. Thus, the phase portrait must have this property and

$$(3.5) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - f(x_n, -y_n), \\ -y_{n+1} = -y_n - g(x_n, -y_n). \end{cases}$$

by comparing (3.1) and (3.5), it results that in order to satisfy this property, the following relations must be held:

$$(3.6) \quad f(x, y) = f(x, -y), \quad g(x, -y) = -g(x, y);$$

Similarly, if the pattern has reflective symmetry about the  $y$ -axis, then

$$(3.7) \quad \begin{cases} -x_{n+1} = -x_n - f(-x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n - g(-x_n, y_n). \end{cases}$$

by comparing (3.1) and (3.7), it results that

$$(3.8) \quad f(-x, y) = -f(x, y), \quad g(-x, y) = g(x, y).$$

Consequently, if we want to have reflective symmetry about both the  $x$ -axis and  $y$ -axis, it is sufficient to have the following properties:

$$(3.9) \quad \begin{cases} f(x, y) = f(x, -y) = -f(-x, y), \\ g(x, y) = -g(x, -y) = g(-x, y). \end{cases}$$

■ **Glide Reflective Symmetry:** One of the seen symmetries in nature and art is glide reflective symmetry. Suppose that the pattern has a period  $T$  along the  $x$ -axis and a glide reflection in the same direction. Therefore the phase portrait must have these properties and

$$(3.10) \quad f(x, y) = f(x + \frac{T}{2}, -y), \quad -g(x, y) = g(x + \frac{T}{2}, -y).$$

Similarly, if we want these properties to satisfy along the  $y$ -axis, then

$$(3.11) \quad -f(x, y) = f(-x, y + \frac{T}{2}), \quad g(x, y) = g(-x, y + \frac{T}{2}).$$



■ **Rotational Symmetry:** If we want to obtain a pattern with a rotational symmetry with angle  $\theta$ , then the functions  $f, g$  should fulfill the following conditions [7, 4]:

$$(3.12) \quad f(x'', y'') - 2 \cos(\theta)f(x', y') + f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = \frac{\cos(\theta)f(x, y) - f(x', y')}{\sin(\theta)};$$

where

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} &= R_\theta \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

For example, in rotational symmetry with respect to  $\theta = 90^\circ$ , the functions  $f$  and  $g$  should satisfy the following conditions:

$$(3.13) \quad f(x, y) = -f(-x, -y), \quad f(x, y) = f(x + T, y) = f(x, y + T), \quad g(x, y) = -f(-y, x).$$

To apply the non-standard iterative methods to generate a symmetrical pattern, it is sufficient to rewrite the discrete dynamical system in standard form  $p_{n+1} = T(p_n)$ , where

$$(3.14) \quad p_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad T(p_n) = \begin{bmatrix} x_n - f(x_n, y_n) \\ y_n - g(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$$

Therefore, the Mann, Ishikawa and  $S$ -iteration are defined respectively as follows:

$$(3.15) \quad p_{n+1} = (1 - \alpha_n)p_n + \alpha_n T(p_n),$$

$$(3.16) \quad \begin{cases} p_{n+1} = (1 - \alpha_n)p_n + \alpha_n T(u_n) \\ u_n = (1 - \beta_n)p_n + \beta_n T(p_n) \end{cases},$$

$$(3.17) \quad \begin{cases} p_{n+1} = (1 - \alpha_n)T(p_n) + \alpha_n T(u_n) \\ u_n = (1 - \beta_n)p_n + \beta_n T(p_n) \end{cases}.$$

#### 4. EXAMPLES

In this section, we perform a series of experiments to generate symmetrical patterns. Algorithm 1 has been implemented in Matlab. In all examples, we consider the convergence test

$$(4.1) \quad \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \leq 0.1,$$

and the maximum number of iterations  $K = 50$ . Fig (1) presents some patterns obtained using Algorithm 1. The functions used to generate these patterns have been listed as follows:

$$(4.2) \quad (A) : \begin{cases} f(x, y) = \sin^3(x) \cos(y) \\ g(x, y) = \cos(2x) \sin^2(y), \end{cases}$$

$$(4.3) \quad (B) : \begin{cases} f(x, y) = \sin(x) \cos(y) \\ g(x, y) = \cos(2x) \sin^3(\sqrt{5}y), \end{cases}$$

$$(4.4) \quad (C) : \begin{cases} f(x, y) = 0.4 \sin(x) \cos(\sqrt{5}y) - 0.2 \sin(y) \cos(\sqrt{5}x) \\ g(x, y) = 0.4 \sin(y) \cos(\sqrt{5}x) + 0.2 \sin(x) \cos(\sqrt{5}y), \end{cases}$$

$$(4.5) \quad (D) : \begin{cases} f(x, y) = 0.4 \sin(\sqrt{2}x) \cos(2y) + 0.2 \sin(3.2x) \cos(y) \\ g(x, y) = 0.4 \sin(y) \cos(2x) + 0.2 \sin(2y) \cos(x). \end{cases}$$

As seen, by varying of some the coefficients, the new different patterns are generated. Now, in order to use non-standard iterations and to investigate the efficiency of parameters, consider the following functions:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0.4 \sin(x) \cos(2y) - 0.2 \sin(x) \cos(2x) \\ g(x, y) &= 0.4 \sin(y) \cos(2x) + 0.2 \sin(x) \cos(2y) \end{aligned}$$

Fig (2) presents some generated patterns using the above functions. The applied parameters are shown in Table (1).

TABLE 1. The applied parameters to generat pattern.

pattern	parameter	iterative method
$E$	-	standard
$F$	$\alpha(n) = 0.45$	Mann
$G$	$\alpha(n) = \cos(\sqrt{7}n), \beta(n) = \frac{n+1}{n}$	$S$ -iteration
$H$	$\alpha(n) = \cos(\sqrt{5}n), \beta(n) = \frac{n^2+1}{n^2}$	$S$ -iteration

## 5. CONCLUSIONS

In this article, we tried to produce symmetrical patterns by using the concept of convergence of the sequences generated by the discrete dynamic system. In order to generate attractive patterns, we also used the non-standard forms of iterative processes. We observed that with small changes, various patterns are produced. This method can be used in some industries such as making tiles, decorating clothes, etc. Also, these symmetrical patterns can be used in students' stationery, such as notebooks,

