

USING CHATGPT IN TEACHING INTEGRAL CONCEPTS: OPPORTUNITIES AND CHALLENGES

NOUROOZ HASHEMI^{ORCID} AND HAMIDREZA KASHEFI^{ORCID}*

ABSTRACT. This study presents an analysis of the mathematical abilities of ChatGPT in solving problems in the process of teaching integral concept with different thinking levels based on Bloom's taxonomy by thematic analysis method. The integral concept was designed in the form of 20 problems in six levels of thinking from Bloom's perspective. The problems were asked by students of the first year of mathematics from ChatGPT under the supervision of the researcher as a teacher. The results show that the performance of ChatGPT varies depending on the difficulty level and the topic and the level of Bloom's thinking. He had the best performance in answering the level problems of remembering and analyzing, and he showed very weak in answering the problems of evaluating and creating. Also, the results showed that ChatGPT does not pay attention to written details such as parentheses and brackets. Accurate long calculations, correct use of integration rules, classification of integral types were the strengths of using ChatGPT in integral education. He was unable and had many defects in drawing a figure, presenting a graph related to a function, generalizing the integral to higher dimensions, and understanding that an integral should be used to solve a problem. Also, as the levels of thinking increased, its efficiency was decreasing. The results show that ChatGPT has the potential to become an effective teaching aid tool for integral teaching, but its graphic capability should be increased and its data processing should be improved and its shortcomings should be eliminated.

Keywords: ChatGPT, Training, Integral, Problem Solving, Bloom's taxonomy.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Saeid Maghsoudi.

*Corresponding author.

Received: 12-02-2024, Accepted: 20-05-2024, Published Online: 25-01-2025.

Cite this article: N. Hashemi and H. Kashefi, Using ChatGPT in Teaching Integral Concepts: Opportunities and Challenges, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 4 (2024) 1-22.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140698.1646> .

1. Introduction

The teaching of mathematical concepts in any course is one of the main concerns of educators and policy makers of education, and according to the conditions of that course, different strategies have been used for its teaching [20, 22]. From the past until now, calculus has been of great importance as one of the most important mathematics courses for undergraduate students in many fields of study [19, 2, 1, 36, 37]. This course has been one of the most fundamental and important courses, not only in the bachelor's degree in mathematics, but also in various fields of basic science and technical and engineering [9, 31, 34, 24]. Integral is one of the fundamental concepts in calculus that undergraduate students encounter in the first year, and it is a prerequisite for learning other mathematical and non-mathematical concepts such as physics, chemistry, etc [38, 7, 9, 26]. In different fields of study. In fact, the difficulty of students in integral learning is closely related to the inability to solve problems, which is one of the skills of the 21st century. Also, the problem solving process plays an important role in the progress of learning mathematical concepts [11, 13, 15, 12, 17, 23, 24].

In recent years, artificial intelligence (AI) has attracted much attention and has been widely discussed. Strongly promoting the use of technology and technological networks in teaching mathematics based on artificial intelligence is not only an effective way to solve the lack of educational resources, but also a bold attempt to innovate the methods of teaching mathematics in schools and universities [3, 8]. Artificial intelligence represents a creative and innovative development in many fields, including mathematics education, which has the potential to be combined with various theories of mathematics education for implementation in classrooms. Many studies have studied the application of artificial intelligence in the fields of education and analyzed its impact on the education of various sciences, especially mathematics education. Of course, it should be noted that the role of teachers and educators should not be replaced by artificial intelligence in the educational process, but artificial intelligence should be used to strengthen their activities [27, 29]. It should be noted that the implementation of artificial intelligence in mathematics education has always faced various challenges despite its potential benefits. From 2022, in order to solve the challenges and minimize them, the ChatGPT platform has provided a space for the optimal use of artificial intelligence in education, especially mathematics education [39].

The basic needs are to transform an education into an efficient, high-quality and effective education based on the use of modern education methods and tools [41, 43, 45, 23]. Today, comprehensive improvement of teaching quality is the highlight of mathematics education, and integral teaching in undergraduate courses is no exception to this rule. The use of modern teaching methods and up-to-date educational tools can be effective and useful in improving the learning of mathematical concepts, including the important and fundamental concept of integral. Considering the importance of integral learning as one of the basic concepts of calculus and also considering the many problems that students

face in learning it, it seems that the use of artificial intelligence and especially ChatGPT and GPT-4 which is a It is a new and innovative method in education [44], it can help to increase the learning of the integral concept and reduce the obstacles to its learning [30, 33, 35]. Therefore, the purpose of this study is to investigate the use of ChatGPT and GPT-4 in integral learning by solving the problems of this concept among first year undergraduate students in mathematics. In addition, the benefits, opportunities, as well as disadvantages and challenges of using ChatGPT in integral education have been analyzed [25, 18].

2. Main Results

At the recall level, all three problems were given to ChatGPT. But the answers should be far from expectations. He was not very careful in writing mathematical symbols such as parentheses, brackets, etc., despite the lack of attention and precision to these symbols, mathematical operations, especially integral calculations, are associated with gross mistakes.

Understanding the second level of Bloom's classification was that three problems in this level were considered for teaching the concept of integral using artificial intelligence and especially ChatGPT [40]. The problems were formulated based on the themes of this level such as description, estimation and prediction [2, 4, 5, 7]. Algebraic description has been done to an acceptable extent, but geometrical description using figures and diagrams is not seen in it. He did the prediction and estimation just like the description algebraically. In addition, it has many shortcomings in estimating the answer for complex problems[10, 14, 16].

The application of integration rules in the algebraic solution of related problems was done completely and correctly by ChatGPT, and its ability to algebraically solve problems that required the application of integral rules seems desirable. On the contrary, ChatGPT was unable to use the integral in solving daily life problems such as the swimming pool problem and could not recognize that the integral can be used to solve this problem. In solving provable problems, he referred to sources from which the desired answer cannot be obtained. In general, ChatGPT has performed well at the application level only in using integral rules in solving simple algebraic problems [18, 28, 30]. Based on ChatGPT's answers to analysis level problems, it can be seen that ChatGPT has a great ability in analyzing and providing solutions to integral concept questions. Analyzing the function under the integral in order to determine its components in the method of part-by-part integration, comparing one function with another function, and also changing the right variable, which is a form of deconstruction of the primary function, was one of the things that ChatGPT handled very well [41, 19]. They were also successful in solving algebraic or symbolic questions. ChatGPT answered the issues related to the evaluation level better and more completely than GPT-4. Although drawing and using figures and diagrams were emphasized in all the problems related to this level of thinking, no figures or diagrams were presented either in the text of the answers or in the sources he provided.

The weakest performance of ChatGPT was seen in response to problems related to the level of creative thinking. Considering that creation is the highest level of Bloom's classification [6] and it was expected that artificial intelligence and especially ChatGPT could show its effectiveness in this stage, but the weakest performance was observed in this stage. He presented the use of the concept of integral in everyday life with a good example in algebraic mode, but it was not seen that he had creativity and an idea in presenting the quadruple integral and designed an extension of a specific type of integral. Even in response to the problem related to the generalization of the integral, he could not create an acceptable answer. It seems that ChatGPT has many problems in planning to generate new ideas based on previous information. Designing, building and planning are manifestations of thinking at the level of creation, which were not seen in the answers provided by this platform and even brought gross and confusing mistakes.

3. Summary of Proofs/Conclusions

This study showed that ChatGPT can be a useful teaching aid tool, but caution is necessary when using it, and guidelines for its optimal and complete use should be developed. According to the results obtained in this study, the main reason for the difficulties in ChatGPT with mathematics is its educational data. While exposed to a large amount of Internet text, the instructional data is not specifically designed for mathematical concepts and problem solving. As a result, ChatGPT may lack the mathematical knowledge and reasoning abilities necessary to handle complex mathematical problems. It seems that artificial intelligence can be a good guide for students in finding paths leading to solving problems and learning the concept of integral, and it can be considered a helpful tool for teachers, but it cannot be considered as a reliable and efficient method in education. This concept is fully considered. ChatGPT and GPT-4 cannot replace the teacher in the integral classroom, and it can even be said that its effectiveness is not greater than that of a teacher. It works better only in solving long algebraic problems that require a lot of calculations and also introducing and making resources available. There are fundamental flaws in these foundations that require the efforts of the founders to fix them. It is suggested that its graphic improvement should be paid attention to by the founders and programmers so that the drawing of the diagram and the drawing of the shape can be done in a complete and useful way. In generalizing the concept of integral at higher levels of thinking, it has not been effective and needs to be improved. In addition, it is suggested that the users of this platform try to present the content in the text of the answers and not refer to the sources too much, because it creates a kind of confusion for the users. It is also recommended to students and professors to use it in the classrooms because it performs calculations accurately and acceptably and provides good guidance for them. However, it should not be trusted by learners and users, because it has gross and sometimes simple mistakes that will cause misunderstandings and misunderstandings. It is suggested to the authors of the teaching resources related to the integral concept to compile the

resources in such a way that the capacity of artificial intelligence and especially ChatGPT can be used in integral education.

Nourooz Hashemi

Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O.Box 14665-889, Tehran, Iran

Email: h.nourooz@cfu.ac.ir

Hamidreza Kashefi

Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O.Box 14665-889, Tehran, Iran

Email: hkashefi@cfu.ac.ir

استفاده از ChatGPT در آموزش مفهوم انتگرال: فرصت‌ها و چالش‌ها

نوروز هاشمی^{۱b} و حمیدرضا کاشفی^{۱b*}

چکیده. این مطالعه تجزیه و تحلیلی از توانایی‌های ریاضی ChatGPT در حل مسائل و پاسخ به سؤالات در فرآیند آموزش مفهوم انتگرال با سطوح تفکر متفاوت و بر اساس طبقه‌بندی بلوم به روش تحلیل مضمون، ارائه می‌دهد. مفهوم انتگرال در قالب ۲۰ مسئله در شش سطح تفکر از منظر بلوم، طراحی گردید. مسئله‌ها توسط گروه‌های ۴ نفری از دانشجویان سال اول رشته ریاضی از ChatGPT تحت نظارت محقق به‌عنوان مدرس پرسیده شده است. نتایج نشان می‌دهد که عملکرد ChatGPT بسته به سطح دشواری، موضوع و سطح تفکر بلوم متفاوت است. بهترین عملکرد را در پاسخ به مسائل سطح به خاطر آوردن و تجزیه و تحلیل کردن داشت و در پاسخ به مسئله‌های ارزیابی کردن و خلق کردن بسیار ناتوان نشان داد. همچنین نتایج نشان داد که ChatGPT به جزئیات نوشتاری از قبیل پیرانتز و گروه توجه نمی‌کند. محاسبات طولانی دقیق، استفاده درست از قوانین انتگرال‌گیری، دسته‌بندی انواع انتگرال از نقاط قوت استفاده از ChatGPT در آموزش انتگرال بود. در رسم شکل، ارائه نمودار مرتبط با یک تابع، تعمیم انتگرال به ابعاد بالاتر و در درک این‌که برای حل یک مسئله باید از انتگرال استفاده شود ناتوان و دارای عیوب زیادی بود. همچنین با بالا رفتن سطوح تفکر، کارایی آن رو به کاهش بود. نتایج نشان می‌دهد که ChatGPT پتانسیل تبدیل شدن به یک ابزار کمک آموزشی مؤثر برای آموزش انتگرال را دارد، اما باید قابلیت گرافیکی آن افزایش یافته، دقت پردازش داده‌های آن ارتقاء یابد و کاستی‌های آن مرتفع گردد.

