

SOME STRUCTURES OF THE CATALAN NUMBERS I

DANIEL YAQUBI*^{ORCID} AND MADJID MIRZAVAZIRI^{ORCID}

ABSTRACT. The Catalan numbers are ubiquitous in counting problems, which is one of the primary reasons for its popularity. From various sources like books and Wikipedia, we see that in combinatorial mathematics. The Catalan numbers form a sequence of natural numbers that occur in various counting problems, often involving recursively-defined objects such as polygon triangulation, balanced parentheses, mountain ranges, diagonal avoiding paths and binary tree. Belgian mathematician Eugene Charles Catalan discovered these numbers in 1838, while studying well-formed sequences of parentheses. They are named after the Belgian mathematician Eugene Charles Catalan. Although they are named after Catalan, they were not first discovered by him. These numbers appear in a variety of disguises, we are so used to having them around, it is perhaps hard to imagine a time when they were either unknown, or known but obscure and underappreciated. The organization of this paper is as follows. We first encounter with a number of occurrences of the CBC and the Catalan numbers. Then, we study to understand the connections between these numbers and well-known structures of Catalan numbers like dyck paths, binary trees, permutations, partitions and etc. We also discuss some algebraic interpretations and additional aspects of the Catalan numbers.

1. Introduction

For positive integers $n \geq k$, the *Binomial coefficient* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ appears in Khayyam Triangle which is one of the most important object to solving and proposing combinatorics problems. Using

Keywords: Catalan numbers, Dyck Paths, Permutation, Binary trees.

Communicated by Alireza Abdollahi.

Article Type: Research Paper.

*Corresponding author.

Received: 14/05/2023, Accepted: 17/10/2023, Published Online: 13-12-2023.

Cite this article: D. Yaqubi and M. Mirzavaziri, Some Structures of the Catalan Numbers I, *Journal of Mathematics and Society*, 8 no. 4 (2023) 37–70.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137667.1574> .

properties of binomial coefficients, we can write

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} \\ &= \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n} \\ &= 2\binom{2n-1}{n}, \end{aligned}$$

where shows these numbers are even. The *CBCs* $\binom{2n}{n}$ are centrally located in even numbered rows in Pascal’s triangle, as Figure 1 shows.

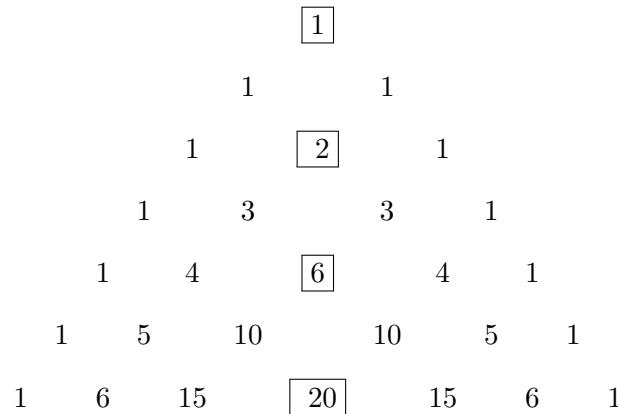


FIGURE 1. Khayyam’s Triangular

It was conjectured by *Paul Erdős* that the *CBC* numbers are squarefree, for all $n > 4$. This conjecture was proved for every sufficiently large n [4, 16].

These numbers appears in several importance sequences, like *Catalan*, *Narayana*, *Motzikin* and *etc.* This is one of the reasons for researchers to having special attention to these numbers. The n -Catalan numbers defined as $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, with initial value $C_0 = 1$. To date, nearly 400 articles and problems have appeared on Catalan numbers. *Richard P. Stanley* of Massachusetts Institute of Technology, has listed over 270 occurrences of Catalan numbers in his *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, and another seventy on his Web site *Catalan Addendum* [17, 18]. The *CBC* numbers are given as sequence A000108 in the *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [20].

To derive the generating function of the Catalan numbers, suppose that

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots,$$

is the requested generating function. Using some initial values of Catalan numbers, we can write

$$\begin{aligned} xC^2(x) &= (1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + \dots)^2 \\ &= 1 + 2x + 5x^2 + 14x^3 + \dots = C(x) - 1. \end{aligned}$$

Then

$$(1.1) \quad 4x^2C^2(x) = 4xC(x) - 4x + 1 - 1,$$

which gives $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

In this paper, we introduce and prove some structures of the Catalan numbers. A family of sets $\{\mathcal{S}_i\}_{n=1}^\infty$ is called a structure of the Catalan numbers, if there exists a bijection $\mathcal{F} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{C}_n$ between these family and the Catalan numbers. In section 1, we shall only study Dyck paths, and provide several bijective proofs like polygon triangulation, balanced parentheses, mountain ranges, that they are counted by the Catalan numbers. We first introduce Dyck and binary paths, and then state our main theorem in section 2. In section 3, we discuss the relation between of the Catalan numbers and Nonintersecting Chords. In particular, we show that, if we have $2n$ persons who labeled $v_1; v_2; \dots; v_{2n}$, and they are located at the boundary of a circle with equal distance between every two adjacent persons, and if R_n denotes the set of different ways to pair these persons with edges (as straight lines) that do no intersect; then $|R_n| = |\mathcal{C}_n|$. In section 4, we find structures of the Catalan numbers and triangulated polygons. Section 5 is devoted to structures of the Catalan numbers and words. In Section 6, we prove that \mathcal{C}_n counts the number of plane trees with $n + 1$ vertices and also, states several new structures of the Catalan numbers and trees, we recall that a *plane tree* is a rooted tree with an ordering specified for the children of each vertex . Sections 7 and 8 are devoted to study of the structures of the Catalan numbers between permutations and partitions.

2. Main Results

There are many equivalent ways to define the Catalan numbers. The main results of this paper, focus on combinatorial interpretations of the Catalan numbers. Some of structures of the Catalan numbers, which is discuss in this paper, are:

1. Dyck paths of length n with two steps $(0, 1)$ and $(1, 0)$.
2. Binary parenthesizations of a string of $n + 1$ letters.
3. The set of binary trees with n nodes.
4. Plane trees with n internal nodes, all of degree 2.
5. Paths from $(0, 0)$ to $(2n, 0)$ with steps $(1, -1)$ and $(1, 1)$, never falling below the x -axis.
6. Noncrossing pairs of sequences of $n + 1$ steps $(1, 0)$ and $(0, 1)$, which only intersect at start and end.
7. In Stanley, this is described as non-intersecting arcs joining n pairs of points in the plane. Our preferred version of this representation is to think of it as partitions of $2n$ into blocks of size 2.

8. n nonintersecting chords joining $2n$ points on a circle.
9. Ways of drawing $n + 1$ points on a line with arcs connecting them such that the arcs do not pass below the line, the arcs are noncrossing, all the arcs at a given node exit in the same direction (left or right), and the graph thus formed is a tree.
10. Partitions of an $(n + 2)$ -gon into triangles.
11. Noncrossing partitions of $[n]$.
12. Noncrossing Murasaki diagrams with n vertical bars.
13. Nonnesting partitions of $[n]$.
14. Permutations of the multiset $\{1^2, 2^2, \dots, n^2\}$ such that the first occurrences of each number appear in increasing order, and there is no subsequence of the form $abab$.
15. 321-avoiding permutations of $[n]$.
16. Permutations w of $[2n]$ with n cycles of length two such that the product $(1, 2, \dots, 2n)w$ has n cycles.
17. Permutations of $[n]$ that can be stack sorted.
18. Binary parenthesizations of a string of $n + 1$ letters.
19. The numbers of the sequences (a_1, \dots, a_n) such that $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ and $a_i \leq i$.
20. Standard Young Tableaux of shape (n, n) .

3. Conclusions

We have studied some nice structures of the Catalan numbers in this paper. We make frequent references to Stanley's list of Catalan representations [19]. These can be found in exercise 6.19, where each of the representations discussed is given as a part of the exercise. We first encountered with a number of occurrences of the CBC, $\binom{2n}{n}$, and the Catalan numbers. Then, we studied to understand the connections between these numbers and some well-known structures of the Catalan numbers, like dyck paths, binary trees, permutations, partitions and etc. We also discussed some algebraic interpretations and additional aspects of Catalan numbers. It might be interesting for readers to consider the results on divisibility of CBC and Catalan numbers, and also to explore similar techniques for Structures of Motzkin numbers, Delannoy numbers, Narayana Numbers and etc.

Daniel Yaqubi

Department of Mathematics, University of Torbat e Jam, Torbat e Jam, Iran
yaqubi@tjamcaas.ac.ir

Madjid Mirzavaziri

Department of Mathematics, University of Ferdowsi Mashhad, Iran
mirzavaziri@um.ac.ir

برخی از ساختارهای اعداد کاتالان I

دانیال یعقوبی*^{id} و مجید میرزاوزیری^{id}

چکیده. یکی از مهم‌ترین دلایل شهرت اعداد کاتالان، ظاهر شدن آن‌ها در بسیاری از مسائل شمارشی می‌باشد. با مطالعه منابعی که از اعداد کاتالان وجود دارد، مانند کتاب‌ها و صفحه ویکی‌پدیا، متوجه می‌شویم در ترکیبیات؛ دنباله این اعداد در بسیاری از مسائل شمارشی مانند مثلث بندی کردن یک چند ضلعی، پرانتزگذاری بین n متغیر، شمارش قله‌ها، مسیرهای مشبکه، دنباله‌های پرهیز و درخت‌های دودویی، به صورت بازگشتی ظاهر می‌گردد. این اعداد برای نخستین بار توسط ریاضیدان بلغاری اوجن چارلز کاتالان کشف شد و بعدها به این نام مشهور گردید. البته، تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که این اعداد خیلی قبل‌تر از کاتالان مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این اعداد به شکل‌ها و صورت‌های متفاوتی ظاهر می‌گردند، اما کاربرد زیاد این اعداد در شاخه‌های مختلف ریاضی باعث شده حتی تصور اینکه اعداد کاتالان روزگاری ناشناخته و تعریف نشده بوده است، سخت باشد. در این مقاله، ابتدا ضریب دوجمله‌ای مرکزی را معرفی می‌کنیم و سپس به مطالعه بعضی از ساختارهای مشهور اعداد کاتالان مانند مسیرهای دیک، درخت‌های دودویی، جایگشت‌ها و افزاها، می‌پردازیم. ما همچنین بعضی از ساختارهای جبری و دیگر اعداد کاتالان را نیز بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

فرض می‌کنیم n و k ، که $n \geq k$ ، اعداد صحیح نامنفی باشند. ضریب دوجمله‌ای $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ، که در مثلث خیام نیز ظاهر می‌گردد، یکی از مهم‌ترین ابزار طرح و حل مسئله در ترکیبیات می‌باشد و در بسیاری از مسائل شمارشی ترکیبیات مورد استفاده قرار می‌گیرد. ضریب دوجمله‌ای مرکزی^۱ $\binom{2n}{n}$ یا (CBC) ، که در سطرهای زوج و ستون میانی مثلث خیام ظاهر می‌شود (شکل ۱)، به خاطر ظاهر شدن در روابط زیادی از ترکیبیات شمارشی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با استفاده از خواص ضریب دوجمله‌ای، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} \\ &= \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n} \\ &= 2 \binom{2n-1}{n}; \end{aligned}$$

عبارات و کلمات کلیدی: اعداد کاتالان، مسیر دیک، جایگشت، افزا، درخت دودویی.