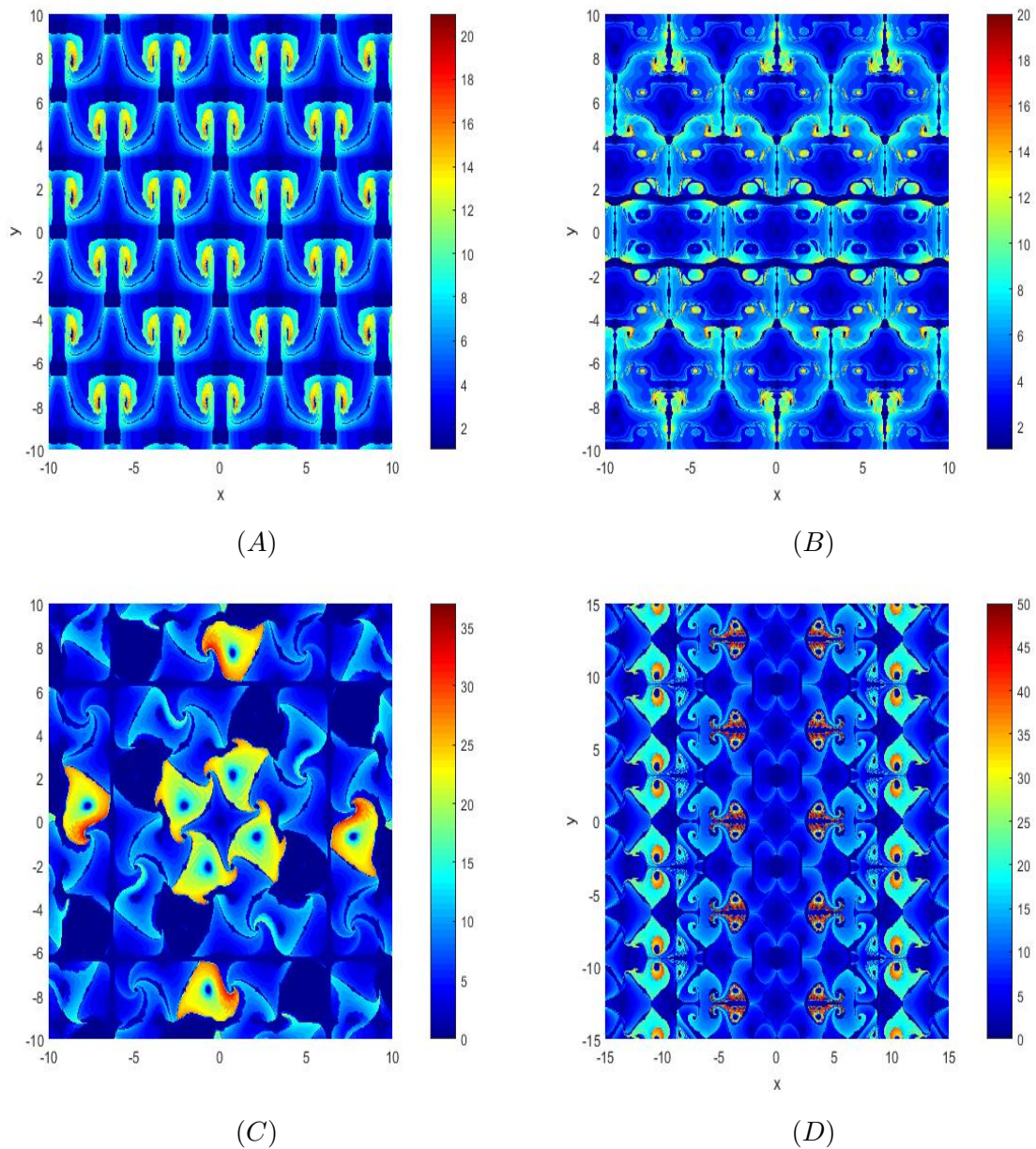


FIGURE 1. Examples of obtained patterns.

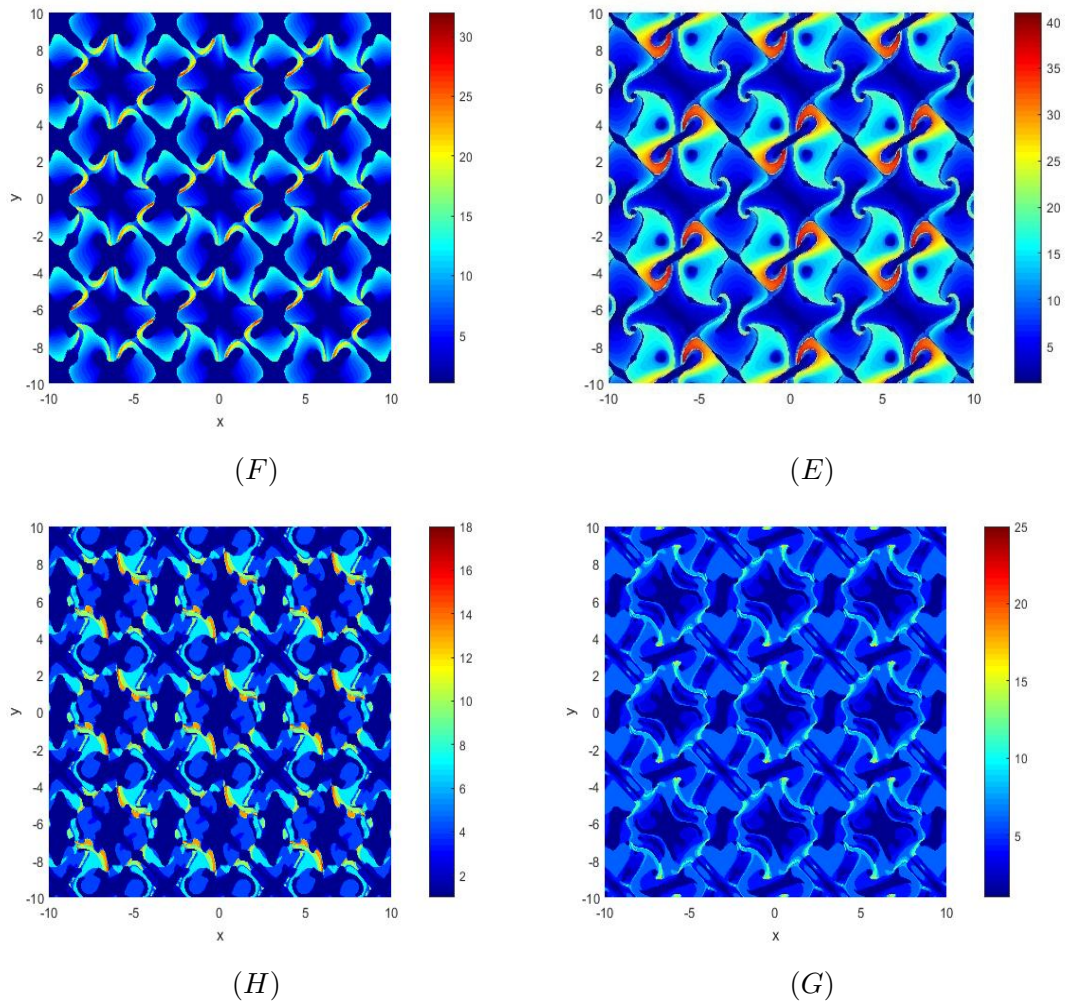


FIGURE 2. Examples of obtained patterns.

along with their simple and concise explanations. This causes an increase in students' interest in mathematical concepts.