۱. مقدمه

آموزش مفاهیم ریاضی در هر دوره‌ای از دغدغه‌های اصلی آموزشگران و سیاست‌گذاران امر آموزش بوده و با توجه به شرایط آن دوره، راهبردهای مختلفی برای آموزش آن به کار رفته است [۱۱]. از گذشته تا کنون، حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌عنوان یکی از مهم‌ترین دروس ریاضی برای دانشجویان مقطع کارشناسی در بسیاری از رشته‌های تحصیلی از اهمیت زیادی برخوردار بوده است [۴۵]. نه تنها در رشته کارشناسی ریاضی، بلکه در رشته‌های گوناگون علوم پایه و فنی و مهندسی، این درس یکی از بنیادی‌ترین و مهم‌ترین دروس بوده است [۱۳]. انتگرال یکی از مفاهیم بنیادی در حساب دیفرانسیل و انتگرال است که دانشجویان مقطع کارشناسی در سال اول با آن مواجه می‌شوند و پیش‌نیاز یادگیری سایر مفاهیم ریاضی و غیر ریاضی مانند فیزیک، شیمی و غیره در رشته‌های مختلف تحصیلی است. انتگرال یک تابع را می‌توان از نظر هندسی به صورت مساحت زیر منحنی تابع نامنفی $f(x)$ ، که به صورت تابعی از x رسم شده است، تفسیر کرد [۳۷]. در یادگیری مفهوم انتگرال، دانشجویان باید تعداد مساحت‌ها، مرزها، محاسبه مقدار دقیق مساحت و مفاهیم دیگر را درک کنند [۲۸]. برای درک مفاهیم انتگرال،

عبارات و کلمات کلیدی: ChatGPT، آموزش، انتگرال، حل مسئله، طبقه‌بندی بلوم.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۳۱ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۱۱/۰۶

ارجاع به مقاله: ن. هاشمی و ح. ر. کاشفی، استفاده از ChatGPT در آموزش مفهوم انتگرال: فرصت‌ها و چالش‌ها، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۴ (۱۴۰۳) ۱-۲۲.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140698.1646>

دانشجویان باید بتوانند مفاهیم مرتبط قبلی را که همان دانش آنها می‌باشد، به هم مرتبط کنند. کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتگرال را به‌عنوان ضد مشتق معرفی می‌کنند. زیرا انتگرال‌ها به‌عنوان توابع ضد مشتق شناخته می‌شوند. هنگام یادگیری انتگرال، ابتدا باید مفاهیم حد و مشتق را درک کرد [۳۰]. بنابراین، مدرسان باید قبل از ورود به مبحث انتگرال، مشتق و کاربرد مشتق را معرفی کنند. با این حال، بسیاری از دانشجویان در درک مفاهیم انتگرال مشکلات زیادی دارند و علی‌رغم توسعه روش‌های یادهی و یادگیری، این موانع و مشکلات برطرف نشده‌اند [۲۱].

آموزش و یادگیری این مفهوم همیشه با مشکلات مختلفی درگیر بوده است [۹]. مشکلات یادگیری انتگرال بیشتر به خود مفهوم انتگرال، روش آموزش آن، محیط و ابزارهای مورد استفاده در فرآیند یادهی و یادگیری آن مرتبط بوده است. دانشجویانی که با درک نکردن مفهوم انتگرال بر روی شیوه‌های انتگرال‌گیری تمرکز می‌کنند، با مشکلات جدی روبه‌رو خواهند بود. یومامی^۱ تأکید می‌کند که مدرسان باید در توضیح روش‌های جالب انتگرال‌گیری به دانشجویانی که قبلاً مفهوم انتگرال را درک نکرده‌اند، بسیار صبور باشند [۳۹]. دشواری درک انتگرال به مواردی از قبیل عدم درک درست از مفاهیم قبلی آن مانند حد، پیوستگی، مشتق و کاربرد مشتق برمی‌گردد [۳۵]. علاوه بر این، برخی از مشکلاتی که دانشجویان در انتگرال با آن مواجه هستند شامل استفاده نادرست از مفاهیم، ناتوانی در استفاده از نمودار و شکل، ناتوانی در توجیه فرآیند و استفاده غیردقیق از الگوریتم‌های مفهوم انتگرال است [۴۴، ۳۳]. همچنین، اشتباهات دانشجویان از عدم امکان انتخاب روش مناسب برای حل مسائل انتگرال و انتخاب اشتباه قضایای مربوطه ناشی می‌شود. می‌توان گفت که برخی از خطاها مانند اشتباه در ترسیم نمودارها، تعیین المان و تابع، تعیین مرزهای انتگرال، استفاده نادرست از فرمول‌ها و محاسبات اشتباه به شدت با ناتوانی دانشجویان در شناسایی مناسب ویژگی‌های مفهومی انتگرال و مقایسه این ویژگی‌ها با یکدیگر مرتبط است [۳۰].

در واقع، دشواری پیش‌روی دانشجویان در یادگیری انتگرال ارتباط تنگاتنگی با ناتوانی در حل مسئله دارد که یکی از مهارت‌های قرن بیست و یکم است [۲۵، ۳۶]. همچنین، فرآیند حل مسئله نقش مهمی در پیشرفت یادگیری مفاهیم ریاضی ایفا می‌کند [۲۳]. به‌علاوه، نظریه‌های مختلف یادگیری از قبیل نظریه‌ی سطوح تفکر هندسی ون هیل^۲ [۲۲]، نظریه‌ی تفکر ریاضی مشتمل بر سه جهان تجسمی، نمادین و اثبات [۳۶]، نظریه آپوس^۳ [۷]، نظریه سولو^۴ [۱]، نظریه هاتس^۵ [۴۲] و نظریات دیگری که بر توانایی‌های تفکر مانند خلاقیت، استدلال و غیره تأثیر می‌گذارند [۳۶].

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتگرال‌ها به‌صورت عددی، جبری، گرافیکی و کلامی نشان داده می‌شوند، دانشجویان باید رابطه بین نمایش‌های مختلف انتگرال را بدانند و درک خود از مفاهیم را توسعه دهند. یکی از آنها توسعه مهارت‌های تفکر تجسمی و جبری در حل مسئله است. چندین شاخص برای تفکر تجسمی و جبری وجود دارد از قبیل درک روش جبری و هندسی به‌عنوان روش‌های جایگزین یکدیگر، استخراج اطلاعات خاص از نمودارها، نمایش و تفسیر مسئله (یا مفهوم) به‌صورت نموداری، ترسیم و استفاده از نمودارها به‌عنوان روش کمکی در حل مسائل و درک تجسمی یا هندسی تبدیلات ریاضی [۱۷]. سطح تفکر تجسمی و جبری با عمق پردازش اطلاعات مطابقت دارد. طبق نظر استرنبرگ^۶، هیچ مرزی بین یک سطح پردازش اطلاعات و سطح بعدی وجود ندارد و سطح تفکر تجسمی هر دانشجو نسبت به دانشجوی دیگر در فعالیت و تمرین ریاضی متفاوت است [۳۱]. بنابراین، بررسی بیشتر حل مسئله انتگرال در طی آموزش آن به دانشجویان بر اساس سطوح تفکر ضروری است. به‌نظر می‌رسد دانشجویان چون در حل مسئله شکست می‌خورند، نمی‌توانند مفهوم انتگرال را یاد بگیرند. مشکلات آنها در کار بر روی سؤالات و مسائل انتگرال ناشی از ضعف در استفاده از روش‌های عملیاتی‌تر و قابل نسبت به نظریه‌های آموزش ریاضی است [۱۵].

نظریات مختلف آموزش ریاضی نظریه صرف می‌باشند و قدرت عملیاتی بسیار کمی در حل مسئله دارند و برای عملیاتی شدن نیاز به ترکیب با یک فرآیند و یا یک روش فعالی دارد [۱۹]. ریاضیات نقش به‌سزایی در پیشرفت سریع فناوری داشته

¹Umami ²Van Hiele ³APOS (Action, Process, Object and Schema) ⁴Solo ⁵HOTS (High Order Thinking Skill)

⁶Sternberg

است که به نوبه خود تغییرات سریعی را در زمینه‌های مختلف از جمله در دنیای آموزش ایجاد کرده است که تأثیر آن غیرقابل انکار است. آموزش ریاضی باید با پیشرفت‌های فناوری سازگار و همگام شود تا تجربیات یادگیری مرتبط و مؤثر را برای یادگیرندگان فراهم کند. بنابراین، آموزش ریاضی و به‌ویژه آموزش مفهوم مهم و اساسی انتگرال، نیاز به انطباق و پیروی از این پیشرفت‌های فناورانه دارد تا تجربیات یادگیری مرتبط و مؤثر را برای یادگیرندگان فراهم کند. در سال‌های اخیر، هوش مصنوعی^۷ (AI) توجه زیادی را به‌خود جلب کرده و به‌طور گسترده مورد بحث قرار گرفته است. ترویج شدید کاربرد فناوری و شبکه‌های فناورانه در تدریس ریاضیات بر مبنای هوش مصنوعی نه تنها راهی مؤثر برای حل کمبود منابع آموزشی است، بلکه تلاشی جسورانه برای نوآوری در روش‌های تدریس ریاضیات در مدارس و دانشگاه‌ها است. هوش مصنوعی نشان دهنده‌ی یک پیشرفت خلاقانه و نوآورانه در بسیاری از زمینه‌ها از جمله آموزش ریاضیات است که پتانسیل ترکیب با نظریه‌های مختلف آموزش ریاضی را جهت اجرا در کلاس‌های درس دارد [۴۳]. مطالعات زیادی به کاربرد هوش مصنوعی در زمینه‌های آموزش پرداخته‌اند و تأثیر آن بر آموزش علوم مختلف به‌ویژه آموزش ریاضی را تحلیل کرده‌اند [۸]. البته باید به این نکته توجه شود که نقش معلمان و آموزش‌گران نباید با هوش مصنوعی در فرآیند آموزشی جایگزین شود، بلکه باید از هوش مصنوعی برای تقویت فعالیت‌های آنان استفاده شود [۲۰]. قابل ذکر است که پیاده‌سازی هوش مصنوعی در آموزش ریاضی با وجود مزایای بالقوه، همیشه با چالش‌های مختلفی روبرو بوده است. از سال ۲۰۲۲ برای رفع چالش‌ها و به حداقل رساندن آنها، بستر ChatGPT فضایی را برای استفاده بهینه از هوش مصنوعی در آموزش و به‌ویژه آموزش ریاضی فراهم کرده است [۴۱].