دبیر تخصصی رابط: علیرضا عبدالمی

نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

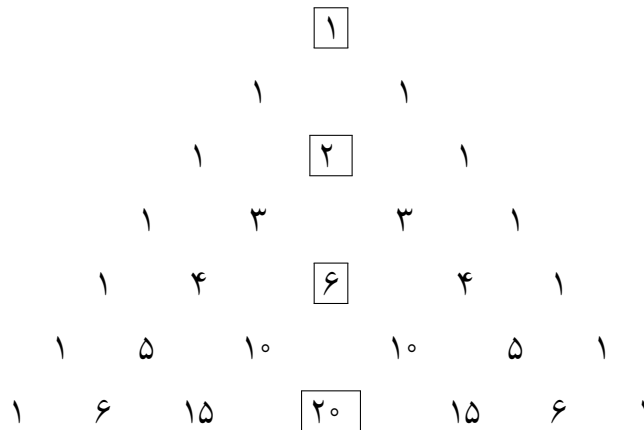
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۲۵ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۹/۲۲

ارجاع به مقاله: د. یعقوبی و م. میرزاوزیری، برخی از ساختارهای اعداد کاتالان I، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره ۴ (۱۴۰۲) ۳۷-۷۰.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137667.1574>

¹central binomial coefficient

که نشان می‌دهد این اعداد زوج می‌باشند.



شکل ۱. مثلث خیام

Figure 1: Khayyam's Triangular

پاول اِردوش^۲ حدس زد برای $n \geq 4$ این اعداد خالی از مربع^۳ می‌باشند که بعدها این حدس اثبات گردید [۴، ۱۵]. ظاهر شدن ضرایب CBC در دنباله‌های عددی معروف مانند کاتالان^۴، نارایانا^۵، موتزکین^۶، باعث شده است تا ریاضیدان‌ها نگاه ویژه‌ای به این ضرایب داشته باشند. n -امین عدد کاتالان به صورت $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ با مقدار اولیه $C_0 = 1$ تعریف می‌شود. تا کنون بیش از ۴۰۰ مقاله و مسئله در ریاضیات مطرح شده است که پاسخ آن‌ها به اعداد کاتالان ختم می‌گردد، این اعداد که برای نخستین بار توسط ریاضیدان بلغاری اوجین چارلز کاتالان^۷ معرفی شده‌اند. ریچارد استنلی^۸ بیش از ۲۷۰ مسئله معرفی کرده که پاسخ آن‌ها به اعداد کاتالان می‌انجامد [۱۶، ۱۷]. این اعداد دارای کد $A000108$ در دایره المعارف آنلاین دنباله اعداد صحیح (OEIS)^۹ می‌باشند [۱۹]. با کمی دقت به مقادیر اولیه اعداد کاتالان می‌توان تابع مولد آن‌را به صورت زیر حدس زد.

فرض کنیم $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$ تابع مولد اعداد کاتالان باشد. با قرار دادن مقادیر C_i در آن داریم

$$\begin{aligned} xC^2(x) &= (1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + \dots)^2 \\ &= 1 + 2x + 5x^2 + 14x^3 + \dots = C(x) - 1. \end{aligned}$$

بنابراین

$$4x^2 C^2(x) = 4xC(x) - 4x + 1 - 1$$

که از آن نتیجه می‌شود $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$

در این مقاله، هدف ما بیان و اثبات برخی ساختارهای اعداد کاتالان می‌باشد. خانواده‌ای از مجموعه‌ها مانند $\{S_i\}_{n=1}^{\infty}$ را یک ساختار کاتالان^{۱۰} می‌گوییم، هرگاه نگاشت دوسویی مانند $\mathcal{F} : S_n \rightarrow C_n$ بین این خانواده از مجموعه‌ها و اعداد کاتالان وجود داشته باشد.

²Paul Erdős ³square free ⁴Catalan ⁵Narayana ⁶Motzkin ⁷Eugène Charles Catalan ⁸Richard Stanley ⁹the on-line encyclopedia of integer sequences ¹⁰catalan structure

۲. تناظر با مسیره‌های مشبکه

فرض کنیم A یک مستطیل $m \times n$ در ربع اول صفحه مختصات با mn مربع 1×1 و $\mathcal{S} = \{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ مجموعه‌ای از بردارها در \mathbb{R}^2 باشد. یک مسیر مشبکه^{۱۱} از نقطه (a, b) به (c, d) داخل مستطیل A عبارت است از حرکت از نقطه‌ی (a, b) و رسیدن به نقطه‌ی (c, d) ، به طوری که جابه‌جایی‌ها مجاز از مجموعه \mathcal{S} انتخاب شوند. مجموعه این مسیره‌ها را با

$$L((a, b) \rightarrow (c, d); \mathcal{S})$$

نمایش می‌دهیم. تعداد کل مسیره‌های مشبکه از نقطه (a, b) به نقطه (c, d) را با $\ell(a, b, c, d; \mathcal{S})$ نمایش می‌دهیم، یعنی

$$\ell(a, b, c, d; \mathcal{S}) = |L((a, b) \rightarrow (c, d); \mathcal{S})|.$$

قرار می‌دهیم $\mathcal{S} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ، و $N = (0, 1)$ را حرکت شمالی و $E = (1, 0)$ را حرکت شرقی در نظر می‌گیریم. مسیر مشبکه از نقطه $(0, 0)$ تا نقطه (n, n) با حرکات شمالی و شرقی N و E بالای خط $y = x$ را یک مسیر دیک^{۱۲} گویند. مجموعه تمام مسیره‌های دیک را با Dyck و تعداد کل آن‌ها را با $|Dyck(n)|$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$|Dyck(n)| = \ell((0, 0) \rightarrow (n, n); \{N, E\}).$$

با در نظر گرفتن رابطه

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1},$$

نتیجه می‌شود $|Dyck(n)| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$. شاید برایتان سؤال باشد که چگونه این رابطه را می‌توان حدس زد! در واقع رابطه فوق از مهمترین اصول در شمارش مسیره‌های مشبکه، یعنی اصل انعکاس^{۱۳} حاصل می‌شود، که به صورت زیر می‌باشد.

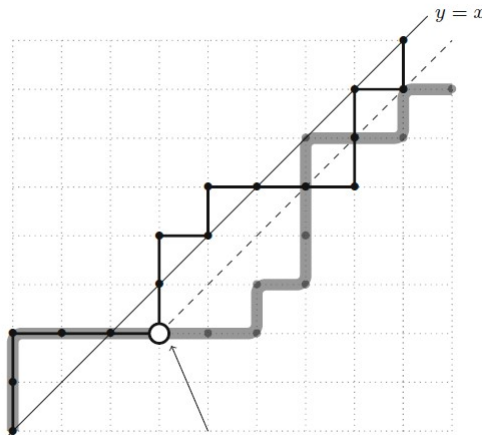
قضیه ۱.۲ (اصل انعکاس). فرض کنیم $A = (a, b)$ و $B = (c, d)$ بالا یا روی خط $y = c$ باشند و $c > a$. اگر $A' = (a_1, 2c - a_2 - 2)$ قرینه نقطه A نسبت به خط $y = c - 1$ باشد، آنگاه تعداد مسیره‌های مشبکه از نقطه A به B که پایین خط $y = c$ باشد برابر است با تعداد مسیره‌های مشبکه از نقطه A' به B .

در واقع در اصل انعکاس برای مسیری مانند p ، نقطه‌ای که برای اولین بار در این مسیر از خط $y = x$ عبور کرده را در نظر گرفته و انعکاس آن نقطه را نسبت به خط $y = x - 1$ به دست می‌آوریم. این بدان معنا است که بعد از اولین برخورد مسیر p با خط $y = x - 1$ ، تمام حرکات شمالی به شرقی و تمام حرکات شرقی به شمالی تبدیل می‌شود. برای مثال اگر انعکاس مسیر p زیر را با $r(p)$ و $r(p)$ را اولین برخورد آن با خط $y = x - 1$ نمایش دهیم، آنگاه مسیر $p = NNEEE|NNNEEEENNNEN$ در شکل ۲، به مسیر مشبکه $r(p) = NNEEE|EENENNNNEENE$ تبدیل می‌شود.

با توجه به اصل انعکاس، تعداد مسیره‌های مشبکه از نقطه‌ی (a, b) تا نقطه (c, d) ، که بالای خط $y = x$ قرار دارد، برابر است با تعداد کل مسیره‌های مشبکه از نقطه‌ی (a, b) تا نقطه (c, d) ، یعنی $\binom{c+d-a-b}{c-b+1}$ ، منهای تعداد مسیره‌های مشبکه که از خط $y = x$ عبور نکند. بنابراین اصل انعکاس تعداد این مسیره‌ها برابر است با تعداد مسیره‌های مشبکه از نقطه $(b-1, a+1)$ تا نقطه (c, d) (شکل ۲). بنابراین

$$(2) \quad \ell((a, b) \rightarrow (c, d); x \geq y) = \binom{c+d-a-b}{c-a} - \binom{c+d-a-b}{c-b+1}.$$

¹¹lattice path ¹²Dyck path ¹³reflection principle



شکل ۲. اصل انعکاس

Figure 2: Reflection Principle

در نتیجه ۲.۲ (ii)، با استفاده از مسیرهای دیک، یکی از مهمترین فرمول‌های بازگشتی برای اعداد کاتالان را ثابت می‌کنیم. با استفاده از این فرمول بازگشتی، می‌توان خیلی از مسائل شمارشی که پاسخ آن‌ها به اعداد کاتالان ختم می‌شود، را به دست آورد.

نتیجه ۲.۲ (i). تعداد مسیرهای دیک از طول n برابر با اعداد کاتالان است.
(ii). برای $n \geq 1$ ، اعداد کاتالان در رابطه بازگشتی

$$(۳) \quad C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k},$$

صدق می‌کند.

اثبات. برای اثبات (i)، با توجه به رابطه ۲ و جای‌گذاری $(a, b) = (0, 0)$ و $(c, d) = (n, n)$ داریم

$$\ell((0, 0) \rightarrow (n, n); x \geq y) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

برای اثبات (ii) کافی است نشان دهیم نگاهت

$$F: Dyck(n) \rightarrow \bigcup_{k=1}^{n-1} Dyck(n-k) \times Dyck(k-1)$$

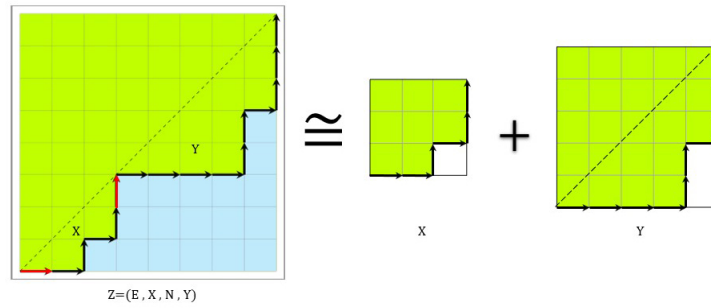
دوسویی می‌باشد. فرض کنیم $p \in Dyck(n)$ در نقطه k با قطر اصلی برخورد داشته باشد. قرار می‌دهیم (E, X, N, Y) که E اولین حرکت شرقی و N حرکت شمالی قبل رسیدن مسیر دیک p به قطر اصلی، X و Y مسیرهای دیک قبل و بعد این حرکات به نقطه k هستند (شکل ۳). واضح است $X \in Dyck(k-1)$ و $Y \in Dyck(n-k)$ و نگاهت

$$F: Dyck(n) \rightarrow \bigcup_{k=1}^{n-1} Dyck(n-k) \times Dyck(k-1)$$

$$p \mapsto (X, Y)$$

□

دوسویی می‌باشد.