**Morteza Bisheh-Niasar**

Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, P.O.Box 8731753153, Kashan, Iran

Email: [mbisheh@kashanu.ac.ir](mailto:mbisheh@kashanu.ac.ir)



## تولید طرح‌های متقارن با استفاده از دستگاه دینامیکی گسسته

مرتضی بیشه‌نیاسر<sup>id</sup>

چکیده. طرح‌های متقارن امروزه در صنایع مختلفی مانند طراحی جواهرات، طراحی فرش و گلیم، نقش و نگار روی کاغذ دیواری، طراحی پارچه و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مرحله طراحی، بیشتر کارها توسط یک طراح و به صورت دستی انجام می‌شود. بنابراین گسترش روش‌هایی به منظور تولید طرح‌های متقارن مفید خواهد بود. در این مقاله قصد داریم روش‌هایی برای تولید طرح و الگوی متقارن با استفاده از نظریه دستگاه‌های دینامیکی گسسته ارائه دهیم. برای این امر دستگاه دینامیکی گسسته به صورت یک روش تکراری استاندارد در نظر گرفته می‌شود و سپس از الگوریتم عمومی به کار گرفته شده برای چندجمله‌ای‌نگاری، در تولید طرح و الگو استفاده می‌شود. شرایط وجود برخی از تقارن‌های مرسوم را به وسیله نمای فاز مورد بررسی و تحلیل قرار می‌دهیم. همچنین از روش‌های تکراری غیراستاندارد نظیر مان، ایشیکاوا و  $S$ -تکرار نیز برای ایجاد الگوهای بصری جذاب استفاده می‌کنیم. به وسیله چندین مثال نشان خواهیم داد که با تغییر و دستکاری هر یک از پارامترها و ضرایب، طرح‌های گوناگون و زیبایی حاصل می‌شوند که کاربرد هنری بالقوه‌ای دارند.

### ۱. مقدمه

استفاده از طرح‌ها و الگوهای متقارن از قدیم تاکنون در صنایع مختلفی نظیر طراحی جواهرات، طراحی فرش و گلیم و طراحی پارچه مرسوم بوده است. تا قبل از پیدایش رایانه این الگوها توسط شخص و به صورت دستی طراحی می‌شد، اما با پیدایش رایانه و نرم‌افزارهای مختلف، تلاش شد فرآیند طراحی الگوها به رایانه سپرده شود و تاکنون نرم‌افزارهای مختلفی در این زمینه طراحی شده است.

علاقمندان به ریاضی نیز سعی نموده‌اند از مباحث مختلف ریاضی در زمینه تولید طرح و الگوهای متقارن استفاده کنند. یکی از این مباحث روش‌های تکراری است. از ابزارهای تولید طرح و الگوی متقارن توسط روش‌های تکراری، می‌توان به چندجمله‌ای‌نگاری اشاره کرد که توسط کلانتری در ۲۰۰۴ ابداع شد [۸] و بعد از آن محققان زیادی به توسعه آن پرداختند. اساس و مبنای چندجمله‌ای‌نگاری، تقریب ریشه‌های چندجمله‌ای مختلط به وسیله روش‌های تکراری است، که در نهایت منجر به تولید تصاویر فرکتالی و غیرفرکتالی زیبایی می‌شود. محققان در این حوزه با روش‌های تکراری مختلف، تغییر پارامترها و معیارهای توقف گوناگون توانسته‌اند طرح‌های زیبا و مقارنی به دست آورند. اخیراً نیز به منظور بسط و گسترش چندجمله‌ای‌نگاری و تولید طرح‌های متنوع، سعی شده از مشتقات کسری به جای مشتقات معمولی استفاده شود. علاقمندان می‌توانند برای آشنایی بیشتر با چندجمله‌ای‌نگاری به مراجع [۸، ۹، ۲، ۱، ۷، ۱۰] مراجعه کنند.

در این مقاله سعی داریم در بخش ۲، به بیان مفاهیم کلی از روش‌های تکراری بپردازیم و چندین روش تکراری غیراستاندارد معرفی کنیم و الگوریتمی را به منظور تولید طرح به وسیله روش‌های تکراری بیان کنیم. سپس در بخش ۳، به بررسی شرایطی می‌پردازیم

عبارات و کلمات کلیدی: دستگاه دینامیکی گسسته- دنباله- همگرایی- طرح.

نوع مقاله: ترویجی

دبیر تخصصی رابط: سعید مقصودی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۱۳ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۱/۲۸

ارجاع به مقاله: م. بیشه‌نیاسر، تولید طرح‌های متقارن با استفاده از دستگاه دینامیکی گسسته، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۲ (۱۴۰۴) ۲۷-۴۶.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141065.1654>

که تحت آن، طرح حاصل شده توسط دستگاه دینامیکی گسسته دارای تقارن‌های خاص می‌باشد. در بخش ۴، با استفاده از نرم‌افزار متلب<sup>۱</sup> و شرایط بیان شده چندین طرح متقارن زیبا تولید می‌کنیم. بخش آخر نیز به نتیجه‌گیری، اختصاص یافته است.

## ۲. کلیاتی از روش‌های تکراری

یک روش تکراری را در حالت کلی می‌توانیم به شکل استاندارد

$$(۱) \quad X_{n+1} = T(X_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

نمایش دهیم. در روش تکراری فوق دنباله  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  حاصل شده را مدار نقطه آغازین  $X$  می‌نامند. چون هدف استفاده از روش‌های تکراری، تولید طرح و الگو است، پس می‌توان بر اساس روش تکراری (۱)، روش‌های تکراری غیراستاندارد زیر را تعریف کرد [۴]:

(الف) روش تکراری «مان<sup>۲</sup>»:

$$(۲) \quad X_{n+1} = (1 - \alpha)X_n + \alpha T(X_n).$$

(ب) روش تکراری «ایشیکاوا<sup>۳</sup>»:

$$(۳) \quad \begin{cases} X_{n+1} = (1 - \alpha)X_n + \alpha T(V_n), \\ V_n = (1 - \beta)X_n + \beta T(X_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

(ج) روش  $S$ -تکرار:

$$(۴) \quad \begin{cases} X_{n+1} = (1 - \alpha) T(X_n) + \alpha T(V_n), \\ V_n = (1 - \beta)X_n + \beta T(X_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

در روابط فوق  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ . توجه داشته باشیم که در روش‌های فوق با انتخاب  $\alpha = 1$  و  $\beta = 0$ ، سه روش ذکر شده به روش استاندارد (۱) تبدیل خواهند شد و با انتخاب  $\beta = 0$ ، روش ایشیکاوا به روش مان تقلیل خواهد یافت. به مانند چندجمله‌ای‌نگاری به‌کار گرفته شده در [۲] می‌توان این محدودیت‌ها را لغو کرد و  $\alpha, \beta$  را به‌عنوان متغیری بر حسب تکرار در نظر گرفت. روش‌های تکراری غیراستاندارد دیگری هم در برخی مقالات معرفی شده‌اند که علاقمندان می‌توانند به [۴] مراجعه کنند. برای تولید طرح و الگو کافی است روش تکراری روی صفحه به‌کار گرفته شود یعنی  $X_n = (x_n, y_n)^t$ . برای توقف تکرارهای روش، می‌توان از محک استاندارد

$$(۵) \quad \|X_{n+1} - X_n\|_2 = \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \leq \epsilon,$$

استفاده کرد. در [۵، ۶] معیارهای توقف مختلفی معرفی شده‌اند، از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

$$(|x_{n+1} - x_n|^q + |y_{n+1} - y_n|^q)^{\frac{1}{q}} < \epsilon,$$

$$|(a|x_{n+1} - x_n|^q - (b|y_{n+1} - y_n|^r)| < \epsilon, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad q, r \in \mathbb{R}_+.$$

حال پس از بیان مقدمات، می‌توان الگوریتم ۱ را بر اساس روش‌های تکراری به‌منظور تولید طرح مورد استفاده قرار داد. در الگوریتم ۱ مقدار  $K$  حداکثر تکرار در نظر گرفته شده برای فرایند تکراری است. چنانچه طی  $K$  تکرار شرط توقف برقرار نشود، فرض بر همگرا نبودن دنباله  $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$  خواهد بود. با اعمال الگوریتم روی نقاط ناحیه  $A$  یک طرح زیبا حاصل خواهد شد.