فناوری‌های هوش مصنوعی، مانند ChatGPT که با مدل پیشرفته GPT-۴ تقویت می‌شوند، نویدهای قابل توجهی را در ایجاد انقلابی در شیوه کسب دانش و تعامل دانشجویان با اطلاعات در همه‌ی رشته‌ها به‌ویژه ریاضی به‌نمایش گذاشته‌اند. از آنجایی که استفاده از ابزارهای مبتنی بر هوش مصنوعی از نظر وسعت و دسترسی رو به گسترش می‌باشد، بررسی تأثیر آنها بر دانشجویان و یادگیری مفاهیم ریاضی در میان آن‌ها مفید و با کارایی زیادی همراه خواهد بود و همچنین ChatGPT یک چت‌بات^۸ (گفتگوی دستیار مجازی هوشمند) پردازش زبان طبیعی است که توسط هوش مصنوعی مولد هدایت می‌شود و به کاربر امکان می‌دهد مکالمات انسان‌مانندی برای انجام کارهای مختلف داشته باشد. به‌عنوان مثال، ابزار هوش مصنوعی می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد و در انجام کارهایی مانند نوشتن ایمیل، مقاله و کد به کاربر کمک کند [۳۴]. مطالعات مختلفی در مورد کاربرد مدل‌های هوش مصنوعی در آموزش ریاضی انجام شده است. تروپ^۹ مزایای بالقوه استفاده از ChatGPT در آموزش ریاضی را برجسته می‌کند و تأثیراتی را که ممکن است در زمینه‌های علمی و دانشگاهی داشته باشد روشن می‌کند [۳۸]. مزایای مرتبط با ChatGPT در آموزش ریاضی شامل یادگیری فردی، پرورش تجارب یادگیری تعاملی و ظرفیت ارزیابی تکوینی است که به فرآیندهای آموزشی و یادگیری ریاضی کمک می‌کند و در عین حال بازخورد مداوم را ارائه می‌دهد [۳].

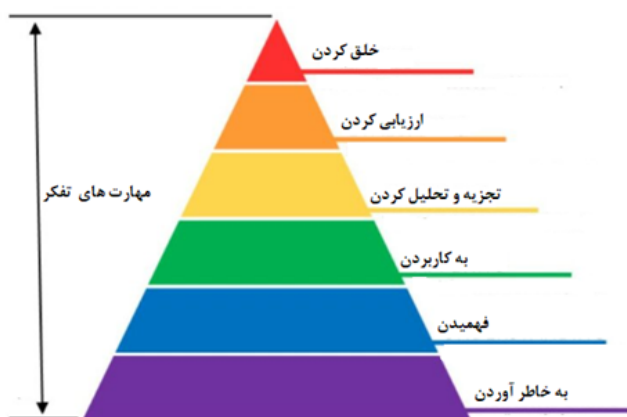
نیازهای اساسی تبدیل یک آموزش به آموزشی کارآمد، باکیفیت و اثربخش بر پایه‌ی استفاده از روش آموزش و ابزارهای آموزشی پیشرفته است [۱۲]. امروزه، بهبود همه‌جانبه‌ی کیفیت تدریس، نکته برجسته آموزش ریاضی است و تدریس انتگرال در دوره‌ی کارشناسی نیز از این قاعده مستثنی نیست. استفاده از روش تدریس پیشرفته و ابزارهای آموزشی به‌روز می‌تواند در بهبود یادگیری مفاهیم ریاضی از جمله مفهوم مهم و اساسی انتگرال اثربخش و مفید باشد [۲۶]. با توجه به اهمیت یادگیری انتگرال به‌عنوان یکی از مفاهیم اساسی حساب و همچنین با در نظر داشتن مشکلات عدیده‌ای که دانشجویان در یادگیری آن مواجه هستند، به‌نظر می‌رسد استفاده از هوش مصنوعی و به‌ویژه ChatGPT و GPT-۴ که یک روش جدید و نو در آموزش است، می‌تواند به افزایش یادگیری مفهوم انتگرال و کاهش موانع یادگیری آن کمک کند. بنابراین، هدف این مطالعه بررسی استفاده از ChatGPT و GPT-۴ در یادگیری انتگرال به‌وسیله‌ی حل مسائل این مفهوم در میان دانشجویان سال اول دوره‌ی

⁷Artificial Intelligence (AI) ⁸chatbot ⁹Thorp

کارشناسی رشته ریاضی می‌باشد. به‌علاوه، فواید، فرصت‌ها و همچنین مضرات و چالش‌های استفاده از ChatGPT در آموزش انتگرال مورد تحلیل قرار گرفته است.

۲. روش‌شناسی

این مطالعه یک تحقیق کاربردی است که گردآوری و تحلیل داده‌های آن به روش کیفی انجام شده است. فرآیند انجام به این صورت بوده است که، در طی ۶ جلسه تدریس مفهوم انتگرال و حل مسائل آن در درس ریاضی عمومی برای دانشجویان سال اول رشته ریاضی در ترم اول سال ۱۴۰۲ دانشگاه فرهنگیان اصفهان با استفاده از ChatGPT انجام شد. روش تدریس در این کلاس، تدریس با حل مسئله بود که ۲۰ مسئله بر اساس سطوح تفکر با طبقه‌بندی جدید بلوم^{۱۰} طرح شد و در ۶ جلسه که در هر جلسه حدود ۱۰۰ دقیقه بود با پرسش از ChatGPT و بعضاً GPT-۴ حل آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت. فورهند^{۱۱} بیان داشت سطوح تفکر بر اساس طبقه‌بندی جدید بلوم شامل به‌خاطر آوردن، فهمیدن، به‌کاربردن، تجزیه و تحلیل کردن، ارزیابی کردن و خلق کردن می‌باشد [۱۰]. سطوح این طبقه‌بندی در شکل ۱ نمایش داده شده است. در این طبقه‌بندی هر سطح تفکر نسبت به سطح بالاتر خود، برای یادگیرندگان آسان‌تر می‌باشد [۲].



شکل ۱. طبقه‌بندی بلوم [۱۰]

Figure 1: Bloom's Taxonomy

به گفته متخصصان [۱۸]، مفاهیم سطوح مختلف در این سلسله مراتب، یعنی نتایج یادگیری خاص (به‌خاطر سپردن، درک، کاربرد) و عملیات ذهنی لازم برای دستیابی به این نتایج (تجزیه و تحلیل، ترکیب، ارزیابی) مخلوط شده‌اند. طبقه‌بندی بلوم بیان می‌کند که فرآیندهای آموزش و ارزیابی باید از حوزه‌های پایین‌تر به حوزه‌های بالاتر یادگیری فراتر رود. به‌خاطر سپردن، درک کردن و به‌کار بردن به حوزه‌های پایین‌تر، در حالی که تجزیه و تحلیل، ارزیابی و خلق کردن به حوزه‌های بالاتر تفکر تعلق دارند. والسکو و همکاران^{۱۲} تصریح می‌کنند طبقه‌بندی بلوم به‌عنصر بسیار مهمی در جامعه‌ی آموزش ریاضی تبدیل شده و توسط بسیاری از مؤسسات آموزشی در کشورهای مختلف پذیرفته شده است، اما باید در استفاده از آن دقت لازم را با توجه به مفاهیم ریاضی به‌کار برد [۴۰]. یودها^{۱۳} بر این باور است که در آموزش ریاضی باید به‌سمت ارتقاء تفکر دانشجویان و یادگیرندگان ریاضی به سمت رأس هرم یعنی خلق کردن رفت تا تفکر سطح بالا اتفاق بیافتد.

¹⁰Bloom's taxonomy ¹¹Forehand ¹²Vlasenko, Lovianova, Chumak, Sitak and Kovalenko ¹³Yudha

جدول ۱. مضامین طبقه‌بندی بلوم [۴]

Table 1: Themes of Bloom's Taxonomy

| نوع سطح تفکر | مضامین | سطح |
|--------------|---|--------------------|
| بالا تر | طراحی، ساخت، برنامه‌ریزی | خلق کردن |
| بالا تر | بررسی، مرور، نتیجه‌گیری، توضیح | ارزیابی کردن |
| بالا تر | مقایسه، سازماندهی، ساختار شکنی | تجزیه و تحلیل کردن |
| پایین تر | پیاده‌سازی، اجرا، استفاده، کاربرد، نشان دادن، حل کردن | به‌کار بردن |
| پایین تر | توصیف، برآورد، پیش بینی | درک کردن |
| پایین تر | تشخیص دادن، لیست کردن، شناسایی | به‌خاطر آوردن |

تحلیل پاسخ‌های ChatGPT کدگذاری شده و براساس تحلیل مضمون مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل مضمون^{۱۴} شیوه‌ای در روش پژوهش کیفی است که بر شناسایی، تحلیل و تفسیر الگوی معانی داده‌های کیفی تمرکز دارد [۶]. مضمون یا تم عنصر کلیدی در این روش است [۲۹]. مضمون‌ها پرازش‌ترین واحدهایی هستند که در تجزیه و تحلیل محتوا باید مدنظر قرار گیرند و منظور از مضامین معنای خاصی است که از یک کلمه یا جمله یا پاراگراف اقتباس می‌شود [۲۷]. در جدول ۱، مضامین مورد نظر از منظر طبقه‌بندی بلوم برای مطالعه حاضر ارائه شده است که چاندیو، زفر و سولانگی^{۱۵} قبلاً از آن در تحقیقات خود استفاده کرده‌اند [۴]. از این مضامین برای کدگذاری پاسخ‌های به‌دست آمده از ChatGPT در مسائل داده شده مطالعه حاضر استفاده شده است.