شکل ۳. مسیر کاتالان با طول ۱۶

Figure 3: Catalan Paths of length 16

با جای گذاری $(a, b) = (0, 0)$ در ۲، اعداد رای گیری 14 $B_n = \frac{c+1-d}{c+d+1} \binom{c+d+1}{d}$ حاصل می شود. این اعداد پاسخ به مسئله کلاسیک رای گیری در ترکیبیات شمارشی می باشد که به صورت زیر بیان می گردد:

قضیه ۳.۲ (اعداد رای گیری). فرض کنیم $c + d$ رای دهنده در یک رای گیری به افراد A و B رای داده اند، به طوری که فرد A تعداد c رای و فرد B تعداد d رای کسب کرده اند. تعداد حالات این رای گیری به طوری که در هر مرحله از رای گیری تعداد رای های فرد A بیشتر از فرد B باشد برابر با $B_n = \frac{c+1-d}{c+d+1} \binom{c+d+1}{d}$ می باشد.

یکی از نخستین ساختارهای که برای اعداد کاتالان ارائه گردید مسئله پرانتزگذاری بین $n + 1$ متغیر یکسان بود. به عنوان مثال تعداد روش های متفاوت پرانتزگذاری معنادار بین ۳ متغیر برابر است با

$$((())) , (() ()) , ((())) , (() ()) , () () ()$$

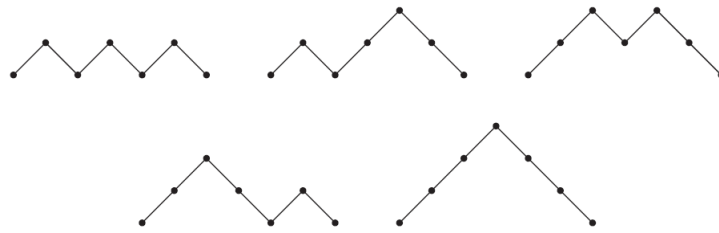
به راحتی می توان با در نظر گرفتن پرانتز باز (به صورت حرکت شمالی و پرانتز بسته (به صورت حرکت شرقی، مسئله پرانتزگذاری را با مسیرهای دیک هم ارز دانست. به عنوان مثال مسیر دیک شکل ۳، به صورت $(((((())))) () ())$ بیان می شود. البته این تناظر در تابع مولد اعداد کاتالان به صورت زیر نمایان می باشد:

$$\begin{aligned} C(x) &= C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4 + \dots \\ &= x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + \dots \\ &= x + x^2 + [x^3 + x^3] + [x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4] + \dots \\ &= x + [(xx)] + [(xx)x] + (x((xx))) + [(((xx)x)x)] \\ &\quad + (((xx)x)x) + ((xx)(xx)) + (x((xx)x)) + (x(x(xx))) \dots \end{aligned}$$

بیشترین تناظرهای تعریف شده برای اعداد کاتالان با استفاده از مسیرهای شبکه می باشد. در زیر به چند مورد از آن ها اشاره می کنیم. اثبات اکثر این موارد با استفاده از فرمول بازگشتی ۳، به راحتی نتیجه می شوند.

(i) تعداد مسیرهای شبکه از طول $2n$. تعداد مسیرهای شبکه ای با دو حرکت $(1, 1), (1, -1)$ بالای محور x ها، که از نقطه $(0, 0)$ شروع می شوند و به نقطه $(2n, 0)$ ختم می گردند.

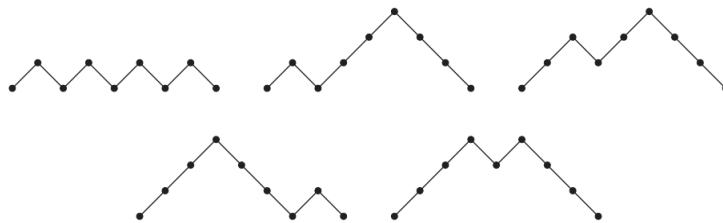
¹⁴ballot numbers



شکل ۴. تعداد مسیره‌های مشبکه از طول ۶

Figure 4: Lattice paths of length 6

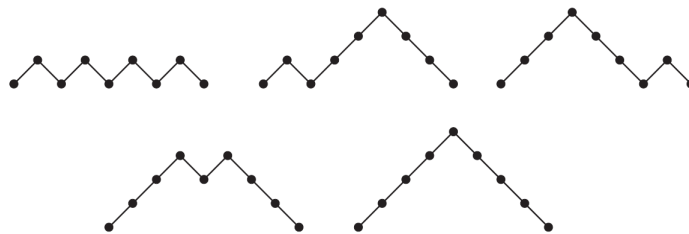
(ii) تعداد مسیره‌های مشبکه از نقطه $(0, 0)$ تا $(2n + 2, 0)$ به طوری که هر دنباله بیشین از حرکات متوالی $(1, -1)$ که به محور x -ها ختم می‌شود دارای طول فرد باشد.



شکل ۵. مسیره‌های مشبکه از طول ۸

Figure 5: Lattice paths of length 8

(iii) تعداد مسیره‌های مشبکه از نقطه $(0, 0)$ تا $(2n + 2, 0)$ به طوری که دارای قله‌ای^{۱۵} از ارتفاع ۲ نمی‌باشد (قله یک مسیر مشبکه با حرکتهای متوالی $(1, 1)$ و $(1, -1)$ و ارتفاع از ۲ حرکت متوالی $(1, 1)$ حاصل می‌گردد). این تناظر در سال ۲۰۰۱ معرفی گردید [۱۴]. نویسندگان ابتدا آن را با تکنیک تابع مولد اثبات کردند و سپس تناظر ساده‌ای بین این مسیره‌ها و مسیره‌های حالت (i) به دست آوردند.



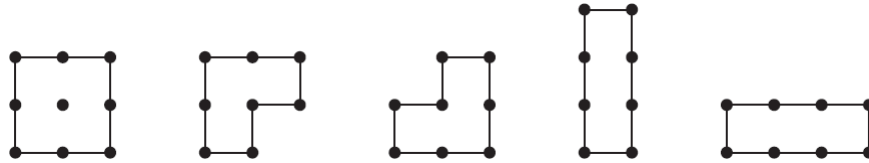
شکل ۶. مسیره‌های مشبکه از طول ۸ و بدون قله

Figure 6: Lattice paths of length 8 without peak

(iv) تعداد مسیره‌های مشبکه از نقطه $(0, 0)$ تا $(2n, 0)$ با ارتفاع و قله یک. منصور در [۹] با استفاده از تکنیک کسره‌های مسلسل^{۱۶} تابع مولد تمام مسیره‌های دیک با ارتفاع k را محاسبه می‌کند، که در حالت $k = 1$ اعداد کاتالان می‌شوند.

¹⁵peak ¹⁶continued fraction

(vi). تعداد مسیرهای مشبکه با دو حرکت $(1, 0)$ و $(0, 1)$ ، که از مبدا شروع می‌شوند و به مبدا بدون اینکه مسیر خود را قطع کند ختم می‌گردند.

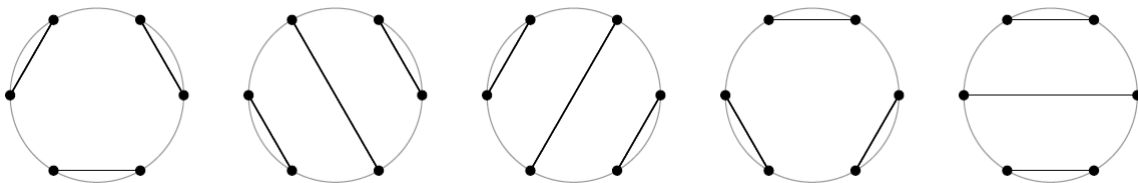


شکل ۷. مسیرهای از طول ۸ با دو حرکت $(1, 0)$ و $(0, 1)$

Figure 7: Lattice paths of length 8 with two steps $(1, 0)$ and $(0, 1)$

۳. تناظر با مسئله دست‌دادن‌های نامتقاطع

مسئله دست‌دادن‌های غیر متقاطع^{۱۷} یکی از زیباترین توصیف‌های اعداد کاتالان می‌باشد. فرض کنیم $2n$ نفر دور یک میز نشسته‌اند. این افراد می‌خواهند با هم طوری دست دهند که دست‌های آن‌ها از روی هم عبور نکنند. فرض کنیم R_n تعداد حالت‌های دست‌دادن این افراد باشد. شکل ۸ تعداد این حالت‌ها را برای $n = 6$ نشان می‌دهد، که در آن حالت‌های دست‌دادن این افراد به صورت وترهای میز در نظر گرفته شده است، با توجه به شکل $R_6 = 5$. ادعا می‌کنیم $R_n = C_n$. برای اثبات این ادعا، تناظر دوسویی $F: R_n \rightarrow Dyck(n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



شکل ۸. تعداد حالات دست‌دادن ۶ نفر دور یک میز به طوری که دست‌های آن‌ها از بین هم عبور نکند

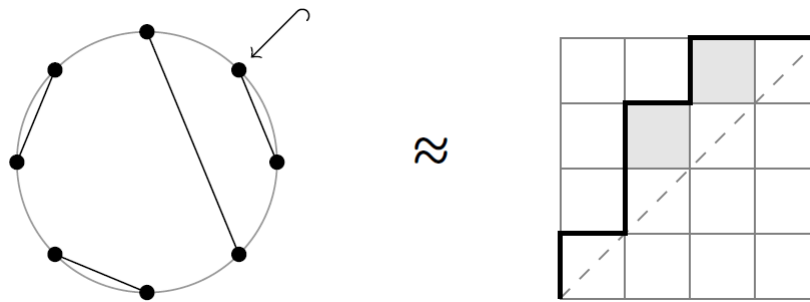
Figure 8: The handshaking problem for 6 persons

افراد دور میز را با شماره‌های $1, 2, \dots, 2n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. حالت‌های دست‌دادن این افراد را به صورت وتر در نظر گرفته و یکی از این افراد را انتخاب می‌کنیم. سپس از این فرد به صورت ساعت‌وار روی محیط میز حرکت می‌کنیم. رسیدن برای اولین بار به یک وتر را حرکت شمالی و برای بار دوم، حرکت شرقی در نظر می‌گیریم. چون تعداد کل وترها n می‌باشد پس، حرکت شمالی و n حرکت شرقی داریم. شکل ۹، یکی از روش‌های دست‌دادن ۸ نفر دور یک میز، و مسیر دیک متناظر با آن را نشان می‌دهد.