<sup>۱</sup>Matlab <sup>۲</sup>Mann <sup>۳</sup>Ishikawa

## الگوریتم ۱ الگوریتم روش‌های تکراری

ورودی:  $A \subset \mathbb{C}$ ، حداکثر تکرار، روش تکراری و معیار توقف را انتخاب کنید  
خروجی: طرح و الگوی متقارن

شروع

۱: قرار دهید  $i = 0$ .۲:  $X_0 \in A$  را انتخاب کنید.۳: اگر  $i < K$  به مرحله (۴) بروید، در غیر این صورت به مرحله (۷) بروید.۴:  $X_{i+1}$  را برحسب یکی از روش‌های تکراری استاندارد یا غیراستاندارد بیابید و به مرحله (۵) بروید.

۵: اگر شرط توقف برقرار است به مرحله (۷) بروید، در غیر این صورت به مرحله (۶) بروید.

۶:  $i = i + 1$  و به مرحله (۳) بروید.۷: نقطه  $X_0$  را برحسب مقدار نهایی  $i$  رنگ کن.

پایان

## ۳. تقارن در دستگاه دینامیکی گسسته

دستگاه دینامیکی یکی از شاخه‌های پرکاربرد در ریاضی است. دستگاه‌های دینامیکی، مدل‌های ریاضی هستند که چگونگی تغییر پارامترها را در طول زمان توصیف می‌کنند و در واقع می‌توان گفت دستگاه‌های دینامیکی بخش جدایی‌ناپذیر پدیده‌های اطراف ما هستند. دستگاه دینامیکی گسسته در فضای ۲-بعدی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت [۳، ۶]:

$$(۶) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - f(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = y_n - g(x_n, y_n). \end{cases}$$

دستگاه فوق را می‌توان به عنوان یک روش تکراری در نظر گرفت و در الگوریتم بیان شده در بخش قبل برای تولید طرح مورد استفاده قرار داد. در این بخش شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن، طرح تولید شده توسط دستگاه دینامیکی گسسته از تقارن‌های خاص برخوردار باشد.

الف) فرض کنیم که طرح مورد نظر دارای دوره تناوب  $T$  در راستای محور افقی  $x$  باشد. برای این منظور نمای فاز حاصل از دستگاه (۶) نیز بایستی این خاصیت را دارا باشد، یعنی

$$(۷) \quad \begin{cases} x_{n+1} + T = (x_n + T) - f(x_n + T, y_n), \\ y_{n+1} = y_n - g(x_n + T, y_n). \end{cases}$$

با مقایسه (۶) و (۷) مشاهده می‌کنیم که باید رابطه

$$(۸) \quad f(x_n + T, y_n) = f(x_n, y_n), \quad g(x_n + T, y_n) = g(x_n, y_n);$$

برقرار باشد. به طور مشابه اگر بخواهیم طرح مورد نظر دارای تناوب  $T^*$  در راستای محور قائم  $y$  باشد باید رابطه

$$(۹) \quad f(x_n, y_n + T^*) = f(x_n, y_n), \quad g(x_n, y_n + T^*) = g(x_n, y_n)$$

برقرار باشد. بنابراین به منظور حفظ تناوب چه در راستای افقی یا قائم، بایستی خاصیت تناوب توسط توابع  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  حفظ شود.

ب) تقارن آینه‌ای افقی و قائم: فرض کنیم طرح مورد نظر نسبت به محور افقی  $x$  متقارن است. بنابراین نمای فاز حاصل از روش تکراری (۶) نیز باید این خاصیت را دارا باشد. لذا

$$(10) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - f(x_n, -y_n), \\ -y_{n+1} = -y_n - g(x_n, -y_n). \end{cases}$$

با مقایسه رابطه (۶) با (۱۰) نتیجه می‌شود که به منظور حفظ این خاصیت بایستی روابط زیر برقرار باشد:

$$(11) \quad f(x, y) = f(x, -y), \quad g(x, -y) = -g(x, y);$$

یعنی نسبت به  $y$  تابع  $f(x, y)$  زوج و تابع  $g(x, y)$  فرد باشد. این تقارن را گروه تقارنی  $pm$  می‌نامند. لازم به ذکر است که این گروه تقارنی هیچ چرخشی ندارد. به طور کلی نماد  $m$  به معنای تقارن آینه‌ای نسبت به یکی از محورهای افقی یا قائم است، نه هر دو محور. در گروه‌هایی که این نماد دو بار تکرار شده، تقارن آینه‌ای نسبت به هر دو محور قائم و افقی برقرار است. حال چنانچه بخواهیم تقارن نسبت به محور  $y$  برقرار باشد، به طور مشابه ثابت می‌شود که باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(12) \quad \begin{cases} -x_{n+1} = -x_n - f(-x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n - g(-x_n, y_n). \end{cases}$$

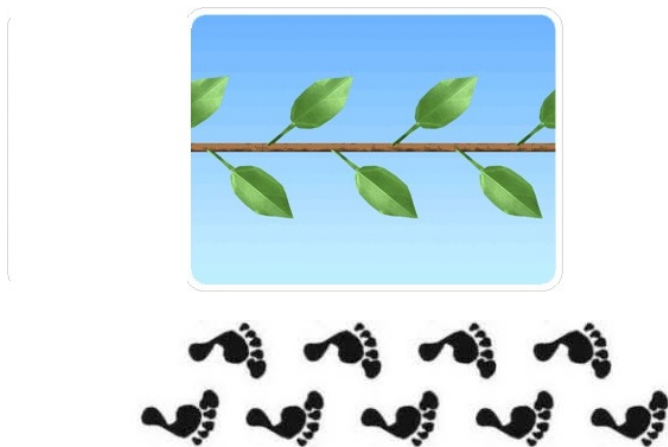
با مقایسه این رابطه با (۶) نتیجه می‌شود که برای حفظ تقارن آینه‌ای نسبت به محور قائم  $y$  بایستی

$$(13) \quad f(-x, y) = -f(x, y), \quad g(-x, y) = g(x, y).$$

یعنی نسبت به متغیر  $x$ ، تابع  $f(x, y)$  فرد باشد و تابع  $g(x, y)$  زوج باشد. حال چنانچه بخواهیم تقارن آینه‌ای همزمان نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  برقرار باشد با توجه به مطالب فوق کفایت

$$(14) \quad \begin{cases} f(x, y) = f(x, -y) = -f(-x, y), \\ g(x, y) = -g(x, -y) = g(-x, y). \end{cases}$$

این نوع تقارن را گروه تقارنی  $p2mm$  می‌نامیم.