در این مطالعه، ۲۰ مسئله از مفهوم انتگرال برای یک کلاس از دانشجویان سال اول رشته ریاضی دانشگاه فرهنگیان اصفهان ارائه شد که در جدول ۲، این مسائل آمده است. مقرر گردید، در طی ۶ جلسه این مسئله‌هایی که در شش سطح بلوم طراحی شدند و روایی آن با انجام اصلاحات خواسته شده مورد تایید ۴ نفر از متخصصان آموزش ریاضی قرار گرفت به ChatGPT داده شد. پاسخ‌های داده شده در بستر ChatGPT با توجه به مضامین و اشاره شده تجزیه و تحلیل شد.

مسائل داده شده در جدول ۲ از ChatGPT در زمان تدریس پرسیده شده است. نتایج و پاسخ‌های به‌دست آمده از پرسش و پاسخ با ChatGPT براساس مدل پیشنهادی چیلون و همکاران^{۱۶} که کدگذاری بر اساس مضامین می‌باشد انجام گردید که پیشتر مایلز، هیرمن و سالدانا^{۱۷} نیز به آن اشاره داشته‌اند [۲۴، ۵]. مضامین و کدهای این مطالعه مواردی هستند که در جداول ۱ و ۲ ارائه شده است. ۳ نفر از متخصصان بعد از بررسی و ارائه اصلاحات لازم و انجام آنها توسط محققان، به روایی این کدها و دستورات نوشته شده صحه گذاشته‌اند. به‌علاوه، بعد از پایان تجزیه و تحلیل به‌وسیله کدها و مضامین تأیید شده، مجدداً روند تجزیه و تحلیل به تأیید همان متخصصان رسید.

مسئله‌های داده شده در جدول ۲ در کلاس ریاضی عمومی و با استفاده از ChatGPT و حتی بعضاً GPT-۴ مورد بررسی قرار گرفت. دلیل استفاده از GPT-۴ این بود که خیلی شبیه به ChatGPT عمل می‌کند و خیلی مورد استفاده دانشجویان است [۱۴]. در حقیقت، GPT-۴ طوری برنامه‌ریزی شده است تا با دایره نامحدودی از اطلاعات در کوتاه‌ترین زمان قادر باشد عملیات پرسش و پاسخ با انسان را انجام دهد. ربات ChatGPT در اصل یک چت‌بات است که علاوه بر پاسخ سؤالات انسان قادر است تا اندازه یک مکالمه طولانی با انسان صحبت کند [۱۶]. رویه این بود که دانشجویان تحت نظارت محققان به‌عنوان مدرس درس و در گروه‌های ۴ نفری مسئله‌ها را از ChatGPT پرسیدند. هر گروه مسائل یک سطح تفکر را بر عهده

¹⁴thematic analysis ¹⁵Chandio, Zafar and Solangi ¹⁶Chillon, Molina, Hoyos and Ortin ¹⁷Miles, Huberman and Saldana

جدول ۲. مسائل ارائه شده در کلاس انتگرال

Table 2: Problems of integral that presented in the class

| ردیف | متن مسئله | سطح تفکر |
|------|---|--------------------|
| ۱ | انواع انتگرال را نام ببرید و با شکل نمایش دهید. | به‌خاطر آوردن |
| ۲ | $\int_a^\infty f(x)dx$ چه نوع انتگرال نام دارد؟ | به‌خاطر آوردن |
| ۳ | مفهوم انتگرال با کدام مفاهیم قبلی ارتباط نزدیکی دارد؟ | به‌خاطر آوردن |
| ۴ | عبارت $\int_{-2}^8 (x^2)dx$ را چگونه توصیف می‌کنید؟ | درک کردن |
| ۵ | به‌نظر شما نمودار تابع اولیه $f'(x) = x^2 + 3x$ چگونه است؟ | درک کردن |
| ۶ | عبارت $\int_{-2}^8 (x^3)dx$ را با شکل نشان دهید و سپس حل کنید. | درک کردن |
| ۷ | مقدار حجم آب مورد نیاز برای پر کردن یک استخر بزرگ که شکل هندسی دقیقی ندارد و از سمت چپ چند متری شیب ملایم و سپس شیب آن تا انتها تند می‌شود چگونه محاسبه می‌شود؟ | به‌کاربردن |
| ۸ | حاصل عبارت $\int \frac{3x+5}{(x+1)(x-3)}$ را پیدا کنید. | به‌کاربردن |
| ۹ | نخستین قضیه اساسی حساب را اثبات کنید و شکل آن را ترسیم کنید. | به‌کاربردن |
| ۱۰ | راه حل $\int \ln x dx$ را با راه حل $\int x \sin x dx$ مقایسه کنید. | تجزیه و تحلیل کردن |
| ۱۱ | حاصل عبارت $\int_0^1 (\sqrt{1-x^2})dx$ را پیدا کنید. | تجزیه و تحلیل کردن |
| ۱۲ | چه مدلی برای ارائه محتوای انتگرال نامعین پیشنهاد می‌دهید؟ | تجزیه و تحلیل کردن |
| ۱۳ | فرض کنید تابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد. درباره‌ی انتگرال‌پذیری در همان بازه برای $f(x)g(x)$ چه می‌توان گفت؟ | ارزیابی کردن |
| ۱۴ | روش‌های انتگرال‌گیری در ریاضی عمومی ۱ را با مثال نشان دهید. | ارزیابی کردن |
| ۱۵ | توضیح دهید چگونه می‌توان با استفاده از شکل یک انتگرال معین را حل کرد. | ارزیابی کردن |
| ۱۶ | خود ChatGPT چه نمره‌ای از ۱۰۰ به خودش درباره توانایی حل مسائل انتگرال می‌دهد؟ | ارزیابی کردن |
| ۱۷ | مسئله‌ای از زندگی روزمره طرح کنید که حل آن با دو بار استفاده از انتگرال معین انجام شود. | خلق کردن |
| ۱۸ | تصور شما از انتگرال معین چهارگانه چگونه است؟ به کمک شکل توصیف کنید. | خلق کردن |
| ۱۹ | آیا می‌توان برای محاسبه انتگرال نیز یک فرمول مانند فرمول تیلور نوشت؟ | خلق کردن |
| ۲۰ | یک تعمیم از انتگرال ارائه دهید. | خلق کردن |

گرفتند. به‌عنوان مثال، یک گروه ۴ نفری بررسی ۳ مسئله سطح «به‌خاطر آوردن» با پرسش از ChatGPT زیر نظر محققان به‌عنوان مدرس درس متقبل شدند و نتیجه به‌دست آمده را با آنچه که در متون واقعی و کتب ریاضی و حساب دیفرانسیل و انتگرال بود مقایسه می‌کردند. نکته قابل ذکر این که GPT-۴ عملکردی بسیار شبیه به ChatGPT داشت و نتایج به‌دست آمده برای هر دو تا حد زیادی یکسان است. بنابراین، در یافته‌ها، تحلیل و بحث نیازی نبود خیلی به GPT-۴ پرداخته شود.

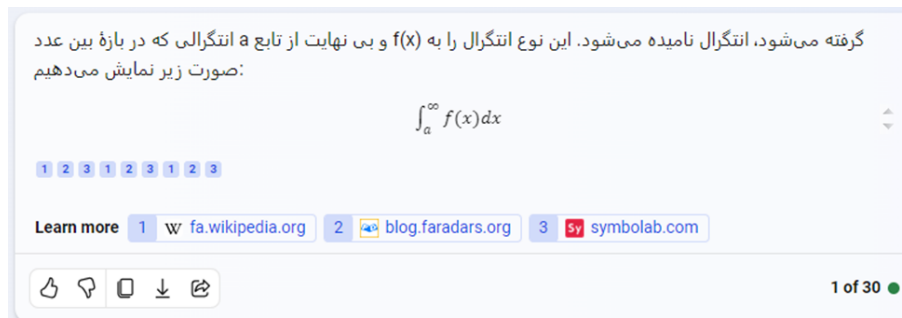
جدول ۳. انواع انتگرال از منظر ChatGPT

Table 3: Types of integrals from the perspective of ChatGPT

| انواع انتگرال نامعین | توضیح | مثال |
|----------------------|--|---|
| نامعین | انتگرالی که بدون محدوده مشخص شده است و مجموعه همه پادمشتق‌های یک تابع را نشان می‌دهد. | $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ |
| معین | انتگرالی که با دو حد پایین و بالا مشخص شده است و مساحت زیر نمودار یک تابع را در یک بازه مشخص می‌دهد. | $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$ |
| خطی | انتگرالی که بر روی یک منحنی یا یک مسیر مشخص انجام می‌شود و مقدار یک تابع را در طول آن منحنی یا مسیر می‌سنجد. | $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ که C یک دایره با شعاع ۱ است. |
| سطحی | انتگرالی که بر روی یک سطح یا یک خمیدگی مشخص انجام می‌شود و مقدار یک تابع را در سطح آن سطح یا خمیدگی می‌سنجد. | $\int \int_S z dz$ که S یک دایره با شعاع ۱ است. |
| چندگانه | انتگرالی که بر روی یک منطقه یا یک حجم مشخص انجام می‌شود و مقدار یک تابع را در آن منطقه یا حجم می‌سنجد. | $\int \int \int_V x^2 + y^2 + z^2 dv$ که V حجم یک مکعب باضلع ۱ است. |