۴. مسئله مثلث‌بندی کردن یک چند ضلعی

تعریف تناظر بین اعداد کاتالان و مثلث‌بندی کردن یک چندضلعی^{۱۸} به اوایلر نسبت داده می‌شود و می‌توان گفت از اولین ساختارهای استفاده شده برای محاسبه اعداد کاتالان می‌باشد. اگر یک n ضلعی با رأس‌های $1, 2, 3, \dots, n+2$ داشته باشیم، تعداد حالاتی که رأس‌های این $n+2$ ضلعی را می‌توان با خطوط غیرمتقاطع به هم وصل کرد تا $n+2$ ضلعی به مثلث‌ها افزاز

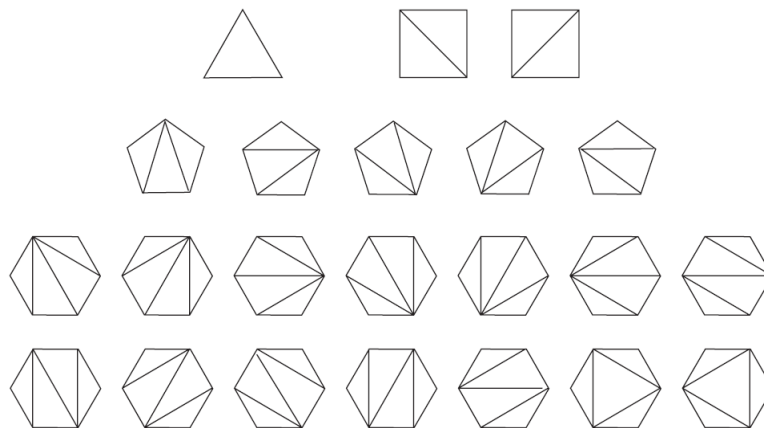
¹⁷nonintersecting chords ¹⁸triangulated polygons



شکل ۹. مسیر دیک متناظر با دست دادن ۸ نفر دور یک میز

Figure 9: Corresponding between Dyck paths of length 8 and the handshaking problem

شود برابر با C_n می‌باشد. به عنوان مثال، تعداد حالات مثلث‌بندی کردن یک پنج‌ضلعی $C_3 = 5$ می‌باشد (شکل ۱۰). این ساختار با استفاده از رابطه بازگشتی قضیه ۳ به صورت زیر حاصل می‌گردد.



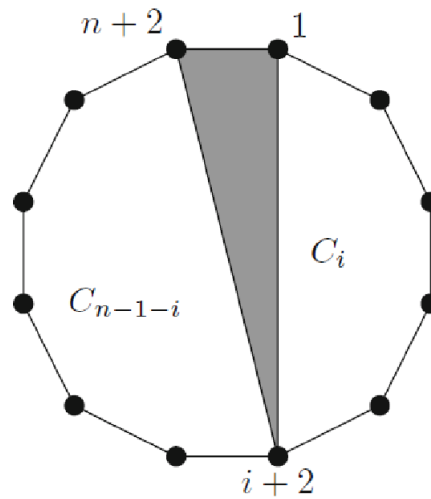
شکل ۱۰. مثلث بندی کردن یک پنج‌ضلعی

Figure 10: The number of Triangulated of pentagons

ابتدا رأس‌های $(n+2)$ -ضلعی را با اعداد $1, 2, \dots, n+2$ برچسب‌گذاری می‌کنیم. رأس‌های ۱ و $n+2$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید این دو رأس با رأس $i+2$ که $0 \leq i \leq n$ تشکیل یک مثلث دهد. برای هر i ، افزاز می‌کنیم $(n+2)$ -ضلعی منتظم را به یه قسمت تقسیم می‌کنیم. ابتدا $(i+2)$ -ضلعی منتظم با رأس‌های $1, 2, \dots, i+2$ را مثلث‌بندی می‌کنیم که تعداد آن برابر با C_i می‌باشد و سپس $(n+1-i)$ -ضلعی منتظم با رأس‌های $i+2, i+3, \dots, n+2$ را به مثلث‌ها افزاز می‌کنیم که تعداد آن نیز برابر با C_{n-1-i} است (شکل ۱۱). با توجه به رابطه ۳، داریم

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

که اثبات را کامل می‌کند.



شکل ۱۱. افراز $n + 2$ ضلعی منتظم

Figure 11: Partitions of $n + 2$ regular polygon

۵. اعداد کاتالان و کلمه‌ها

یکی از روش‌های رایج بیان اعداد کاتالان استفاده از کلمه‌ها می‌باشد. تاکنون دوسویی‌های زیادی بین دنباله‌هایی از کلمات به صورت $a_1 a_2 \dots a_n$ و اعداد کاتالان تعریف شده است که در زیر به چند نمونه از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

(i) تعداد کلمه‌های تشکیل شده از n صفر و n یک به طوری که تعداد اعداد ۱ در هر قسمت از این دنباله (از چپ به راست) بیشتر یا مساوی تعداد ۰-ها عدد کاتالان C_n می‌باشد. به عنوان مثال برای $n = 3$ کلمه‌های زیر را داریم

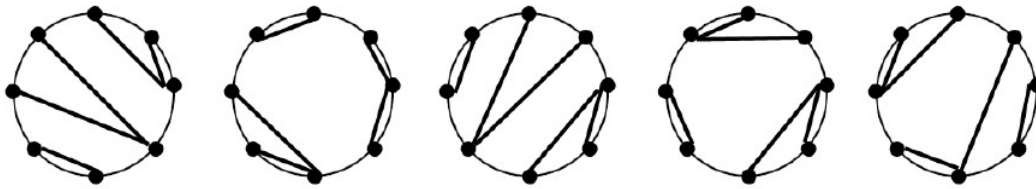
$$111000, 110100, 110010, 101100, 101010.$$

این مسئله را می‌توان به این صورت نیز در نظر گرفت: فرض کنیم یک سکه سالم را $2n$ بار پرتاب می‌کنیم. حالت‌هایی از این پرتاب‌ها را در نظر بگیرید که n بار شیر^{۱۹} و n بار خط^{۲۰} آمده است و تعداد حالت‌هایی که شیر آمده در هر مرحله از پرتاب، بیشتر یا مساوی تعداد حالت‌های خط آمدن سکه باشد. کافی است شیر آمدن سکه را عدد ۱ و خط آمدن سکه را عدد ۰ در نظر بگیریم. پس برای $n = 3$ داریم

$$HHHTTT, HHTHTT, HHTTHT, HTHHTT, HTHTHT.$$

اثبات. به راحتی می‌توان کلمه‌های تشکیل شده از اعداد ۱، ۰ را با R_n ، یعنی تعداد حالت‌های دست دادن غیرمقاطع $2n$ نفر دور یک میز دایره‌ای متناظر کرد. یکی از افراد میز را به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم و به صورت ساعت‌وار محیط میز را طی می‌کنیم. رسیدن برای اولین بار به یک وتر از این میز دایره‌ای را ۱ و برای بار دوم ۰ در نظر می‌گیریم. چون تعداد کل وترها n می‌باشد بنابراین، n عدد ۱ و n عدد ۰ داریم. شکل ۱۲، تناظر این دنباله‌ها و تعداد حالات دست دادن غیرمقاطع ۶ نفر را نشان می‌دهد. □

¹⁹Head ²⁰Tail



شکل ۱۲. تناظر دوسویی با R_6

Figure 12: Bijection with R_6

(ii). دنباله رأی‌گیری^{۲۱}. تعداد دنباله‌های به صورت $a_1 a_2 \dots a_{2n}$ از اعداد ۱ و -۱ به طوری که مجموع هر قسمت از این دنباله (از چپ به راست) مثبت باشد. یعنی $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 0$ و برای هر $1 \leq k \leq 2n$ داشته باشیم $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0$. در ادامه مقاله برای سهولت، حرکت -۱ را با - نمایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال برای $n = 3$ ، این دنباله‌ها برابر است با

$$1-1-1-, 11-1--, 11--1-, 1-11---, 111---.$$

اثبات. این ساختار با مسئله پرانتزگذاری (یا مسیره‌های دیک) متناظر می‌باشد. برای این منظور، کافی است عدد ۱ را پرانتز سمت چپ (حرکت شرقی) و عدد -۱ را پرانتز سمت راست (حرکت شمالی) در نظر گرفت. به‌عنوان مثال کد مسیر شکل ۳ برابر است با

$$--1-11---11-1111.$$

□

(iii) تعداد دنباله‌ها ساخته شده $n-1$ عدد ۱ و هر تعداد دلخواه عدد -۱ به طوری که مجموع اعداد هر بخش از این دنباله (از چپ به راست) همیشه مثبت باشد. برای $n = 3$ داریم

$$11, 11-, 1-1, 1-1-, 11--.$$

اثبات. برای اثبات کافی است عدد ۱ در این دنباله را حرکت شرقی و عدد -۱ را حرکت شمالی در نظر گرفت. به این ترتیب دوسویی بین مسیره‌های دیک از طول n و این دنباله‌ها حاصل می‌گردد.

□

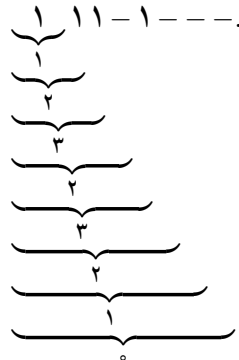
(iv) تعداد کلمه‌های $a_1 a_2 \dots a_{2n}$ ، ساخته شده از اعداد نامنفی به طوری که $a_1 = 1$ ، $a_{2n} = 0$ و $|a_i - a_{i-1}| = 1$ برای تمامی $2 \leq i \leq 2n$. این دوسویی در سال ۱۹۹۵ توسط یوجین ویگنر^{۲۲} معرفی گردیده است. ویگنر یکی از اساتید دانشگاه پرینستون بود که در سال ۱۹۶۳ موفق به کسب جایزه نوبل فیزیک شد. برای مثال برای $n = 3$ ، کلمات زیر را داریم

$$1010101, 101210, 121010, 121210, 123210.$$

اثبات. تناظری دوسویی بین این کلمات و کلمات تعریف شده در (ii) به صورت زیر وجود دارد: یک دنباله از اعداد -۱، ۱ در (ii) را در نظر می‌گیریم و از سمت چپ، اعداد این دنباله را با هم جمع می‌کنیم و در زیر آن می‌نویسیم.

²¹Ballot Sequence ²²Eugene P. Wigner

برای مثال، دنباله $1 - 1 - \dots - 1 - 1$ که به 1232321° تبدیل می‌شود (شکل ۴):



به عکس، دنباله $1232321^{\circ} = a_1 a_2 \dots a_n$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $b_1 = a_1 = 1$ و $b_i = a_i - a_{i-1}$ که $2 \leq i \leq n$ بنابراین داریم $b_1 b_2 \dots b_n = 1 - 1 - \dots - 1 - 1$. در حالت کلی این دوسویی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد: فرض کنیم $a_1 a_2 \dots a_n$ دنباله‌ای به صورت (iv) باشد. قرار می‌دهیم $b_i = a_i - a_{i-1}$ که $a_n = 0$ و $1 \leq i \leq n$. چون $|a_i - a_{i-1}| = 1$ داریم $b_i = \pm 1$. همچنین

$$\sum_{i=1}^j b_i = \sum_{i=1}^j (a_i - a_{i-1}) = a_j - a_0 = a_j \geq 0.$$

بنابراین، دنباله $b_1 b_2 \dots b_n$ در شرایط (ii) صدق می‌کند. برعکس، فرض کنیم $b_1 b_2 \dots b_n$ دنباله‌ای باشد از اعداد ± 1 که در شرایط (ii) صدق می‌کند. قرار می‌دهیم $a_j = \sum_{i=1}^j b_i$ برای $1 \leq j \leq n$. بنابراین، $\sum_{i=1}^j b_i \geq 0$ و $a_j \geq 0$ ، $a_j = |a_j - a_{j-1}| = |b_j| = 1$ پس، دنباله $a_1 a_2 \dots a_n$ در شرایط (iv) صدق می‌کند. \square