شکل ۱. یک نمونه از تقارن انعکاسی سرخورده

Figure 1: Examples of glide reflective symmetry

ج) تقارن انعکاسی سرخورده: یکی از تقارن‌های که به وفور در هنر و طبیعت مشاهده می‌شود، تقارن انعکاسی سرخورده است (شکل ۱ را مشاهده کنید). فرض کنیم طرح مورد نظر دارای تناوب  $T$  در راستای محور  $x$  و یک تقارن آینه‌ای نسبت به محور  $x$  در فاصله  $\frac{T}{4}$  داشته باشد. پس نمای فاز، هم می‌بایست چنین خاصیتی را دارا باشد. با توجه به (الف) و (ب) می‌توان گفت که به‌منظور برقراری این خاصیت باید توابع  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  در روابط زیر صدق کنند:

$$(15) \quad f(x, y) = f\left(x + \frac{T}{4}, -y\right), \quad -g(x, y) = g\left(x + \frac{T}{4}, -y\right);$$

تقارن فوق  $pg$  نامیده می‌شود. چنانچه بخواهیم این خاصیت در راستای محور  $y$  برقرار باشد به‌طور مشابه باید روابط زیر برقرار باشد:

$$(16) \quad -f(x, y) = f\left(-x, y + \frac{T}{4}\right), \quad g(x, y) = g\left(-x, y + \frac{T}{4}\right).$$

د) فرض کنیم طرح مورد نظر دارای دوران چرخشی به اندازه زاویه  $\theta$  باشد. پس باید نمای فاز متناظر با دستگاه دینامیکی گسسته نیز چنین خاصیتی را حفظ کند. برای دوران تحت اندازه زاویه  $\theta$  از ماتریس دوران

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

استفاده می‌کنیم. ثابت می‌شود که توابع  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  باید در شرایط زیر صدق کنند [۳]:

$$(17) \quad f(x'', y'') - 2 \cos(\theta) f(x', y') + f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = \frac{\cos(\theta) f(x, y) - f(x', y')}{\sin(\theta)};$$

که در آن

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

به‌طور مثال ثابت می‌شود، برای گروه تقارنی  $p4$  که همان تقارن چرخشی به اندازه  $90^\circ$  درجه است باید شرایط زیر برای  $f(x, y)$ ،  $g(x, y)$  برقرار باشد:

$$(18) \quad f(x, y) = -f(-x, -y), \quad f(x, y) = f(x + T, y) = f(x, y + T), \quad g(x, y) = -f(-y, x).$$

در جدول ۱ کلیاتی از تقارن‌ها و ترکیب آنها و شرایط لازم برای توابع  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  ذکر شده است [۳]. حال به‌منظور استفاده از روش‌های تکراری غیراستاندارد برای تولید طرح، کافی است دستگاه دینامیکی گسسته را در شکل استاندارد  $p_{n+1} = T(p_n)$  بازنویسی کنیم که

$$(19) \quad p_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad T(p_n) = \begin{bmatrix} x_n - f(x_n, y_n) \\ y_n - g(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$$

با توجه به رابطه فوق می‌توان روش‌های غیراستاندارد مان، ایشیکاوا و  $S$ -تکرار را به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$(20) \quad p_{n+1} = (1 - \alpha_n)p_n + \alpha_n T(p_n),$$

$$(21) \quad \begin{cases} p_{n+1} = (1 - \alpha_n)p_n + \alpha_n T(u_n) \\ u_n = (1 - \beta_n)p_n + \beta_n T(p_n) \end{cases},$$

جدول ۱. چند نمونه از گروه‌های تقارنی و خاصیت آنها

Table 1: Some samples of symmetry groups and their properties

گروه تقارنی	نوع تقارن	شرایط
$pm$	انعکاس آینه‌ای نسبت به $x$	$f(x, y) = f(x, -y), g(x, y) = -g(x, -y)$
$p2mm$	انعکاس آینه‌ای نسبت به هر دو محور $x, y$	$f(x, y) = f(x, -y) = -f(-x, y)$ $g(x, y) = -g(x, -y) = g(-x, y)$
$pg$	انعکاس سرخورده نسبت به محور $x$	$f(x, y) = f(x + \frac{T}{\varphi}, -y), g(x, y) = -g(x + \frac{T}{\varphi}, -y)$
$p2mg$	انعکاس آینه‌ای نسبت به محور $x$ و انعکاس سرخورده نسبت به محور $y$	$f(x, y) = f(x, -y) = -f(-x, y + \frac{T^*}{\varphi})$ $g(x, y) = -g(x, -y) = g(-x, y + \frac{T^*}{\varphi})$
$p2gg$	انعکاس سرخورده نسبت به محور $x, y$	$f(x, y) = f(x + \frac{T}{\varphi}, -y) = -f(x, y + \frac{T^*}{\varphi})$ $g(x, y) = -g(x + \frac{T}{\varphi}, -y) = g(-x, y + \frac{T^*}{\varphi})$
$cm$	انعکاس آینه‌ای نسبت به $x$ و انعکاس سرخورده نسبت به خط $y = \frac{T^*}{\varphi}$	$f(x, y) = f(x, -y) = f(x + \frac{T}{\varphi}, \frac{T^*}{\varphi} - y)$ $g(x, y) = -g(x, y) = -g(x + \frac{T}{\varphi}, \frac{T^*}{\varphi} - y)$
$c2mm$	انعکاس آینه‌ای نسبت به $x, y$ و انعکاس سرخورده نسبت به خط $y = \frac{T^*}{\varphi}$	$f(x, y) = f(x, -y) = -f(-x, y) = -f(\frac{T}{\varphi} - x, \frac{T^*}{\varphi} - y)$ $g(x, y) = -g(x, -y) = g(-x, y) = -g(\frac{T}{\varphi} - x, \frac{T^*}{\varphi} - y)$
$p4$	تقارن چرخشی به اندازه $90^\circ$ درجه	$f(x, y) = -f(-x, -y)$ $g(x, y) = -f(-y, x), T = T^*$
$p4mm$	تقارن چرخشی به اندازه $90^\circ$ درجه و انعکاس آینه‌ای نسبت به محورهای $x, y$	$f(x, y) = -f(-x, y) = -f(-x, -y)$ $g(x, y) = -f(-y, x), T = T^*$
$p4gm$	تقارن چرخشی به اندازه $90^\circ$ درجه و انعکاس سرخورده نسبت به خط $y = \frac{T}{\varphi}$	$f(x, y) = -f(-x, -y) = -f(x + \frac{T}{\varphi}, \frac{T}{\varphi} - y)$ $g(x, y) = -f(-y, x), T = T^*$

$$(22) \quad \begin{cases} p_{n+1} = (1 - \alpha_n)T(p_n) + \alpha_n T(u_n) \\ u_n = (1 - \beta_n)p_n + \beta_n T(p_n) \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود روش‌های بالا، مخصوصاً روش ایشیکاوا و  $S$ -تکرار، از پارامترهای بیشتری نسبت به حالت استاندارد برخوردار هستند و در نتیجه بررسی شرایط تقارن نیز پیچیده‌تر می‌شود. زیرا در تکرارهای غیراستاندارد، به روش‌های مختلف نقطه به‌دست آمده در تکرار قبل را با نقطه به‌دست آمده در تکرار جاری، ترکیب می‌کنند.