۳. یافته‌ها

مسئله‌های سطح «به خاطر آوردن» که ۳ مورد بودند به ChatGPT داده شد و مورد بررسی قرار گرفت که به تفصیل در ادامه آمده است. برای پاسخ به مسئله اول، ChatGPT پنج نوع مختلف انتگرال ارائه داد. جواب به دست آمده از آن در ادامه و در جدول ۳ ارائه شده است که به دسته‌های مختلف انتگرال را طبقه‌بندی کرده است. البته نتایج حاصله از ChatGPT به صورت جدول ارائه نشده بود و به صورت یک متن طولانی بود که محققان برای راحتی خوانندگان در جدول قرار دادند. ChatGPT چندین لینک برای اطلاعات بیشتر ارائه داده است ولی به هیچ‌گونه شکلی اشاره نکرده است. فقط در لینک‌های داده شده چند مورد شکل آمده است که بسیار جزئی و ناقص بوده و فقط به معرفی انتگرال معین پرداخته است. همچنین در مثال‌هایی که ارائه داده است دقت زیادی نداشته و از پراختز جهت درست نویسی مثال‌ها استفاده نشده است. به عنوان نمونه، برای انتگرال چندگانه باید مثال را به صورت $\int \int \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dv$ می‌نوشت. علی‌رغم این ایرادات، جواب داده شده درباره انواع انتگرال توسط ChatGPT برای این مساله، با جواب مورد نظر در متون و کتب ریاضی مطابقت داشته است. برای مسئله ۲، ChatGPT در متن نتوانست جواب دقیقی به آن بدهد و فقط نوشت که به آن انتگرال گفته



شکل ۲. جواب ChatGPT به مسئله شماره ۲

Figure 2: hatGPT's answer to problem number 2

می‌شود. این‌که چه نوع انتگرالی است و یا چه ویژگی‌هایی دارد در جواب وجود نداشت. به‌علاوه، جواب درهم‌ریخته و نامنظم بود و جمله‌بندی مناسبی برای درک صحیح مسئله وجود نداشت. ولی سه منبع در قالب لینک ارائه داد که انتگرال ناسره که جواب درست این مسئله بود فقط در یکی از آن‌ها یعنی منبع شماره ۲ و با یک مثال آمده بود. در شکل ۲، پاسخ ChatGPT به مسئله مذکور داده شده است.

برای پاسخ به مسئله ۳ به‌عنوان آخرین مسئله در سطح به‌خاطر آوردن، فقط به کلمه مشتق و تابع اشاره کرد و به جزئیات آن نپرداخت. تنها به ذکر ویژگی‌ها و مفهوم انتگرال و مشتق بسنده کرد. هم‌چنین، چهار منبع به‌صورت لینک ارائه داد که فقط در یکی از آنها ارتباط انتگرال نامعین و مشتق به‌صورت کامل اشاره شده بود و از شکل خاصی استفاده نشده بود. در پاسخ به مسئله شماره ۴، به چگونگی حل آن اشاره کرده و اینکه مفهوم انتگرال تابع داده شده در بازه مربوطه چگونه است مورد توجه ChatGPT نبود. مضافاً، به شکل و نمودار تابع و رسم و نمایش آن‌ها در بازه داده شده هیچ اشاره‌ای نداشت. در حالی‌که، می‌بایست به مساحت ناحیه محصور بین نمودار تابع x^2 و محور x از $x=-2$ تا $x=8$ اشاره می‌کرد و نتیجه می‌گرفت که عدد به دست آمده مساحت این ناحیه است. در جواب به مسئله ۵، ChatGPT تنها به ذکر این نکته که برای رسم نمودار تابع اولیه باید از آن انتگرال گرفت بسنده کرد و هیچ توضیح دیگری نداد. سه منبع به‌صورت لینک معرفی کرد که به قوانین انتگرال‌گیری اشاره داشت و هیچ نمودار یا شکلی در آنها وجود نداشت. درباره مسئله ۶، حل جبری کاملی را ارائه داد که با جواب موجود در متون و کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال مطابقت داشت. اما برای رسم شکل، برنامه‌های آنلاین از قبیل کلکیولیت^{۱۸} را معرفی کرد که به هیچ وجه جواب دقیق و مورد نظر را ارائه نداد و فقط یک‌یک معرفی کلی برای رسم شکل به‌صورت آنلاین بود.

برای مسئله ۷، دو راه حل پیشنهاد کرد که در هیچ‌کدام، از انتگرال استفاده نشده بود. ابتدا شیب کف استخر را صفر در نظر گرفت و با تقسیم استخر به دو مثلث از دستور هرون که عبارت است $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ که S مساحت و s نصف محیط که برابر است با $s = \frac{a+b+c}{2}$ به شرطی که a, b, c اضلاع مثلث باشند، مساحت‌ها را محاسبه و با هم جمع کرد. دوم، شیب کف را مثل آنچه که در صورت سؤال آمده است در نظر گرفته و عمق متوسط استخر را با جمع کردن عمق چهار گوشه استخر و تقسیم بر چهار به‌دست آورد. همان‌طور که مشخص است جواب‌ها نادقیق و اسمی از انتگرال هم به میان نیامده است. به‌علاوه، دو شکل دوزنقه به‌صورت کلی رسم کرد که از هدف سؤال بسیار دور بود. ChatGPT مسئله ۸ را به‌طور کامل و درست حل کرد. این جواب را با استفاده از روش تجزیه کسری به‌عوامل اول و انتگرال‌گیری تک‌تک جمله‌ها به‌دست آورد. در پاسخ به مسئله ۹، فقط به‌صورت قضیه اشاره کرد که عبارت بود اگر $P(x) = \int_a^x f(t)dt$ آنگاه $P'(x) = f(x)$

¹⁸Calculate

اثبات آن را به سه لینک ارجاع داد که اثبات مناسبی در آنها وجود نداشت. نه در متن پاسخ و نه در لینک‌های داده شده شکلی دیده نشد. ضمناً، از بستر GPT-۴ نیز برای حل این مسئله استفاده شد، که پاسخ آن عین پاسخ ChatGPT بود. در بررسی پاسخ مسئله ۱۰، برای آن جواب دقیق بر اساس انتگرال جزء‌به‌جزء ارائه داد. جواب جبری کاملی که u و dv در آن بسیار با دقت در نظر گرفته شده بود. از نظر ChatGPT، مقایسه راه حل دو انتگرال نشان می‌داد که روش‌های مختلفی برای حل انتگرال‌های مختلف وجود دارد. برای انتخاب روش مناسب، باید به شکل تابع و عوامل آن توجه شود. هر دو بستر ChatGPT و GPT-۴ در پاسخ به مسئله شماره ۱۱، جواب کامل و درستی ارائه داد. تغییر متغیر $x = \sin \theta$ و اشاره به مساحت نیم‌دایره با شعاع یک در جواب داده شده به روشنی دیده می‌شد و توضیحات کاملی آمده بود که به‌صورت زیر بود.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

برای مسئله ۱۲، ابتدا ChatGPT به انتگرال نامعین پرداخت که یکی از مفاهیم مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال است و نشان می‌دهد چگونه می‌توان یک تابع را با مشتق‌گیری معکوس به دست آورد. انتگرال نامعین برای حل مسائل مربوط به مساحت، حجم، کار، انرژی، معادلات دیفرانسیل و غیره کاربرد دارد. سپس، برای ارائه محتوای انتگرال نامعین، مدل‌های مختلفی را معرفی کرد. برخی از مدل‌های پیشنهادی عبارت بودند از مدل تعریفی که در این مدل، انتگرال نامعین را با تعریف پادمشتق و نمادگذاری آن توضیح می‌دهند. سپس، جدولی از انتگرال‌های پایه را ارائه می‌کنند و با استفاده از آن‌ها چند مثال ساده را حل می‌کنند. این مدل برای آشنایی با مفهوم انتگرال نامعین و فرمول‌های اولیه مناسب است. مدل روشی، که در آن انتگرال نامعین را با بیان روش‌های مختلف انتگرال‌گیری مانند تغییر متغیر، جزء‌به‌جزء، تجزیه کسری، تکنیک‌های مثلثاتی و غیره مورد بررسی قرار می‌دهند. سپس، با استفاده از هر روش چند مثال پیچیده‌تر را حل می‌کنند. مدل کاربردی که در این مدل، انتگرال نامعین را با بیان کاربردهای آن در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، اقتصاد و غیره معرفی می‌کنند. این مدل برای نشان دادن اهمیت و کارایی انتگرال نامعین در حل مسائل واقعی مناسب است. جواب داده شده با متون ریاضی موجود در کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال هم‌خوانی داشت.

ChatGPT در جواب مسئله ۱۳، با استفاده از تعریف انتگرال پذیری، تعریف انتگرال ریمان، خاصیت محدب بودن مجموعه اعداد حقیقی، خاصیت مجاورت انتگرال و تقسیم بازه $[a, b]$ به n قسمت، انتگرال‌پذیری را اثبات کرد. به‌صورت مفصل و قسمت‌به‌قسمت جواب را در متن آورده بود که برای خوانندگان به‌وضوح قابل درک بود. اما، GPT-۴ فقط به ارجاع به چند لینک اکتفا کرده بود که آنها به‌صورت کلی به معرفی انتگرال و قوانین انتگرال‌پذیری می‌پرداخت. مسئله ۱۴ را ChatGPT به این‌صورت پاسخ داد که برای محاسبه انتگرال یک تابع، باید تابع اولیه یا پادمشتق آن را پیدا کرد. تابع اولیه یک تابع $f(x)$ ، یک تابع $F(x)$ است که مشتق آن برابر با $f(x)$ باشد. یعنی $F'(x) = f(x)$ ، برای نشان دادن تابع اولیه از نماد $F(x) = \int f(x) dx$ استفاده می‌شود. برای پیدا کردن تابع اولیه یک تابع، می‌توان از جدول انتگرال‌های معروف، قوانین انتگرال‌گیری و روش‌های مختلفی مانند روش تغییر متغیر، روش جزء‌به‌جزء، روش تجزیه به کسرها ساده و روش تکمیل مربع استفاده کرد. تنها به مثال $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ اکتفا کرد. در واقع باید گفت، اگرچه چند روش انتگرال‌گیری را نام برد، اما تنها یک مثال ارائه داد. به‌نظر می‌رسد که با توجه به متون و کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال، ChatGPT به این مسئله پاسخ درخوری نداد و پاسخی بسیار ناقص ارائه داده است. برای مسئله شماره ۱۵، شش مرحله برای حل، پیشنهاد داده است. ابتدا، شکل منطقه مورد نظر را رسم کنید. دوم، محور افقی را به بازه‌ای که برای انتگرال معین در نظر گرفته‌اید، تقسیم کنید. سوم، محور عمودی را به بازه‌ای که برای تابع در نظر گرفته‌اید، تقسیم کنید. چهارم، شکل را به تعداد زیادی مستطیل کوچک تقسیم کنید. پنجم، حجم هر مستطیل را با استفاده از طول و عرض آن محاسبه کنید. ششم، حجم کل ناحیه را با جمع حجم‌های همه مستطیل‌ها محاسبه کنید. همچنین، ChatGPT مثال $\int_0^3 x^2 dx$ را ارائه کرده است، اما حل کامل آن را فقط به



شکل ۳. پاسخ ChatGPT به مسئله شماره ۱۶

Figure 3: ChatGPT's answer to problem number 16

صورت جبری ارائه داد و هیچ‌گونه شکلی در پاسخ نیامد. به سه لینک جهت یادگیری بیشتر ارجاع داد که فقط در یک مورد از آنها شکلی وجود داشت که به صورت کلی به مساحت زیر نمودار در حل انتگرال اشاره می‌کرد ولی ارتباطی به مثال گفته شده نداشت. در کل، جواب قابل قبولی به صورت توضیحی و جبری ارائه داد اما از رسم شکل و نشان دادن توضیحات همراه با شکل یا جواب مرحله به مرحله در قالب شکل عاجز بود. جواب ChatGPT به مسئله ۱۶ در شکل ۳ ارائه شده است که خود شکل به صورت کامل بیانگر تمام جزئیات می‌باشد.