(v). تعداد دنباله‌های $a_1 a_2 \dots a_m$ به طوری که $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1$ و دقیقاً یکی از دنباله‌های دوری

$$a_1 a_2 \dots a_m, \quad a_2 a_3 \dots a_m a_1, \quad \dots, \quad a_m a_1 \dots a_{m-1},$$

دارای این خاصیت باشد که مجموع هر قسمت از آن مثبت باشد. این دوسویی در سال ۱۹۵۹ توسط جورج نیل رانی^{۲۳}، که یکی از اساتید دانشگاه پنسلوانیا بود، معرفی گردید. برای مثال، دنباله $1 - 33 - 20$ دارای دنباله‌های دوری

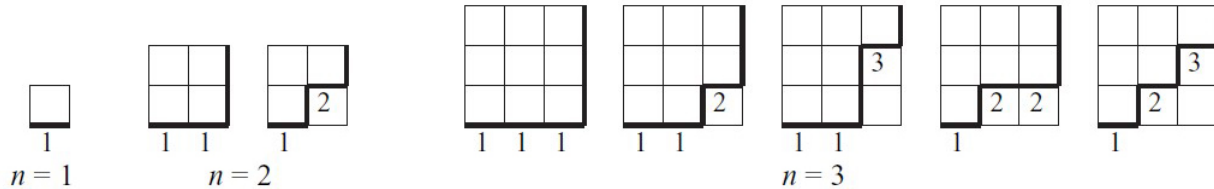
$$20 - 33 - 1, \quad 0 - 33 - 12, \quad -33 - 12, \quad 3 - 12 - 3, \quad -12 - 3 - 33$$

می‌باشد که تنها دنباله دوری $3 - 12 - 3$ مجموع هر بخش (از چپ به راست) آن مثبت است. (vi). تعداد دنباله‌های $a_1 a_2 \dots a_n$ از اعداد صحیح مثبت و صعودی a_i به طوری که $a_i \leq i$. این دوسویی نیز برای نخستین بار توسط لونارد کارلیتز^{۲۴} معرفی گردید. برای مثال برای $n = 3$ ، داریم

$$111, 112, 113, 122, 123.$$

²³George Neal Raney ²⁴Leonard Carlitz

اثبات. کلمات فوق را می‌توان با مسیره‌های دیک از طول n متناظر کرد که در هر مسیر دیک از طول n ، حرکت‌های شمالی را در نظر نمی‌گیریم و ارتفاع هر حرکت شرقی را زیر مسیر دیک می‌نویسیم (شکل ۱۳). به عکس، با داشتن هر مسیر دیک از طول n ، می‌توان دنباله این مسیر را به صورت (vi) به دست آورد. دنباله‌های نظیر با مسیره‌های دیک از طول $n \leq 3$ ، در شکل ۱۳ نشان داده شده است. □



شکل ۱۳. دنباله‌های از طول ۳ به طوری که $a_i \leq i$

Figure 13: Sequences of length 3 with $a_i \leq i$

(vi). تعداد دنباله‌های $a_1 a_2 \dots a_n$ ، از اعداد صحیح مثبت a_i به طوری که $a_i \leq n - i + 1$ ، این دوسویی توسط کارلیتز در سال ۱۹۷۲ معرفی گردید. اثبات آن نیز مشابه با حالت (vi) می‌باشد. به عنوان مثال برای $n = 3$ ، کلمات زیر را داریم

۳۲۱، ۳۱۱، ۲۲۱، ۲۱۱، ۱۱۱.

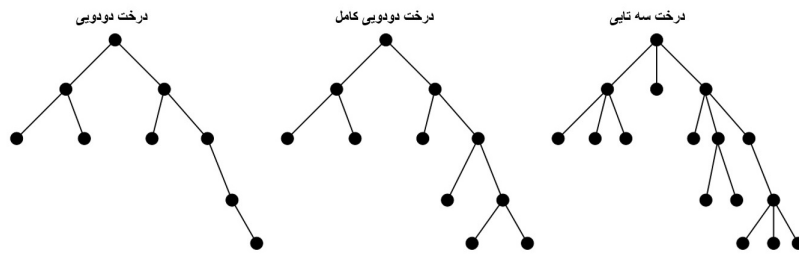
۶. تناظر با درخت‌ها

در این بخش به معرفی و اثبات برخی از ساختارهای اعداد کاتالان با درخت‌ها می‌پردازیم. درخت‌ها ساده‌ترین نوع گراف‌ها می‌باشند که اخیراً کاربردهای زیادی در شیمی، کامپیوتر، و فیزیک پیدا کرده است. گراف بدون دور و همبند را درخت می‌گویند. درختی که یک رأس آن به عنوان ریشه انتخاب شود، درخت ریشه‌دار^{۲۵} گویند. اهمیتی ندارد که برای رسم، ریشه را در کجای درخت قرار دهیم، اما اصولاً رأس ریشه را، بالاترین رأس درخت در نظر گرفته و رأس‌ها در مراحل پایین‌تر را فرزند، نیا و ...، نام‌گذاری می‌کنند. رأس‌های درجه یک درخت را برگ گویند و رأس‌های با درجه بالاتر را، رأس‌های داخلی درخت می‌نامند. در هر درخت، بین ریشه و هر برگ دقیقاً یک مسیر وجود دارد. ممکن است طول این مسیره‌ها با هم متفاوت باشد، طول بزرگترین مسیر را ارتفاع درخت گویند. اگر در یک درخت فرزندان هر رأس، به ترتیب از چپ به راست، شماره‌گذاری شود، درخت حاصل را مرتب‌شده^{۲۶} یا پیمایش شده گویند.

یک روش ساده برای شماره‌گذاری مرتب رأس‌های یک درخت به این صورت می‌باشد که ابتدا به ریشه برچسب صفر می‌دهیم. به فرزندان ریشه از چپ به راست اعداد $1, 2, \dots, n$ را نسبت داده، و برای رأسی مانند v در سطح بیشتر از ۲؛ اگر برچسب v را a فرض کنیم؛ آن‌گاه برچسب فرزندان v از چپ به راست را، به ترتیب، a_1, a_2, \dots قرار می‌دهیم. در این قسمت به معرفی چند ساختار از اعداد کاتالان به وسیله درخت‌های k -تایی مرتب‌شده^{۲۷} می‌پردازیم. یک درخت k -تایی مرتب شده درختی می‌باشد که هر رأس آن بین 0 تا k فرزند دارد. درخت کامل k -تایی^{۲۸}، درختی است که هر رأس آن دقیقاً 0 یا k فرزند داشته باشد (شکل ۱۴).

(i) اعداد کاتالان و درخت‌های مرتب. فرض کنیم D_n تعداد درخت‌های مرتب با n رأس باشد، آنگاه $C_n = D_n$.

²⁵rooted tree ²⁶ordered tree ²⁷k-ary tree ²⁸full k-ary tree



شکل ۱۴. درخت ۳-تایی، دوتایی کامل و دوتایی

Figure 14: 3-ary tree, Full binary tree and binary tree

اثبات. فرض کنیم \mathcal{R}_n مجموعه تمام درخت‌های مرتب با n رأس باشد. برای $n \geq 2$ ، اگر $T \in \mathcal{R}_n$ یک درخت مرتب با درجه ریشه $d > 0$ باشد، پس d رأس مجاور با رأس ریشه در درخت T ، زیر درخت‌های ریشه‌دار مرتبی تشکیل می‌دهند. از سمت چپ، اولین زیر درخت ریشه‌دار درخت T را در نظر گرفته که با یال e به رأس ریشه درخت مرتب T وصل شده است. این یال را حذف کرده و درخت ریشه‌دار حاصل را T_ℓ در نظر گرفته و باقیمانده رأس‌های درخت T را، درخت T_r در نظر می‌گیریم (شکل ۱۵). در واقع ما درخت T را به دو زیر درخت T_ℓ, T_r افراز کرده‌ایم. فرض کنیم $\mathcal{R}_{n,k}$ ، زیرمجموعه تمام درخت‌های ریشه‌دار مرتب از مرتبه k از \mathcal{R}_n باشد. نگاشت

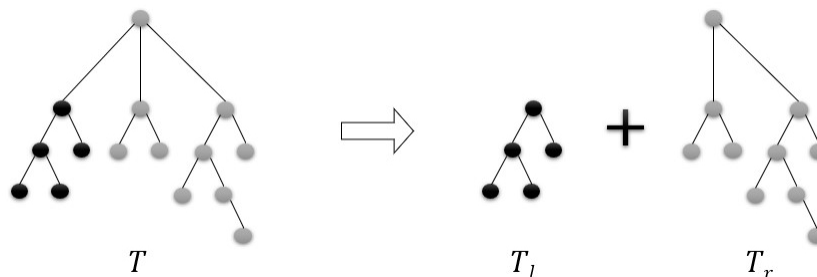
$$\theta: \mathcal{R}_{n,k} \rightarrow \mathcal{R}_k \times \mathcal{R}_{n-k}$$

$$T \mapsto (T_\ell, T_r)$$

که در آن T_ℓ و T_r به ترتیب درخت‌های مرتبی از مرتبه k و $n-k$ می‌باشند. واضح است نگاشت θ دوسویی می‌باشد. با توجه به تجزیه درخت T به صورت فوق و مقدار اولیه $|\mathcal{D}_1| = 1$ ، رابطه بازگشتی زیر را داریم:

$$D_n = \sum_{k=1}^{n-1} D_k D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-2} D_{k+1} D_{n-k-1}.$$

این نشان می‌دهد در D_n در رابطه بازگشتی ۳ اعداد کاتالان صدق کرده و $D_{n+1} = C_n$. □

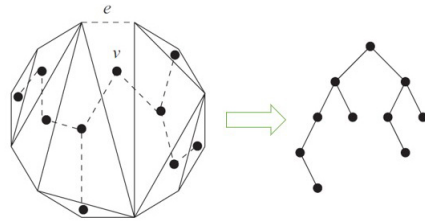


شکل ۱۵. تجزیه یک درخت دودویی

Figure 15: Split of a binary tree

(ii) اعداد کاتالان و درخت‌های دودویی. یک درخت دودویی^{۲۹}، درخت ریشه‌دار مرتبی است که هر رأس آن حداکثر دو فرزند دارد. در واقع هر درخت دودویی را می‌توان به صورت بازگشتی نیز تعریف کرد، ابتدا مجموعه \emptyset را یک درخت دودویی در نظر می‌گیریم. اگر درخت T تهی نباشد، پس دارای رأسی مانند v به عنوان ریشه از درجه دو می‌باشد. درخت T را به دو درخت مرتب دودویی راست و چپ T_r و T_ℓ افزایش می‌شوند. بنا به قسمت (i) می‌توان ثابت کرد تعداد درخت‌های مرتب دودویی با n رأس، برابر است با عدد کاتالان C_n . اما در زیر ما با روشی متفاوت این واقعیت را ثابت می‌کنیم.