#### ۴. مثال‌ها

در این بخش سعی شده با استفاده از الگوریتم بیان شده در بخش ۲، و پارامترهای مختلف و توابع گوناگون طرح‌های به‌دست آمده به نمایش گذاشته شود. برای بازنویسی الگوریتم از نرم‌افزار متلب استفاده شده و در تمام مثال‌ها حداکثر تکرار  $K = 50$  و معیار توقف

$$(23) \quad \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \leq \epsilon$$

در نظر گرفته شده است. در این مثال‌ها از توابع مثلثاتی  $\sin$  و  $\cos$  استفاده می‌کنیم، زیرا این توابع هم خاصیت تناوبی و هم خاصیت زوج و فرد بودن را دارا هستند. در شکل‌های ۲ و ۳ می‌توانید نمونه‌ای از طرح‌های ایجاد شده، توسط روش تکراری استاندارد را مشاهده کنید. اطلاعات مربوط به هر طرح به صورت زیر بیان شده است:

$$(A) : \begin{cases} f(x, y) = \sin(x) \cos(y) \\ g(x, y) = \cos(2x) \sin(y) \end{cases}, (B) : \begin{cases} f(x, y) = \sin^2(x) \cos(y) \\ g(x, y) = \cos(2x) \sin^2(y) \end{cases}$$

$$(C) : \begin{cases} f(x, y) = \sin(x) \cos(y) \\ g(x, y) = \cos(2x) \sin^3(\sqrt{5}y) \end{cases}$$

$$(D) : \begin{cases} f(x, y) = \sin(x) \cos(2y) - \sin(y) \cos(2x) \\ g(x, y) = \sin(y) \cos(2x) + \sin(x) \cos(2y) \end{cases}$$

$$(E) : \begin{cases} f(x, y) = \sin(x) \cos(\sqrt{5}y) - \sin(y) \cos(\sqrt{5}x) \\ g(x, y) = \sin(y) \cos(\sqrt{5}x) + \sin(x) \cos(\sqrt{5}y) \end{cases}$$

$$(F) : \begin{cases} f(x, y) = \sin(x) \cos(2y) - \sin(x) \cos(2x) \\ g(x, y) = \sin(y) \cos(2x) - \sin(y) \cos(2y) \end{cases}$$

$$(G) : \begin{cases} f(x, y) = \sin(\sqrt{3}x) \cos(2y) + \sin(3x) \cos(y) \\ g(x, y) = \sin(y) \cos(2x) + \sin(2y) \cos(x) \end{cases}$$

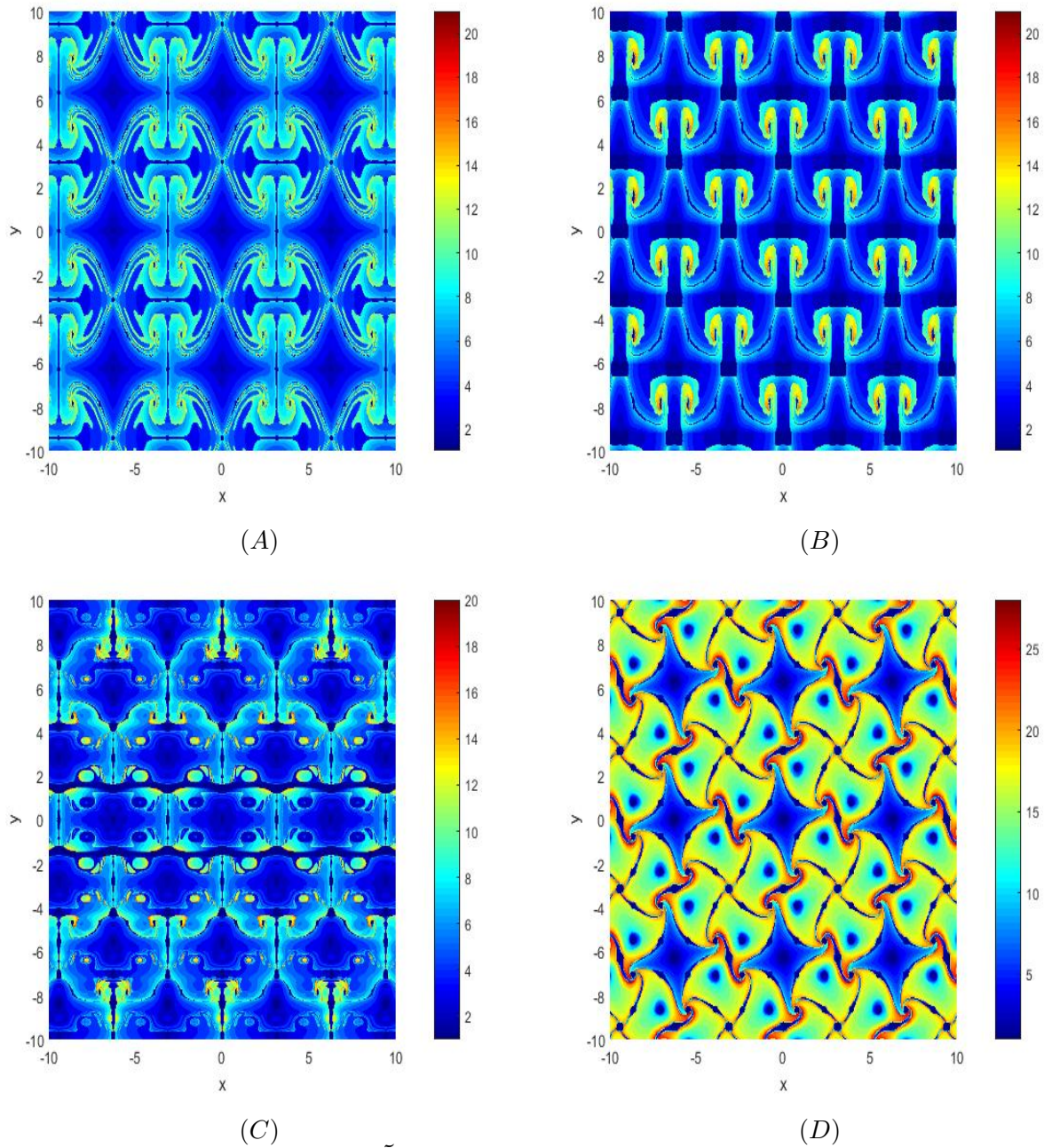
$$(H) : \begin{cases} f(x, y) = \sin(\sqrt{2}x) \cos(2y) + \sin(3x) \cos(y) \\ g(x, y) = \sin(y) \cos(2x) + \sin(\sqrt{2}y) \cos(x) \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، با تغییر برخی ضرایب موجود در توابع  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  طرح‌های کاملاً متفاوت و زیبایی حاصل می‌شود. برخی از این طرح‌ها فقط نسبت به یک محور تقارن دارند، برخی نسبت به دو محور قائم و افقی و برخی دارای چرخش هستند. حال به منظور بررسی روش‌های تکراری غیراستاندارد مان، ایشیکاوا،  $S$ -تکرار و همچنین بررسی تأثیر پارامترها در ایجاد طرح، توابع  $f(x, y)$  و  $g(x, y)$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(2y) - \sin(x) \cos(2x)$$