مسئله ۱۷ را ChatGPT به این طریق پاسخ داد که فرض کنید شما می‌خواهید برای یک سفر با دوستانتان، مسافتی را از یک شهر به شهر دیگر طی کنید. شما می‌خواهید بدانید چه مسیری باید طی کنید تا کمترین زمان را برای رسیدن به مقصد داشته باشید. برای این منظور، می‌توانید با دو بار استفاده از انتگرال معین، مسئله را حل کنید. ابتدا، باید مسافت بین دو شهر را به صورت یک تابع زمانی مدل کنید. برای مثال، فرض کنید که مسافت بین دو شهر dt مسافت بین دو شهر را نشان می‌دهد. سپس، باید زمانی را که می‌خواهید به مقصد برسید، به صورت یک بازه زمانی مدل کنید. برای مثال، فرض کنید که شما می‌خواهید در یک ساعت به مقصد برسید. در این صورت، بازه زمانی شما از $t = 0$ تا $t = 1$ خواهد بود. حالا، باید زمانی را که برای رسیدن به مقصد نیاز دارید، به صورت یک انتگرال معین محاسبه کنید. برای محاسبه این انتگرال، می‌توانید از فرمول $\int_0^1 \frac{1}{v(t)} dt$ استفاده کنید که در این فرمول، $v(t)$ سرعت شما در هر لحظه است. برای محاسبه سرعت، می‌توانید از فرمول $v(t) = \frac{dx}{dt}$ استفاده کنید. با استفاده از این دو فرمول، می‌توانید با دو بار انتگرال معین، زمانی را که برای رسیدن به مقصد نیاز دارید، محاسبه کنید. جواب داده شده با توجه به منابع موجود و معمول کافی و مناسب بود. ChatGPT در پاسخ به مسئله شماره ۱۸ ناتوان بود و فقط به کلیاتی درباره مفهوم انتگرال معین اشاره کرد. هیچ‌گونه پاسخی که ارتباط به هدف اصلی این پرسش داشته باشد در متن ارائه شده و منابعی که به صورت لینک بودند وجود نداشت. برای مسئله شماره ۱۹، پاسخ داده شده ChatGPT خیلی کلی بود. نکات اصلی پاسخ به این نحو بود که می‌توان برای محاسبه انتگرال نیز از فرمول‌هایی مانند فرمول تیلور استفاده کرد. فرمول تیلور، یک فرمول برای تخمین توابع با استفاده از سری توانی است. با استفاده از این فرمول، می‌توان توابع را به صورت سری توانی نمایش و با استفاده از آن‌ها، محاسبات را انجام داد. با استفاده از این روش، می‌توان انتگرال‌های معین را نیز محاسبه کرد. با این حال، برای انتگرال‌های پیچیده، ممکن است این روش به دلیل پیچیدگی محاسباتی، کارآمد نباشد. مثال، شکل و فرمولی در پاسخ وجود نداشت. پاسخ داده شده گنگ، کلی و دور از هدف مسئله بود. در پاسخ ChatGPT به مسئله شماره ۲۰، فقط به یکی از تعمیم‌های مهم انتگرال، که انتگرال لبگ^{۱۹} بود اشاره کرد و به فرمول انتگرال مذکور اشاره نکرده است. این نوع انتگرال، به عنوان یک تعمیم از انتگرال رییمان، توسط هنری لبگ^{۲۰} در

¹⁹Lebesgue ²⁰Henri Lebesgue

سال ۱۸۹۲ معرفی شد. نکته جالب این بود که ChatGPT عنوان انتگرال لیبگ را در متن به صورت انتگرال لبل شیتز آورده بود که باعث سردرگمی دانشجویان شد و در فرآیند بررسی اختلال ایجاد کرد. می‌توان گفت که جواب داده شده به این سؤال بسیار ناقص، کلی و نامناسب بود.

۴. بحث

در بخش قبل، پاسخ‌های هوش مصنوعی و به‌طور مشخص ChatGPT و تا حدودی GPT-۴ به مسئله‌هایی که برای تدریس و تعامل در فرآیند یادگیری انتگرال تنظیم شده بود به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت. مسئله‌ها بر اساس طبقه‌بندی بلوم و در شش سطح تفکر از قبیل به‌خاطر آوردن، فهمیدن، به‌کاربردن، تجزیه و تحلیل کردن، ارزیابی کردن و خلق کردن تهیه شده بود که سه سطح اول (به‌خاطر آوردن، فهمیدن و به‌کاربردن) را سطوح پایین‌تفکر و سه سطح دوم (تجزیه و تحلیل کردن، ارزیابی کردن و خلق کردن) را سطوح بالاتر تفکر می‌نامند [۳۲].

در سطح به‌خاطر آوردن، هر سه مسئله به ChatGPT داده شد. اما جواب‌ها با انتظارات، فاصله زیادی داشت. دقت زیادی در نوشتن علائم ریاضی از قبیل پرانتز، کروشه و غیره نداشت. علی‌رغم اینکه، عدم توجه و دقت کافی به این علائم، عملیات ریاضی به‌ویژه محاسبه انتگرال را با اشتباهات فاحشی همراه می‌سازد، همچنین در مسائل مربوط به این سطح به شکل‌ها و نمودارها هیچ توجه نشده بود و ChatGPT در رسم و ارائه آن‌ها ناتوان نشان داد. به‌علاوه، درهم‌ریختگی و چینش نامناسب کلمات و جملات از مواردی بود که می‌توان در پاسخ‌ها دید. به نظر می‌رسد برای استفاده از پاسخ‌های ارائه شده در آموزش و حل مسئله مفهوم انتگرال می‌بایست مجدداً آن‌را بازنویسی و مرتب کرد تا بتوان در اختیار دانشجویان قرار داد. در عوض، در ارائه پاسخ‌ها به صورت جبری (فارغ از علائم) نسبتاً موفق بود و پاسخ‌ها با کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال هم‌خوانی داشت. با توجه به نتایج حاصله، به نظر می‌رسد ChatGPT خیلی وارد جزئیات در پاسخ به پرسش‌ها و حل مسائل نمی‌شود و در این باره به منابع در قالب لینک ارجاع می‌دهد. مضافاً این‌که در سطح به‌خاطر آوردن، کلیات را مورد بررسی و مرور قرار می‌دهد و به جزئیات توجه زیادی نمی‌شود اگرچه با توجه به تال ۲۱ اشتباهات رایج در یادگیری انتگرال در عدم توجه به همین جزئیات و علائم ساده است [۳۶]. با در نظر گرفتن نتایج، به نظر می‌رسد ChatGPT در لیست کردن موارد خواسته شده درباره انتگرال نسبت به تشخیص و شناسایی مطالب این مفهوم بهتر عمل کرده است، هر چند لیست‌بندی هم خیلی منظم نیست.

درک کردن، سطح دوم از طبقه‌بندی بلوم بود که سه مسئله در این سطح برای آموزش مفهوم انتگرال با استفاده از هوش مصنوعی و مشخصاً ChatGPT در نظر گرفته شده بود. مسائل بر مبنای مضامین این سطح از قبیل توصیف، برآورد و پیش‌بینی تدوین شده بودند. توصیف جبری تا حد قابل قبولی انجام گرفته بود اما توصیف هندسی با استفاده شکل و نمودار در آن دیده نمی‌شد. پیش‌بینی و برآورد را فقط همانند توصیف به صورت جبری انجام داد. منابع ارائه شده برای پاسخ به سؤالات این سطح ناقص بودند و نارسایی‌های زیادی در آنها وجود داشت. به نظر می‌رسد استفاده از ChatGPT در درک سؤالات در فرآیند آموزش انتگرال، یادگیرندگان را با مشکلات زیادی همراه خواهد کرد، زیرا قادر نیست توصیف کاملی از مفهوم انتگرال و جزئیات آن ارائه دهد و در پیش‌بینی رفتار تابع تحت انتگرال به درستی عمل نمی‌کند. به‌علاوه، در برآورد کردن جواب برای مسائل پیچیده نیز کاستی‌های زیادی دارد.

کاربرد قوانین انتگرال‌گیری در حل جبری مسائل مربوطه توسط ChatGPT به صورت کامل و درست انجام شد و قابلیت آن برای حل جبری مسائلی که نیاز به کاربرد قوانین انتگرال بود مطلوب به نظر می‌رسد. برعکس، ChatGPT در کاربرد انتگرال در حل مسائل زندگی روزمره مانند مسئله استخر، ناتوان نشان داد و اصلاً نتوانست تشخیص دهد که برای حل این

²¹Tall

مسئله می‌توان از انتگرال استفاده کرد. در حل مسائل اثبات کردنی، مانند مسئله شماره ۹، به منابعی ارجاع داد که پاسخ مورد نظر را نمی‌توان از آن‌ها دریافت کرد. با توجه به پاسخ ChatGPT به این سؤال، می‌توان چنین بیان داشت که در کاربرد مفهوم انتگرال برای مسائل اثبات کردنی خیلی درست و دقیق عمل نمی‌کند و بعضاً در کاربرد این مفهوم در موارد اولیه و ساده درمی‌ماند. به صورت کلی ChatGPT در سطح کاربرد فقط در استفاده از قوانین انتگرال در حل مسائل ساده به صورت جبری خوب عمل کرده است.