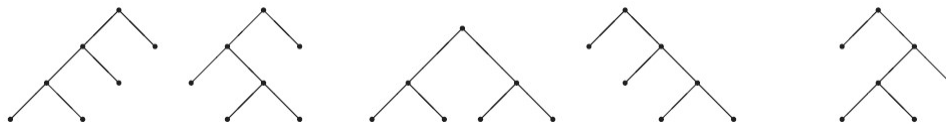
اثبات. می‌توان نگاشتی دوسویی بین تعداد مثلث‌بندی کردن یک n -ضلعی و درختان دودویی مرتب با n رأس، تعریف کرد. ابتدا داخل هر یک از مثلث‌های n ضلعی، یک رأس مطابق شکل ۱۶ قرار می‌دهیم. هر مثلث در مثلث‌بندی یک n ضلعی، دارای حداکثر ۳ مثلث همسایه؛ و در صورتی که یکی از اضلاعش ضلع مرزی چند ضلعی باشد؛ ۲ مثلث همسایه خواهد داشت. یک ضلع از چند ضلعی را به دلخواه انتخاب کرده و آن را یال e می‌نامیم. رأسی که در مثلث یال e قرار دارد را، به عنوان ریشه در نظر گرفته و v می‌نامیم. اگر مثلثی در سمت چپ و متصل به یال e وجود داشته باشد، برای رأس v شاخه چپ رسم کرده و سپس از ضلع مشترک وارد مثلث جدید می‌شویم. به طور مشابه، اگر مثلثی در سمت راست و متصل به یال e وجود داشته باشد، از رأس v شاخه راست رسم می‌کنیم. به همین ترتیب، همه رأس‌ها داخل مثلث‌های n ضلعی را به هم وصل می‌کنیم، که با توجه به شکل ۱۶، این نگاشت دوسویی می‌باشد. □



شکل ۱۶. تناظر بین درخت‌های دودویی و مثلث‌بندی کردن یک n -ضلعی

Figure 16: Bijection between binary tree and triangulated of n polygon

(iii) اعداد کاتالان و درخت‌های دودویی کامل. یک درخت دودویی کامل^{۳۰}، درخت دودویی ریشه‌داری است که هر رأس داخلی آن دقیقاً دارای دو فرزند می‌باشد (شکل ۱۷). هر درخت دودویی کامل با ℓ برگ، دارای $1 - \ell$ رأس داخلی و $1 - 2\ell = n$ رأس و 2ℓ یال می‌باشد. بنابراین، تعداد رأس‌ها در هر درخت دودویی کامل همیشه فرد است. اثبات می‌کنیم تعداد درخت‌های دودویی کامل با n راس (n فرد است)، برابر است با $C_{\frac{n-1}{2}}$.

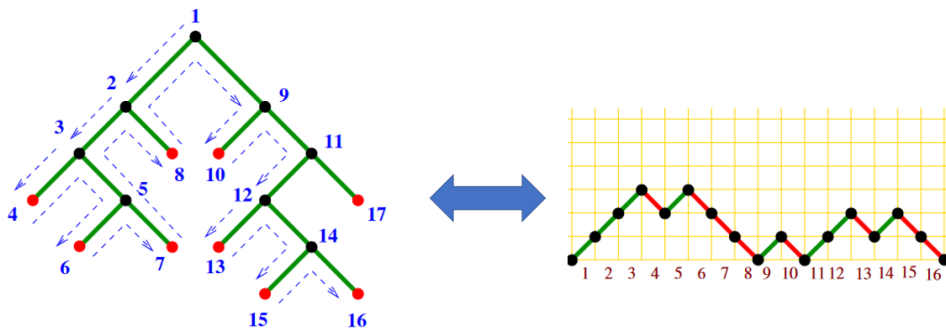


شکل ۱۷. تعداد درخت‌های دودویی کامل با ۷ رأس.

Figure 17: Full binary tree with 7 vertices

²⁹binary tree ³⁰full binary tree

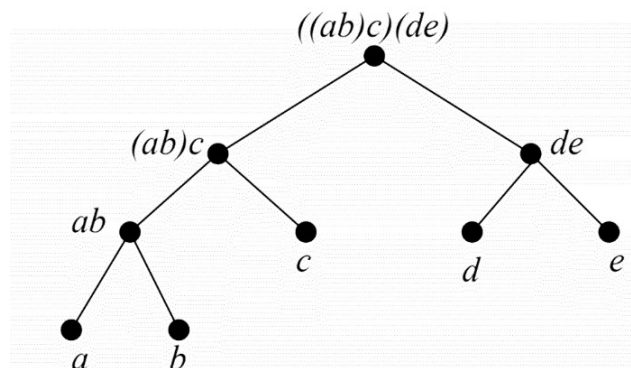
اثبات. می‌توان بین درخت‌های دودویی کامل و ساختارهای مختلف اعداد کاتالان، تناظری دوسویی تعریف کرد. برای مثال، با حذف تمام برگ‌های یک درخت دودویی کامل، یک درخت دودویی جدید حاصل می‌گردد. اما ما با روشی متفاوت، یک دوسویی بین درخت‌های دودویی کامل و مسیره‌های مشبکه از طول $2n$ را با دو حرکت $(1, -1)$ ، $(1, 1)$ به دست می‌آوریم (بخش دوم قسمت (i)). ابتدا رأس‌ها درخت را به صورت عمقی^{۳۱}، که از روش‌های مهم پیمایش درخت‌ها است، پیمایش می‌کنیم. در این روش، ابتدا سمت چپ‌ترین زیردرخت را بازدید می‌کنیم و به همین ترتیب آن قدر به عمق می‌رویم تا به یک برگ برسیم. سپس به یک سطح بالاتر از رأس فعلی، عقب‌گرد می‌کنیم و با همین روند، برادرهای گره برگ را از چپ به راست بازدید می‌کنیم (شکل ۱۸). برای متناظر کردن درخت‌های دودویی کامل با مسیره‌های مشبکه عنوان شده، هنگام پیمایش عمقی کافی است زمانی که از یک رأس از درجه یک عبور می‌کنیم، حرکت را جنوب شرقی و گرنه، حرکت را شمال شرقی در نظر بگیریم. □



شکل ۱۸. تناظر بین درخت‌های دودویی کامل و مسیره‌های مشبکه از طول $2n$

Figure 18: Bijection between full binary tree and lattice paths of length $2n$

همچنین می‌توان دوسویی بین درخت‌های دودویی کامل با n برگ و تعداد پرانتزگذاری n متغیر، مانند شکل ۱۹، تعریف کرد، که ما از نوشتن جزئیات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

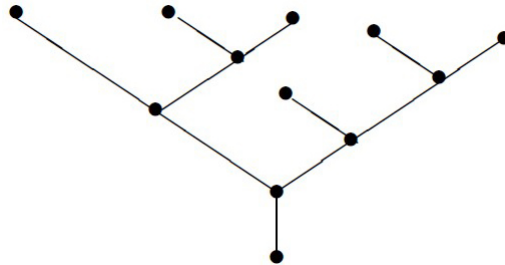


شکل ۱۹. تناظر بین تعداد درخت‌های دودویی کامل با ۹ رأس و تعداد حالات پرانتزگذاری بین ۵ متغیر.

Figure 19: Bijection between Full binary tree with 9 vertices and Parenthesized Sequences of length 5

³¹depth first search

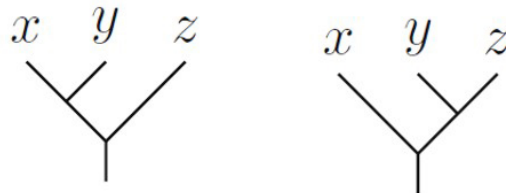
(iv). اعداد کاتالان و درخت‌های مسطح. یک درخت مسطح^{۳۲}، درخت ریشه داری دودویی است که درجه رأس ریشه آن یک، و درجه تمامی رأس‌ها داخلی دیگر آن برابر با ۳ است (شکل ۲۰). فرض کنیم $PB(n)$ تعداد درخت‌های مسطح با n رأس باشد، آنگاه تناظری دوسویی بین این ساختار و اعداد کاتالان C_n وجود دارد.



شکل ۲۰. درخت دودویی کامل ۱۲ رأسی

Figure 20: Full binary tree with 12 vertices

اثبات. نشان می‌دهیم که هر درخت مسطح، متناظر با یک نمایش ضرب یا همان پرانتزگذاری بین $n + 1$ متغیر است. برای مثال $((xy)z), (x(yz))$ ، دو حالت از ضرب سه متغیر xyz می‌باشد که درخت‌های مسطح متناظر آن در شکل ۲۱ نشان داده شده است.



شکل ۲۱. تجزیه یک درخت دودویی کامل ۱۲ رأسی

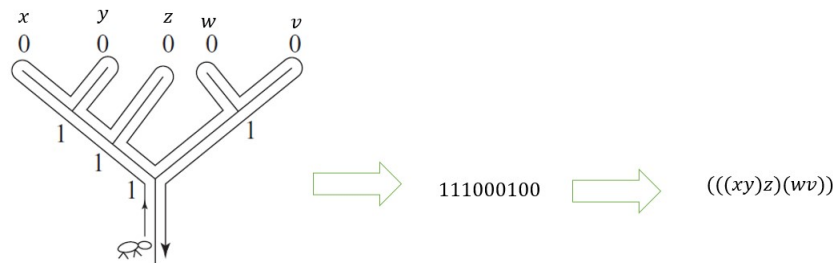
Figure 21: Split of full binary tree with 12 vertices

بنابراین، برای تعریف دوسویی بین درخت‌های مسطح و پرانتزگذاری بین $n + 1$ متغیر، کافی است برگ‌های درخت را با $n + 1$ متغیر نام‌گذاری کنیم. درخت‌های مسطح را می‌توان با الگوریتم جان لوکاسویچ^{۳۳}، با دنباله رأی‌گیری نیز متناظر کرد. کافی است برگ‌های درخت مسطح را با عدد ۰، و رأس‌ها داخلی آن را با عدد ۱ برچسب‌گذاری کنید. حال حشره‌ای را تصویری کنید که این درخت را به روش جستجوی عمقی از چپ پیموده و به ریشه بازمی‌گردد (شکل ۲۲). □

(v) اعداد کاتالان و درخت‌های مسطح رنگی. تعداد درخت‌های مسطح با n رأس، به‌طوری‌که اگر برگ‌های آویزان بیشتر از یکی باشد این رأس‌های آویزان را با دو رنگ قرمز یا آبی برچسب‌گذاری شده باشد، برابر با اعداد کاتالان می‌باشد (شکل ۲۳).

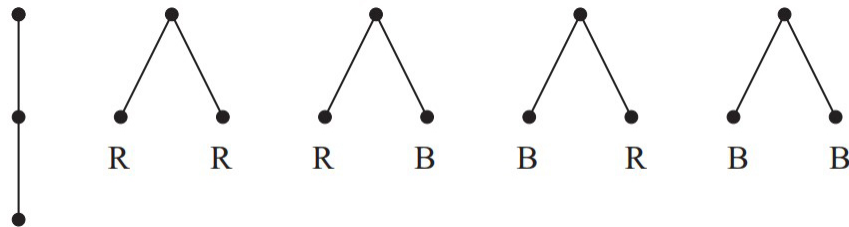
(vi) تعداد درخت‌های مسطح با n رأس داخلی، به‌طوری‌که هر رأس حداکثر دارای دو فرزند باشد و هر فرزند که در شاخه سمت چپ دارای دو فرزند دیگر می‌باشد در یک رأس داخلی مشترک باشند، برابر با اعداد کاتالان می‌باشد (شکل ۲۴).