$$g(x, y) = \sin(y) \cos(2x) + \sin(x) \cos(2y)$$

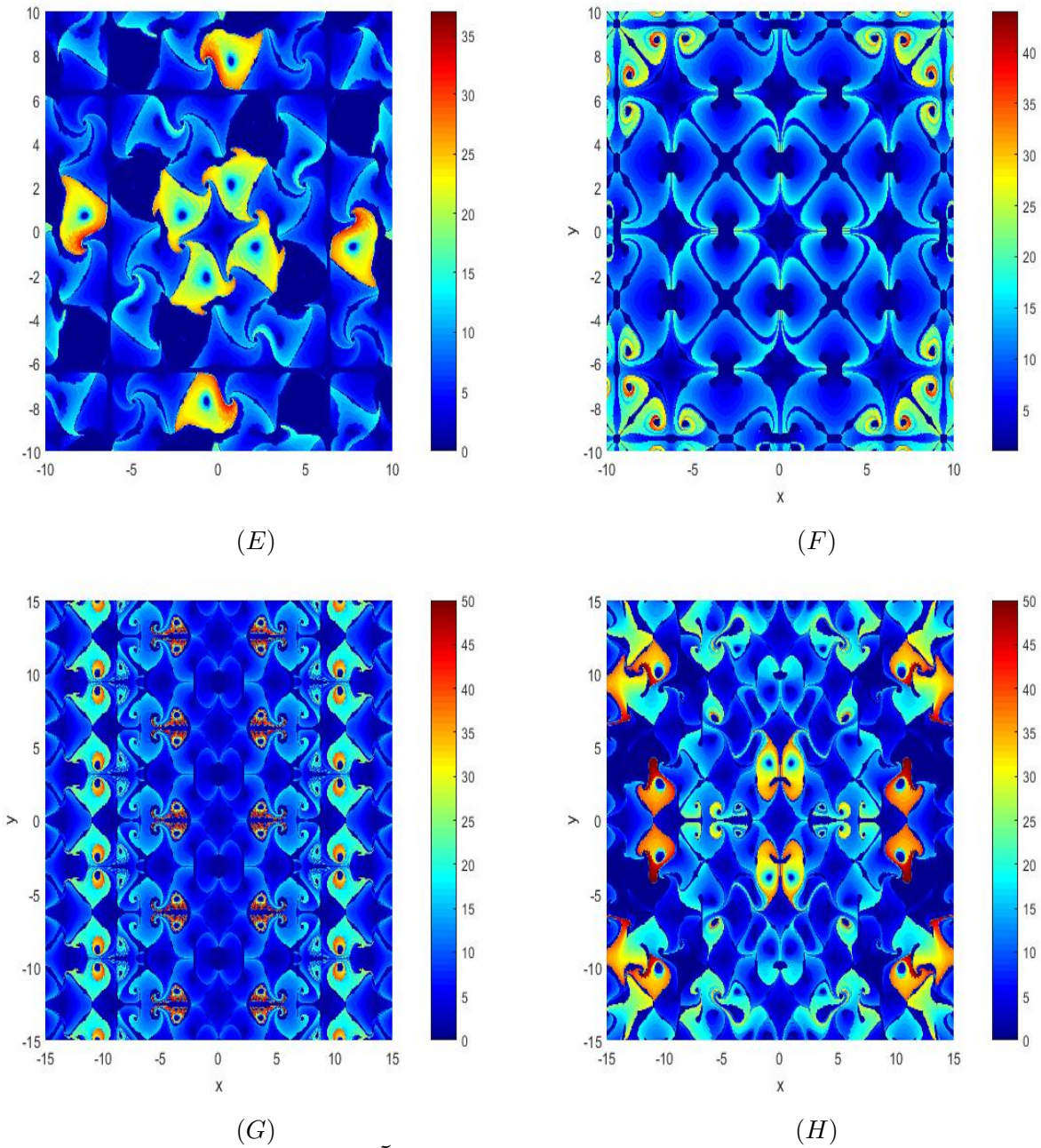
طرح تولید شده توسط توابع ذکر شده در حالت استاندارد، با حداکثر تکرار و معیار توقف تعریف شده در قبل را می‌توانید در شکل ۴ قسمت (K) مشاهده نمایید. اگر از تکرار غیراستاندارد مان و  $S$ -تکرار با پارامترهای مختلف تعریف شده در جدول ۲ استفاده کنیم، طرح‌های زیبایی حاصل می‌شوند که در شکل ۴ قابل مشاهده می‌باشند. به مانند پارامترهای به کار گرفته شده در [۲]، سعی شده، از پارامترهای متغیر، که در هر تکرار تغییر می‌کنند استفاده شود.



شکل ۲. چند نمونه از طرح‌های به‌دست آمده.