بر اساس پاسخ‌های ChatGPT به مسئله‌های سطح تجزیه و تحلیل، می‌توان دریافت که ChatGPT در تحلیل و ارائه راه‌حل به سؤالات مفهوم انتگرال دارای توانایی زیادی است. تحلیل تابع تحت انتگرال جهت مشخص کردن اجزای آن در روش انتگرال‌گیری جزء به جزء، مقایسه یک تابع با تابع دیگر و همچنین تغییر متغیر درست که نوعی ساختار شکنی تابع اولیه است از مواردی بود که ChatGPT خیلی خوب از عهده آن برآمد. هر چند ChatGPT و حتی GPT-۴ نتوانستند یک مدل کلی برای حل انتگرال نامعین ارائه دهند، اما در معرفی چند مدل که در کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال مهمول است به خوبی عمل کردند و چند نوع گوناگون را نمایش دادند. البته به این نکته باید توجه کرد ارائه موارد مورد اشاره از طرف ChatGPT و GPT-۴ به صورت کاملاً جبری بود. همچنین در حل سؤالات به صورت جبری یا نمادین موفق عمل کردند.

مسائل مربوط به سطح ارزیابی کردن را ChatGPT بهتر و کامل‌تر از GPT-۴ پاسخ داد. علی‌رغم اینکه در همه مسائل مربوط به این سطح تفکر، به رسم و استفاده از شکل و نمودار تاکید شده بود ولی نه در متن پاسخ‌ها و نه در منابعی که ارائه داد شکل و نموداری ارائه نشد. نتیجه‌گیری بر مبنای قوانین و قضیه‌های انتگرال و استفاده از آن‌ها در اثبات انتگرال‌پذیری به خوبی توسط ChatGPT انجام گردید. بررسی انتگرال‌پذیری توابع و ترکیبات مختلف آن‌ها توسط ChatGPT به عنوان یکی از بسترهای هوش مصنوعی که بسیار مورد استفاده دانشجویان است به خوبی انجام شد اما باید به این موضوع اشاره کرد این بررسی در حالت جبری و استفاده و محاسبه با استفاده از ضابطه توابع انجام گردید. مرور یک روش نیز تا حد مقبولی انجام گردید ولی استفاده از مثال‌ها در هر مرحله از مرور و همچنین ارائه یک مثال جامع دیده نشده است. مرور به صورت نوشتاری و البته قابل قبول ارائه شده است اگرچه در ارتباط دادن این نوشتار با نمادها و توابع در انتگرال عملکرد خوبی نداشت. همان‌طور که ارزیابی ChatGPT و حتی GPT-۴ درباره خودش در شکل ۳ ارائه شده است، درباره اینکه چه نمره‌ای به خودشان بدهند جوابی ندادند و فقط به قابلیت‌ها و ظرفیت‌های خود اشاره داشتند.

ضعیف‌ترین عملکرد ChatGPT در پاسخ به مسئله‌های مربوط به سطح تفکر، خلق کردن دیده شد. با توجه به این‌که خلق کردن بالاترین سطح طبقه‌بندی بلوم می‌باشد و انتظار بود هوش مصنوعی و به‌ویژه ChatGPT بتواند کارایی خود را در این مرحله نشان دهد، ولی ضعیف‌ترین کارکرد در این مرحله مشاهده شد. استفاده از مفهوم انتگرال در زندگی روزمره را با یک مثال به خوبی در حالت جبری ارائه داد، اما این‌که خلاقیت و ایده‌ای در ارائه انتگرال چهارگانه داشته باشد و بسطی از یک نوع انتگرال خاص طراحی کند دیده نشد. حتی در پاسخ به مسئله مربوط به تعمیم انتگرال نیز نتوانست جواب قابل قبولی بسازد و خلق کند. به نظر می‌رسد ChatGPT در برنامه‌ریزی برای زایش ایده‌های جدید بر مبنای اطلاعات قبلی دارای مشکلات عدیده‌ای است. طراحی، ساخت و برنامه‌ریزی از مظاهر تفکر در سطح خلق کردن است که در پاسخ‌های ارائه شده توسط این بستر دیده نشد و حتی اشتباهات فاحش و سردرگم‌کننده‌ای نیز به همراه داشت.

۵. نتیجه‌گیری

این مطالعه نشان داد که ChatGPT می‌تواند یک ابزار آموزشی مفید کمک آموزشی باشد، اما هنگام استفاده از آن احتیاط لازم است و دستورالعمل‌هایی برای استفاده بهینه و کامل آن باید تدوین شود. در این مطالعه، ۲۰ مسئله بر اساس شش سطح تفکر بلوم طراحی گردید و در شش جلسه توسط دانشجویان در گروه‌های چهار نفری تحت نظارت کامل محققین

جدول ۴. نقاط ضعف و قوت ChatGPT در آموزش مفهوم انتگرال

Table 4: Strengths and weaknesses of ChatGPT in teaching the concept of integrals

| ضعفها | قوتها |
|---|--|
| ۱. در ارائه مثالها، مطالب دقت زیادی ندارد که ممکن است باعث بدفهمی شود. | ۱. محاسبات در حالت نمادین یا جبری را خیلی خوب انجام می‌دهد. |
| ۲. در استفاده از شکل و نمودار و همچنین معرفی منابع مناسب با تاکید بر شکل و نمودار ناتوان است. | ۲. در سطوح تفکر سطح پایین‌تر (به‌خاطر آوردن، فهمیدن، به‌کاربردن) عملکرد بهتری دارد. |
| ۳. منابع ارائه شده با هدف مورد نظر هم‌خوانی کمی دارد. | ۳. در ارائه اثبات قضایا و حل مسائل اثبات‌کردنی عملکرد قابل قبولی دارد. |
| ۴. تکرار مکررات دارد و بعضاً پاسخ مشابه، به سؤالات متفاوت داده است. | ۴. در ارائه مثال‌هایی که نشان دهد انتگرال در زندگی روزمره مورد استفاده قرار می‌گیرد موفق عمل می‌کند. |
| ۵. در تعمیم‌دهی صحیح، نیاز به ارتقاء دارد. | ۵. منابع متنوعی ارائه می‌کند، هرچند بعضاً خیلی نزدیک به هدف اصلی نیستند. |
| ۶. در سطوح تفکر سطح بالاتر (تجزیه و تحلیل کردن، ارزیابی کردن و خلق کردن) عملکرد خوبی ندارد. | |

به‌عنوان مدرس درس از ChatGPT و حتی بعضاً از GPT-۴ پرسیده شد. پاسخ‌های آن‌ها بر مبنای مضامین سطوح مختلف تفکر در فرآیند آموزش مفهوم انتگرال مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. نقاط قوت و ضعف ChatGPT در فرآیند آموزش که بر مبنای روش حل مسئله بود در جدول ۴ آمده است.

با توجه به نتایج حاصله در این مطالعه، دلیل اصلی دشواری‌ها در ChatGPT با ریاضی، داده‌های آموزشی آن است. در حالی‌که در معرض حجم وسیعی از متن اینترنتی قرار گرفته است، داده‌های آموزشی به‌طور خاص برای مفاهیم ریاضی و حل مسئله طراحی نشده‌اند. در نتیجه، ChatGPT ممکن است فاقد دانش ریاضی و توانایی‌های استدلالی لازم برای رسیدگی به مسائل پیچیده ریاضی باشد. به‌نظر می‌رسد هوش مصنوعی می‌تواند راهنمای خوبی برای دانشجویان در یافتن مسیرهای منتهی به حل مسائل و یادگیری مفهوم انتگرال باشد و یک ابزار کمکی برای مدرسان به حساب آید، اما نمی‌توان آن‌را به‌عنوان یک روش مطمئن و کارآمد در آموزش کامل این مفهوم در نظر گرفت. ChatGPT و GPT-۴ نمی‌توانند جایگزین مدرس در کلاس درس انتگرال باشند و حتی می‌توان گفت کارایی آن از یک مدرس بیشتر نیست. فقط در حل مسائل جبری طولانی که محاسبات زیادی را نیاز دارند و همچنین معرفی و در دسترس قرار دادن منابع بهتر عمل می‌کند.

ایرادات اساسی در این بسترها وجود دارد که نیازمند تلاش پایه‌گذاران برای رفع آن‌ها است. پیشنهاد می‌شود ارتقاء گرافیکی آن مورد توجه پایه‌گذاران و برنامه‌نویسان قرار گیرد تا رسم نمودار و رسم شکل در آن به‌صورت کامل و مفید انجام شود. در تعمیم مفهوم انتگرال در سطوح بالاتر تفکر کارایی مناسبی نداشته و نیازمند ارتقاء است. به‌علاوه، پیشنهاد می‌شود پایه‌گذاران این بستر تلاش کنند تا مطالب در متن پاسخ‌ها ارائه شود و خیلی به منابع ارجاع داده نشود، چون نوعی سردرگمی برای استفاده‌کنندگان ایجاد می‌کند. همچنین به دانشجویان و اساتید توصیه می‌گردد از آن در کلاس‌های درس استفاده کنند چون محاسبات را به‌طور دقیق و قابل قبول انجام می‌دهد و راهنمایی‌های خوبی برای آنها فراهم می‌کند. اما، نباید خیلی مورد اعتماد فراگیران و استفاده‌کنندگان قرار گیرد، زیرا دارای اشتباهات فاحش و بعضاً ساده‌ای است که باعث بدفهمی و کج‌فهمی‌هایی خواهد

شد. به نویسندگان منابع درسی مربوطه به مفهوم انتگرال پیشنهاد می‌شود تا منابع را طوری تدوین کنند تا بتوان از ظرفیت هوش مصنوعی و مشخصاً ChatGPT در آموزش انتگرال استفاده کرد.

تحقیقات آینده باید محدودیت‌های این مطالعه را بشناسد و به آنها رسیدگی کند. این مطالعه فقط پاسخ مسائل را با پرسش از ChatGPT در آموزش بررسی و فقط از تجزیه و تحلیل کیفی استفاده می‌کند، نه تحلیل کمی. لذا مطالعات آینده می‌تواند از روش کمی برای تأیید یافته‌های مطالعه حاضر اقدام کند. با گنجاندن ChatGPT در روش‌های آموزشی، تحقیقات آینده می‌تواند به بررسی و مطالعه نحوه همکاری معلمان، مدرسان و مربیان با ماشین‌هایی مانند ChatGPT و GPT-4 برای دستیابی به اهداف آموزشی و بررسی تغییرات بالقوه تکاملی یا انقلابی که می‌تواند در زمینه آموزش رخ دهد بپردازد. به علاوه، به محققان آینده پیشنهاد می‌شود تا کارایی هوش مصنوعی به‌ویژه ChatGPT را در آموزش و حل مسائل دیگر مفاهیم ریاضی و حساب دیفرانسیل و انتگرال از قبیل تابع، مشتق و غیره مورد مطالعه قرار دهند.