³²planar binary tree ³³Jan Lukaszewicz



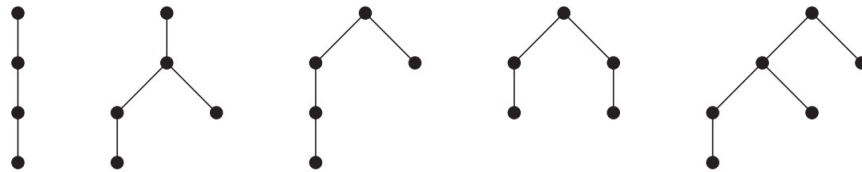
شکل ۲۲. تناظر بین درخت مسطح ۸ رأسی با پرانتزگذاری و دنباله رأی‌گیری

Figure 22: Bijection between planar binary tree with 8 vertices with Parenthesized Sequences and Ballot numbers



شکل ۲۳. دوسویی با درخت‌های مسطح رنگی

Figure 23: Bijection with color plane tree



شکل ۲۴. دوسویی با درخت‌های مسطح رنگی n رأسی

Figure 24: Bijection with color plane tree of order n

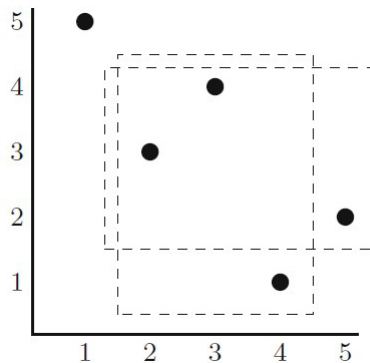
۷. تناظر با جایگشت‌ها

شاید بتوان گفت که از شگفت‌انگیزترین خواص اعداد کاتالان، ارتباط آن‌ها با جایگشت‌ها می‌باشد. ابتدا بعضی از تعاریف، که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد، را بیان می‌کنیم. فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد، گروه متقارن S_n را متشکل از همه جایگشت‌های مجموعه $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ در نظر می‌گیریم. یک نمایش خطی از $w \in S_n$ به صورت $w = w(1)w(2) \dots w(n)$ می‌باشد. گوئیم جایگشت β دارای الگوی w می‌باشد، هرگاه ترتیب قرار گرفتن ارقام جایگشت در آن‌ها یکسان باشد. $w \in S_n$ را α -پرهیز^{۳۴} گوئیم، هرگاه در آرایش کلمات آن الگوی^{۳۵} α وجود نداشته باشد؛ وگرنه آن را α -شامل گویند. جایگشت‌های که شامل الگوی α نباشند را با نماد $S_n(\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

مثلاً $w = 231$ -پرهیز است، هرگاه اعداد $k < j < i$ با ترتیب $w(k) < w(i) < w(j)$ وجود نداشته باشند؛ اگر w شامل این ترتیب سه تایی باشد آن را 231 -شامل گویند. برای مثال، جایگشت $w = 32154 \in S_n$ ، 231 -پرهیز می‌باشد اما جایگشت

³⁴ α -Avoiding Permutations ³⁵Pattern

$w = 53412 \in S_n$ شامل الگوی ۲۳۱ می‌باشد، زیرا $w(2) < w(3) < w(4)$. یکی از روش‌های شناسایی جایگشت‌های α -پرهیز، استفاده از نمایش‌های گرافی جایگشت‌ها می‌باشد (شکل ۲۵).



شکل ۲۵. جایگشت $w = 53412$ دارای چند الگو می‌باشد که به صورت نقاط پررنگ در داخل مستطیل‌ها نشان داده شده است

Figure 25: 231 pattern of permutation $w = 53412$

پرسی الکساندر مک‌ماهان^{۳۶} برای نخستین بار در سال ۱۹۱۵ در کتابش [۸] نشان داد که $|S_n(123)| = C_n$. برای هر عدد مثبت صحیح مانند n . تقریباً نیم قرن بعد، دونالد اِروین کنوت^{۳۷} در [۶] نشان داد $|S_n(213)| = C_n$.

قضیه ۱۰۷. فرض کنیم $S_n(231)$ مجموعه جایگشت‌های ۲۳۱-پرهیز باشد. در این صورت $|S_n(231)| = C_n$.

اثبات. قرار می‌دهیم $\mathfrak{R}_n = |S_n(231)|$. نشان می‌دهیم \mathfrak{R}_n در رابطه بازگشتی ۳ صدق می‌کند. جایگشت $w \in S_n(231)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$w = \vartheta(1)\vartheta(2)\cdots\vartheta(i)n\nu(1)\nu(2)\cdots\nu(n-1-i),$$

که در آن $\vartheta \in S_i(231)$ و ν متناظر با یک جایگشت از S_{n-i-1} است. چون ϑ و ν نیز ۲۳۱-پرهیز می‌باشند، پس تعداد حالات \mathfrak{R}_i برابر با \mathfrak{R}_i و تعداد حالت‌های ν برابر با \mathfrak{R}_{n-i} می‌باشد. بنابراین

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_{n-i-1} \leq \mathfrak{R}_n.$$

از طرف دیگر، قرار می‌دهیم $w(i+1) = n$ و ترتیب سمت چپ و $\nu = w(1)w(2)\cdots w(i)$ و $\vartheta = w(i+2)w(i+3)\cdots w(n)$ ترتیب سمت راست عدد n قرار می‌دهیم. واضح است که هر دو جایگشت ϑ و ν ، ۲۳۱-پرهیز هستند؛ زیرا اگر برای الگوهای دلخواه ϑ و ν ، $\alpha \in \vartheta$ و $\beta \in \nu$ ، اگر α بزرگتر از β باشد، آنگاه الگوی $\alpha n \beta$ تشکیل ۲۳۱ الگو در جایگشت w می‌دهد، که این تناقض با انتخاب w می‌باشد. بنابراین

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_{n-i-1} \geq \mathfrak{R}_n.$$

□

³⁶Percy Alexander MacMahon ³⁷Donald Ervin Knuth

نتیجه ۲.۷. معکوس جایگشت $w = \nu(1) \cdots \nu(n)$ را با $w^r = \nu(n) \cdots \nu(1)$ نمایش می‌دهند. واضح است که پرهیز هر الگو با معکوس پرهیز همان الگو برابر می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت تمام الگوهای پرهیز از طول سه با هم برابراند.

تبصره ۳.۷. تناظری دوسویی بین جایگشت‌ها و درخت‌های ریشه‌دار برچسب‌گذاری شده دودویی وجود دارد. فرض کنیم $w_k \in w$ ، بزرگترین عضو (کلمه) در جایگشت w باشد؛ w_k را به‌عنوان ریشه درخت دودویی در نظر می‌گیریم. زیر درخت سمت چپ ریشه را با $T(w_1, \dots, w_{k-1})$ و زیر درخت سمت راست ریشه را با $T(w_{k+1}, \dots, w_n)$ نمایش می‌دهیم. رأس w_i برای هر $i \in [n]$ دارای فرزند در زیردرخت $T(w_1, \dots, w_{k-1})$ است اگر $w_i > w_{i-1}$ برای $i > 1$ ؛ و همچنین دارای فرزند در زیردرخت سمت راست $T(w_{k+1}, \dots, w_n)$ می‌باشد اگر $w_i > w_{i+1}$ برای $i < n$. (شکل ۲۶). w را جایگشتی متناوب^{۳۸} گویند، هرگاه اعداد آن متناوباً صعودی و نزولی باشند. اگر w جایگشتی متناوب از مرتبه فرد باشد، آن‌گاه درخت T یک درخت دودویی کامل می‌باشد. حال اگر w یک جایگشت مثلاً ۱۳۲-پرهیز باشد، آن‌گاه برای هر $\nu \in T$ ، هر برچسب در زیر درخت سمت چپ رأس ν بزرگتر از هر برچسب در زیر درخت سمت راست رأس ν می‌باشد.

تاکنون تناظرهای دوسویی زیادی بین جایگشت‌ها و اعداد کاتالان تعریف شده است. یکی از جذاب‌ترین آن‌ها، تعریف دوسویی بین این اعداد و جایگشت‌های متناوب می‌باشد. همان‌طور که تعریف کردیم، جایگشت $w = w_1 \cdots w_n$ را متناوب گویند هرگاه $w_1 < w_2 > w_3 < \cdots$. مجموعه جایگشت‌های متناوب از طول n را با A_n و تعداد آن‌ها را با A_n ، که به اعداد اویلری یا اعداد زیگزگی^{۳۹} شهرت دارند، نمایش می‌دهند.

برای هر $w \in A_n$ ، گوئیم w یک جایگشت متناوب α -پرهیز می‌باشد هرگاه شامل الگوی α نباشد و تعداد آن‌ها را با $A_n(\alpha)$ نمایش می‌دهیم. مطالعه شمارش تعداد الگوهای پرهیز در جایگشت‌های متناوب را، توفیق منصور^{۴۰} آغاز نموده است [۱۰]. او با استفاده از روش تابع مولد نشان داد، تعداد الگوهای ۱۳۲-پرهیز در جایگشت‌های متناوب برابر است با اعداد کاتالان، یعنی $A_n(132) = C_n$. در قضیه ۴.۷ نشان می‌دهیم $A_{2n+1}(132) = A_{2n}(132) = C_n$. به‌عنوان مثال برای $n = 3$ داریم

$$A_6(132) = \{342516, 452316, 453612, 562314, 563412\},$$

$$A_7(132) = \{4536271, 5634271, 5647231, 6734251, 6745231\}.$$

بعدها تکلیف تمام الگوهای از مرتبه سه در جایگشت‌های متناوب مشخص گردید و نشان داده شد برابر هستند با اعداد کاتالان [۱۷]. در قضیه ۴.۷، طرحی از اثبات آن‌ها را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴.۷. برای تمام $w \in S_3$ داریم $A_{2n+1}(w) = A_{2n}(w) = C_n$.

اثبات. با استفاده از ۲.۷، نشان می‌دهیم جایگشت‌های پرهیز از طول ۳ با جایگشت‌های پرهیز متناوب فرد از طول ۳، متناظر می‌باشند. بدون کم شدن از کلیت مسئله، فرض کنیم $w \in S_n(132)$ و بنابر ۲.۷، $T(w)$ درخت متناظر با آن باشد. نگاشت

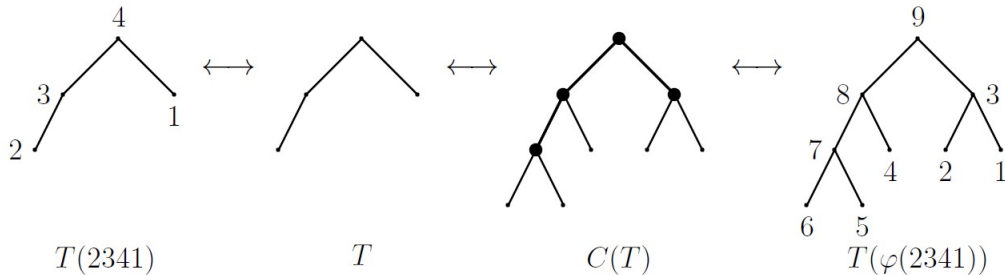
$$\phi: S_n(132) \rightarrow A_{2n+1}(132)$$

را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

درخت $T(w)$ را بدون برچسب در نظر گرفته و آن را $C(T)$ می‌نامیم. حال تمامی برگ‌های آن را حذف کرده و درخت حاصل را

³⁸alternating permutation ³⁹zigzag numbers ⁴⁰Toufik Mansoureh

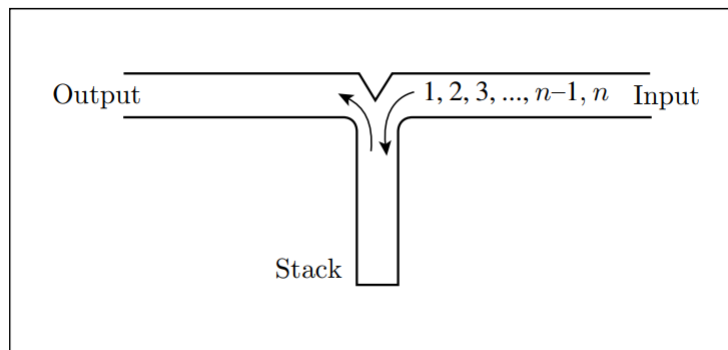
دوباره برچسب‌گذاری می‌کنیم. نگاشت ϕ دوسویی است زیرا حذف برگ‌ها در $T(\phi(w))$ با حذف درایه‌های فرد در $\phi(w)$ یکسان می‌باشد. بنابراین w جایگشت منحصر به فردی به صورت $(\phi(w)_1, \phi(w)_2, \dots)$ در A_{2n+1} (۱۳۲) می‌باشد. این نتیجه می‌دهد که اگر w شامل الگویی مانند p باشد، آن‌گاه $T(w)$ نیز دارای آن الگو می‌باشد (شکل ۲۶). □



شکل ۲۶. عمل کردن دوسویی ϕ بر جایگشت ۱۳۲ پرهیز $w = ۶۷۵۸۴۹۲۳۱$ و حاصل شدن جایگشت ۱۳۲-پرهیز ۲۳۴۱.