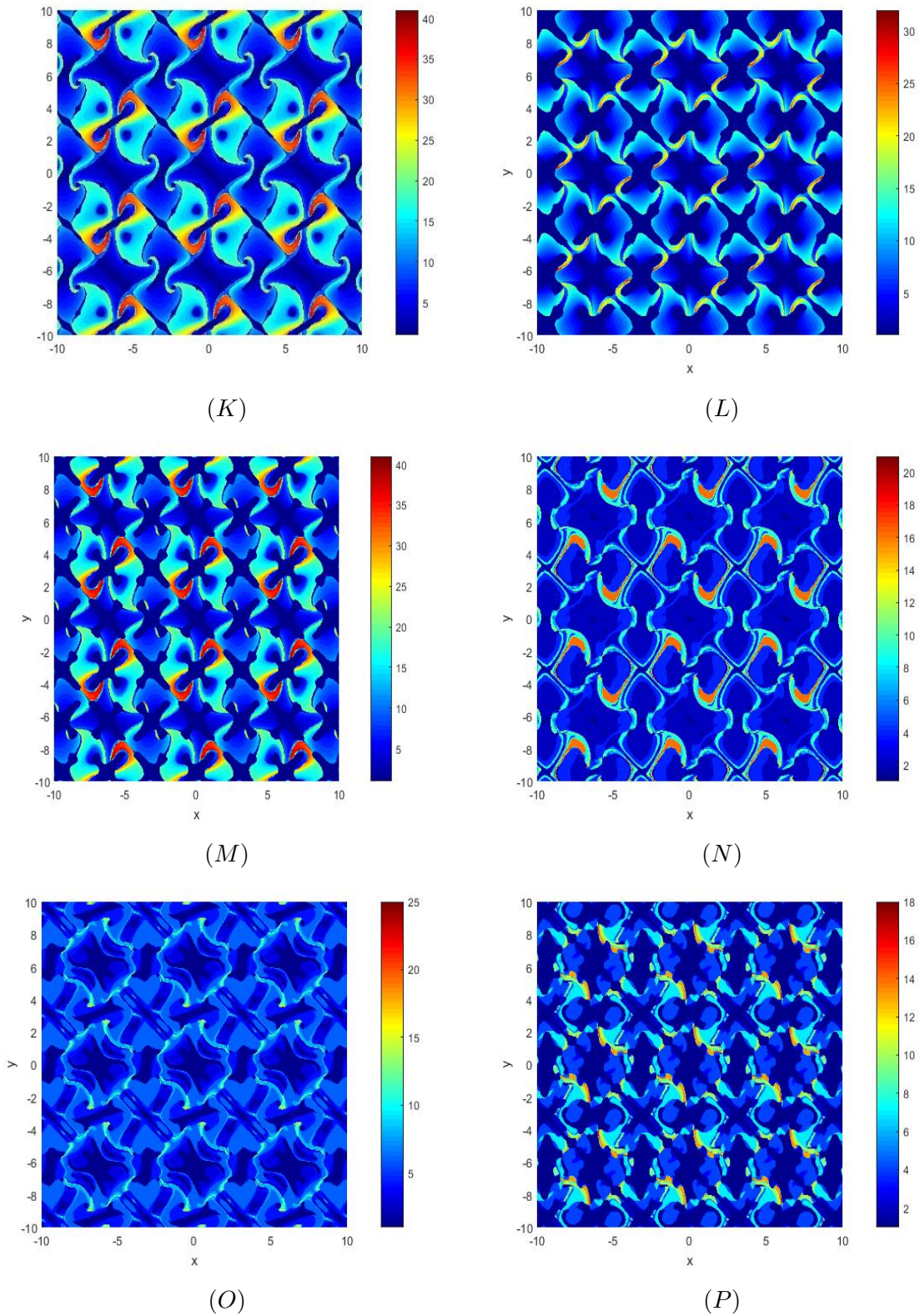
Figure 2: Examples of obtained patterns.





شکل ۳. چند نمونه از طرح‌های به دست آمده.

Figure 3: Examples of obtained patterns.



شکل ۴. چند نمونه از طرح‌های به‌دست آمده به روش تکرار غیراستاندارد.

Figure 4: Examples of obtained patterns to generat pattern.

جدول ۲. پارامترهای به‌کار گرفته شده در روش‌های تکراری غیراستاندارد.

Table 2: The applied parameters to generat pattern.

طرح	پارامتر	روش مورد استفاده
(K)	–	استاندارد
(L)	$\alpha(n) = 0.45$	مان
(M)	$\alpha(n) = \frac{n}{n+1}$	مان
(N)	$\alpha(n) = \sin(\sqrt{Vn}), \beta(n) = \frac{n+1}{n}$	S-تکرار
(O)	$\alpha(n) = \cos(\sqrt{Vn}), \beta(n) = \frac{n+1}{n}$	S-تکرار
(P)	$\alpha(n) = \cos(\sqrt{\Delta n}), \beta(n) = \frac{n^2+1}{n^2}$	S-تکرار

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی کردیم با استفاده از مفهوم همگرایی در دنباله‌های تولیدی توسط دستگاه دینامیکی گسسته، طرح‌هایی متقارن و زیبا تولید کنیم. برای این منظور علاوه بر شکل استاندارد دنباله، از شکل‌های متنوع غیراستاندارد و تغییر پارامترها نیز استفاده کردیم. مشاهده نمودیم که با تغییرات کوچک، طرح‌های متنوع و زیبایی تولید می‌شوند. از این طرح‌ها می‌توان در صنایعی همچون کاشی‌سازی، تزیین البسه و ... استفاده کرد. همچنین این طرح‌های متقارن را می‌توان در لوازم التحریر دانش‌آموزان مانند طرح روی دفتر و کتاب، به همراه شرحی ساده و مختصر از آن مورد استفاده قرار داد تا علاقه دانش‌آموزان به مفاهیم ساده ریاضی بیشتر از قبل شود و جنبه‌های زیبا و ملموس ریاضی برای ایشان آشکار شود.

## مراجع

- [1] M. Bisheh-Niasar, The effect of the caputo fractional derivative on polynomiography, *Math. Interdisc. Res.*, **8** no. 4 (2023) 347–358.
- [2] M. Bisheh-Niasar and K. Gdawiec, Bisheh-Niasar–Saadatmandi root finding method via the  $S$ -iteration with periodic parameters and its polynomiography, *Math. Comput. Simulation*, **160** (2019) 1–12.
- [3] K. W. Chung and H. S. Y. Chan, Symmetrical patterns from dynamics, *Computer Graphics Forum*, **12** no. 1 (1993) 33–40.
- [4] K. Gdawiec, K. Wiesław and L. Agnieszka, Polynomiography based on the nonstandard Newton-like root finding methods, *Abstr. Appl. Anal.*, **2015** no. 1 (2015)
- [5] K. Gdawiec, Polynomiography and various convergence tests, *21st International conference on computer graphics*, in Proceeding sof the WSCG Communication, (2013) 15–20.
- [6] K. Gdawiec, Procedural generation of aesthetic patterns from dynamics and iteration processes, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, **27** no. 4 (2017) 827–837.
- [7] K. Gdawiec, W. Kotarski and A. Lisowska, Visual analysis of the Newton’s method with fractional order derivatives, *Symmetry*, **11** no. 9 (2019) 1–27.
- [8] B. Kalantari, Polynomiography and applications in art, education and science, *Comput. Graph.*, **28** no. 3 (2004) 417–430

[9] B. Kalantari, *Polynomial root-finding and rolynomiography*, World Scientific, Singapore, 2009.

[۱۰] م. بیشه‌نیاسر، چندجمله‌ای نگاری؛ تلفیقی از ریاضی و هنر، فرهنگ و اندیشه، ۶۴ (۱۳۹۸) ۱۵۹-۱۶۶.

مرتضی بیشه‌نیاسر

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

mbisheh@kashanu.ac.ir

مرتضی بیشه‌نیاسر متولد تیرماه ۱۳۶۰ در شهر کاشان است. وی در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه کاشان شد. سپس در سال ۱۳۸۳ مشغول تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی) دانشگاه سیستان و بلوچستان شد و در ادامه، در سال ۱۳۹۱ موفق به اخذ مدرک دکتری از دانشگاه سیستان و بلوچستان شد. نویسنده هم‌اکنون هیات علمی دانشگاه کاشان می‌باشد.