مراجع

- [1] S. M. Adeniji, P. Baker and M. Schmude, Structure of the Observed Learning Outcomes (SOLO) model: A mixed-method systematic review of research in mathematics education, *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, **18** (2022).
- [2] L. W. Anderson and D. R. Krathwohl, *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*, Allyn and Bacon. Boston, MA (Pearson Education Group), 2001.
- [3] D. Baidoo-Anu and L. O. Ansah, Education in the era of generative artificial intelligence (AI): Understanding the potential benefits of ChatGPT in promoting teaching and learning, *Journal of AI*, **7** (2023) 52–62.
- [4] M. T. Chandio, N. Zafar and G. M. Solangi, Bloom's taxonomy: reforming pedagogy through assessment, *Journal of Education and Educational Development*, **8** (2021) 109–140.
- [5] A. H. Chillon, J. G. Molina, J. R. Hoyos and M. J. Ortín, Propagating Schema Changes to Code: An Approach Based on a Unified Data Model, *CEUR Workshop Proceedings*, 2023 pp. 10.
- [6] J. W. Creswell, Mapping the field of mixed methods research, *Journal of mixed methods research*, **3** (2009) 95–108.
- [7] E. Dubinsky, Using a theory of learning in college mathematics courses, *MSOR Connections*, **1** (2013) 10–15. <https://doi.org/10.11120/msor.2001.01020010>
- [8] X. Q. Dao and N. B. Le, Investigating the effectiveness of ChatGPT in mathematical reasoning and problem solving: evidence from the vietnamese national high school graduation examination, *arXiv preprint arXiv:2306.06331*, 2023.
- [9] R. Ely and S. R. Jones, The teaching and learning of definite integrals: a special issue guest editorial, *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, **9** (2023) 1–7.
- [10] M. Forehand, Bloom's taxonomy, *Emerging perspectives on learning, teaching, and technology*, **41** (2010) 47–56.
- [11] S. Fowler, C. Cutting, S. H. Fiedler and S. N. Leonard, Design-based research in mathematics education: trends, challenges and potential, *Mathematics Education Research Journal*, **35** (2023) 635–658.

- [12] S. Frieder, L. Pinchetti, R. R. Griffiths, T. Salvatori, T. Lukasiewicz, P. C. Petersen and J. Berner, Mathematical capabilities of chatgpt, *arXiv preprint arXiv:2301.13867*, 2023.
- [13] A. S. González-Martín, The use of integrals in engineering programmes: A praxeological analysis of textbooks and teaching practices in strength of materials and electricity and magnetism courses, *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, **7** (2021) 211–234. <https://doi.org/10.1007/s40753-021-00135-y>.
- [14] S. Grassini, Shaping the future of education: exploring the potential and consequences of AI and ChatGPT in educational settings, *Educ. Sci.*, **13** no. 7 (2023) 692.
- [15] N. Hashemi, H. Kashefi and M. S. Abu, The emphasis on generalization strategies in teaching integral: calculus lesson plans, *Sains Humanika*, **12** (2020) 35–43.
- [16] D. Horiuchi, H. Tatekawa, T. Oura, T. Shimono, S. L. Walston, H. Takita et al, Comparison of the diagnostic accuracy among GPT-4 based ChatGPT, GPT-4V based ChatGPT, and radiologists in musculoskeletal radiology, *medRxiv*, **12** (2023) 26 pp.
- [17] C. H. Huang, Engineering students' visual thinking of the concept of definite integral, *Global Journal of Engineering Education*, **15** (2013) 111–117.
- [18] N. Hrebin, S. Grabovska, R. Karkovska and A. Vovk, Applying benjamin Bloom's Taxonomy ideas in adult learning, *Journal of Education Culture and Society*, **11** (2020) 61–72.
- [19] N. Karjanto, Mathematical modeling for sustainability: How can it promote sustainable learning in mathematics education?, *arXiv preprint arXiv:2307.13663*, 2023.
- [20] C. K. Lo, What is the impact of chatgpt on education? a rapid review of the literature. *Educ. Sci.*, **13** no. 4 (2023) 410. <https://doi.org/10.3390/educsci13040410>
- [21] N. Mahir, Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **40** (2009) 201–211. <https://doi.org/10.1080/00207390802213591>.
- [22] M. Mason, The van Hiele levels of geometric understanding, *Colección Digital Eudoxus*, **1** (2009).
- [23] J. Mason, L. Burton and K. Stacey, *Thinking Mathematically*, (2th edition), Edinburgh: Pearson, 2010.
- [24] M. B. Miles, A. M. Huberman, and J. Saldana, *Qualitative data analysis: a method sourcebook*, (3rd ed.), Thousand Oaks, California: Sage Publications, Inc, 2019.
- [25] F. Nursyahidah and I. Albab, Investigating student difficulties on integral calculus based on critical thinking aspects, *Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, **4** (2017) 211–218. <http://dx.doi.org/10.21831/jrpm.v4i2.15507>.
- [26] T. Pelton and L. F. Pelton, Adapting ChatGPT to Support Teacher Education in Mathematics, *In Society for Information Technology and Teacher Education International Conference*, Association for the Advancement of Computing in Education (AACE), (2023) 1662–1670.
- [27] N. Pinede, Thematic Analysis of Hyperlinks: A Taxonomic Approach, *Analyzing Websites*, (2023) 191–229.
- [28] D. Serhan, Students' Understanding of the Definite Integral Concept, *International Journal of Research in Education and Science*, **1** (2016) 84–88. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1105099.pdf>
- [29] A. Shoufan, Exploring students' perceptions of ChatGPT: thematic analysis and follow-up survey, *IEEE Access*, **11** (2023) 38805–38818. <http://dx.doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3268224>.

- [30] U. Sholihah and M. Maryono, Students' visual thinking ability in solving the integral problem, *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, **5** (2020) 175–186. <https://doi.org/10.23917/jramathedu.v5i2.10286>.
- [31] R. Sternberg, Applying psychological theories to educational practice, *American Educational Research Journal*, **45** (2008) 150–165.
- [32] O. Stumke, Information communication technology integration via Bloom's taxonomy in accountancy curriculum, *Transformation in Higher Education*, **8** (2023) 11 pp.
- [33] A. D. Sulistyaningtyas and R. R. Wantika, Analysis of student learning difficulties in solving calculus II course case studies, *Journal of Education and Learning Mathematics Research (JELMaR)*, **4** (2023) 171–178.
- [34] J. P. Remoto, ChatGPT and other AIs: Personal relief and limitations among mathematics-oriented learners, *Environment and Social Psychology*, **9** (2024) 13 pp. <https://doi.org/10.54517/esp.v9i1.1911>
- [35] D. Tall, Students' difficulties in calculus, *In Proceedings of Working Group*, **3** (1993) 13–28.
- [36] D. Tall, *Making sense of mathematical thinking over the long term: the framework of three worlds of mathematics and new developments*, Draft. To appear in D. Tall, and I. Witzke (Eds.): MINTUS: Beiträge zur mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung. Wiesbaden: Springer, 2019.
- [37] R. D. Thomas, James Hutton's concept of time: that of Leibniz, not Newton, *Geology Today*, **38** (2022) 108–111.
- [38] H. H. Thorp, ChatGPT is fun, but not an author. *Science*, **379** (2023) 313–313.
- [39] I. Umami, Moderating influence of curriculum, pedagogy, and assessment practices on learning outcomes in Indonesian secondary education, *Journal of Social Studies Education Research*, **9** (2018) 60–75. <https://jsser.org/index.php/jsser/article/view/243>.
- [40] K. V. Vlasenko, I. V. Lovianova, O. O. Chumak, I. V. Sitak and D. A. Kovalenko, The wheel of mathematics learning methods, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **2611** (2023). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2611/1/012001>
- [41] Y. Wardat, M. A. Tashtoush, R. AlAli and A. M. Jarrah, ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics, *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, **19** (2023). <https://doi.org/10.29333/ejmste/13272>
- [42] R. P. Yudha, Higher order thinking skills (HOTS) test instrument: Validity and reliability analysis with the rasch model. *EduMa: Mathematics education learning and teaching*, **12** (2023) 21–38.
- [43] Z. Zafrullah, M. L. Hakim and M. Angga, ChatGPT open AI: Analysis of mathematics education students learning interest. *Journal of Technology Global*, **1** (2023) 1–10.
- [44] Z. Zetriuslita, R. Ariawan and H. Nufus, Students' critical thinking ability: Description based on academic level and gender. *Journal of Education and Practice*, **7** (2016) 154–164.
- [۴۵] روح الله جهانی پور و سعید مقصودی، تاریخچه‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها و بی‌نهایت بزرگ‌ها در حساب دیفرانسیل و انتگرال، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۳۸** (۱۳۹۸) ۷۷–۱۲۱.

نوروز هاشمی

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

h.nourooz@cfu.ac.ir

نوروز هاشمی متولد شهریور ماه ۱۳۶۰ در شهر گچساران است. وی در سال ۲۰۱۵ از دانشگاه صنعتی مالزی (*UTM*) در رشته آموزش ریاضی در مقطع دکتری فارغ‌التحصیل شد. حل مسئله، نظریه‌های آموزش ریاضی، ارزشیابی آموزش ریاضی، تعمیم در آموزش ریاضی، مطالعات تطبیقی در آموزش ریاضی و تفکر ریاضی، از علایق پژوهشی نامبرده هستند.

**حمیدرضا کاشفی**

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

hkashefi@cfu.ac.ir

حمیدرضا کاشفی متولد مهرماه ۱۳۵۱ در شهر اسلام‌آباد غرب است. وی در سال ۲۰۱۲ از دانشگاه صنعتی مالزی (*UTM*) در رشته آموزش ریاضی در مقطع دکتری فارغ‌التحصیل شد. تفکر ریاضی، حل مسئله، آموزش مهندسی، راهبردهای تدریس در آموزش ریاضی از علایق پژوهشی ایشان هستند.