Figure 26: 132 avoiding pattern of permutation $w = 675849231$

۱.۷. جایگشت‌های مرتب شده به صورت پشته. یکی از مسائلی که کاربرد اعداد کاتالان را در علوم کامپیوتر نشان می‌دهد، مسئله جایگشت‌های مرتب شده به صورت پشته^{۴۱} می‌باشد. پشته یک ساختار انتزاعی مهم در علوم کامپیوتر می‌باشد. این ساختار امکان ذخیره ارقام داده را، طبق قوانین خاصی فراهم می‌کند. نمایش جایگشت‌ها به صورت پشته برای اولین بار توسط کنوت معرفی گردید، که از اولین افرادی بود که الگوهای پرهیز را معرفی کرد. هر یک از اعداد جایگشت $w = w(1)w(2) \dots w(n)$ را می‌توان دادهای یک پشته در نظر گرفت. اگر پشته را با S نمایش دهیم، برای دنباله تهی قرار می‌دهیم $S(\emptyset) = \emptyset$. اگر $w = \nu n \mu$ یک جایگشت با عناصر متمایز باشد که بزرگترین عضو آن n است، قرار می‌دهیم $S(w) = S(\nu)S(\mu)n$. یک جایگشت مرتب شده به صورت پشته، جایگشتی به صورت $S(w) = w$ است. در واقع جایگشت w را جایگشت مرتب شده به صورت پشته گویند، هر گاه بتوان از آن به جایگشت $w = ۱۲ \dots n$ رسید. شکل ۲۷ نحوه ورود عناصر یک جایگشت و تبدیل آن به پشته را نشان می‌دهد.



شکل ۲۷. نحوه ورود اعداد یک جایگشت و تبدیل آن به پشته‌های مرتب

Figure 27: Bijection with Stack-Sortable Permutation

⁴¹stack-sortable permutation

متناظر کردن این روش مرتب‌سازی جایگشت‌ها با واگن‌های یک قطار توسط مجید میرزاویری^{۴۲} در کتاب [۲۰] نیز جالب می‌باشد. این تناظر به صورت زیر می‌باشد:

۲.۷. متناظر کردن مرتب‌سازی جایگشت‌ها به صورت پشته با مسئله واگن‌های یک قطار. فرض کنیم قطاری با n واگن به صورت $n, \dots, 4, 3, 2, 1$ روی یک ریل ایستاده است، این قطار می‌خواهد از سمت چپ به سمت راست برود. در بین راه یک تونل وجود دارد که می‌توان چند واگن از قطار را داخل تونل فرستاد و برای مدتی در آنجا نگه داشت. وقتی واگن‌ها از تونل خارج می‌شوند، ترتیب آنها عوض می‌شود. بدین ترتیب تعداد جایگشت‌های خروجی واگن‌های قطار برابر با $n!$ - امین عدد کاتالان می‌باشد. برای واضح شدن صورت سؤال ابتدا مسئله را برای قطاری با ۴ واگن مورد بررسی قرار می‌دهیم:

فرض کنیم واگن‌های ۴ و ۳ داخل تونل رفته‌اند، بنابراین الگوی زیر را داریم:

$$12 \quad \left| \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right|$$

اکنون می‌توانیم ۲ را مستقیماً روی ریل عبور دهیم تا به سمت راست بیاید، واگن ۳ را از تونل خارج کنیم و در سمت چپ واگن ۲ قرار دهیم، واگن ۱ را به سمت راست انتقال دهیم و پس از آن ۴ را از تونل خارج کنیم. بدین ترتیب جایگشت زیر حاصل می‌شود:

$$4, 1, 3, 2.$$

می‌توانستیم ۴ و ۳ را در تونل نگه داریم، ۲ و پس از آن ۱ را عبور دهیم و سپس ۳ و ۴ را در سمت چپ آنها قرار دهیم. بدین ترتیب به جایگشت زیر می‌رسیم:

$$4, 3, 1, 2.$$

اما برخی از حالت‌ها را نمی‌توان در خروجی ایجاد کرد. مثلاً جایگشت ۳، ۱، ۴، ۲ هیچ‌گاه ایجاد نمی‌شود، چون اگر بخواهیم ۳ را در سمت راست داشته باشیم باید ۴ را در تونل نگه داریم و ۳ را عبور دهیم. اما از آنجایی که دومین عدد در سمت راست برابر ۱ است، پس ۲ نیز داخل تونل رفته است؛ و این در حالی است که ۴ از قبل در تونل قرار داده شده بود؛ بنابراین وضعیتی که اکنون در تونل داریم به این شکل است که ۴ بالای ۲ قرار داد. بدین ترتیب نمی‌توان ۴ را در سمت راست ۲ در خروجی ایجاد کرد. با کمی تأمل می‌توانیم ببینیم که جایگشت‌های زیر در خروجی ایجاد می‌شوند:

$$\begin{array}{cc} 1, 2, 3, 4 & 1, 2, 4, 3 \\ 1, 3, 2, 4 & 1, 4, 2, 3 \\ 1, 4, 3, 2 & 2, 1, 3, 4 \\ 2, 1, 4, 3 & 3, 1, 2, 4 \\ 3, 2, 1, 4 & 4, 1, 2, 3 \\ 4, 1, 3, 2 & 4, 2, 1, 3 \\ 4, 3, 1, 2 & 4, 3, 2, 1. \end{array}$$

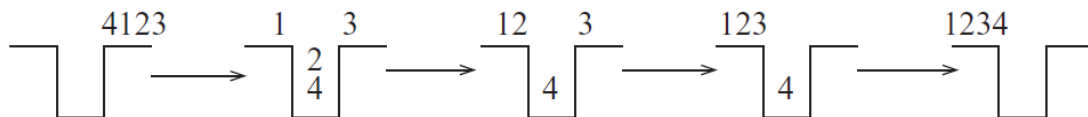
⁴²Madjid Mirzavaziri

که تعداد آن‌ها برابر با $C_4 = 14$ است. اگر به محل قرار گرفتن بزرگ‌ترین عدد نگاه کنیم، می‌توانیم رابطه‌ای بازگشتی برای تعیین تعداد جایگشت‌های خروجی بیابیم. اکنون مسئله را برای حالتی که قطار دارای n واگن می‌باشد، بررسی می‌کنیم. تعداد جایگشت‌های مطلوب را با S_n نمایش می‌دهیم. فرض کنیم قطاری با $n+1$ واگن داریم که به صورت $1, 2, \dots, n, n+1$ قرار گرفته‌اند. در جایگشت خروجی، واگن $n+1$ می‌تواند در مکان $r+1$ ام (از سمت راست) قرار گیرد، که r یکی از اعداد 0 تا $n+1$ است.

اگر $n+1$ در مکان $r+1$ ام باشد، آن‌گاه r واگن در سمت راست آن و $n-r$ واگن در سمت چپ قرار دارند. مجموعه شماره‌های n واگن سمت راست باید $\{n, n-1, \dots, n-(r-1)\}$ باشد، و بقیه اعداد در سمت چپ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر r واگنی که در سمت راست هستند باید دقیقاً r عدد قبل از $n+1$ باشند (البته نه لزوماً به ترتیب). این امر بدان دلیل روی می‌دهد که وقتی بخواهیم $n+1$ را در مکان $r+1$ ام قرار دهیم، باید $n+1$ را در تونل نگه داریم و r عدد پس از آن را به نوعی از تونل رد کنیم و سپس $n+1$ را از تونل خارج سازیم. پس مجموعه شماره‌های واگن‌های قبل و بعد از $n+1$ باید به صورت

$$\{1, 2, \dots, n-r\}, n+1, \{n-r+1, \dots, n\}$$

باشد که واگن‌های سمت چپ و راست $r+1$ لزوماً به ترتیب ظاهر نشده‌اند. اما با چه ترتیبی می‌توان این واگن‌ها را قرار داد؟ در حقیقت $n-r$ واگن سمت چپ می‌توانند، بنابر فرض استقرا، به C_{n-r} روش قرار گیرند و r واگن سمت راست نیز به‌طور مشابه می‌توانند به C_r طریق چیده شوند. بنابراین با توجه به اصل ضرب داریم $C_{n+1} = \sum_{r=0}^n C_r C_{n-r}$ ، که حکم را نتیجه می‌دهد.



شکل ۲۸. نحوه تبدیل جایگشت ۴۱۲۳ به جایگشت مرتب شده به صورت پشت

Figure 28: Convert permutation 4123 as Stack-Sortable Permutation

همان‌طور که قبلاً گفتیم با جایگشت‌ها و خواص آن‌ها، می‌توان تناظرهای زیادی برای اعداد کاتالان معرفی کرد. در زیر به بیان بعضی از این تناظرها می‌پردازیم. علاقه‌مندان می‌توانند برای مطالعه اثبات آنها، به [۱۶، ۱۷] مراجعه کنند.

i تعداد جایگشت‌های $a_1 a_2 \dots a_n$ از مجموعه چندگانه $\{1^2, 2^2, \dots, n^2\}$ به‌طوری‌که اولین ظاهر شدن از اعداد $1, 2, \dots, n$ به صورت صعودی باشد و همچنین دارای هیچ الگویی به صورت $\alpha\beta\alpha\beta$ نباشد. برای مثال

$$112233, 112332, 122331, 123321, 122133.$$

(ii) یک تجزیه از جایگشت دوری $(1, 2, \dots, n+1) \in S_{n+1}$ به ترانهش‌ها^{۴۴}، (جایگشت‌های دوری به طول ۲)، عبارت است $(1, 2, \dots, n+1) = (a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_n, b_n)$. این تجزیه را اولیه^{۴۵} گویند هرگاه $a_i \leq a_{i+1}$ برای هر $1 \leq i \leq n-1$ نتیجه دهد $a_i \leq b_i$. در [۳]، نویسندگان با ایده‌ای زیبا نشان داده‌اند که تعداد تجزیه‌های هر جایگشت $(1, 2, \dots, n+1) \in S_{n+1}$ به n ترانهش اولیه، برابر با اعداد کاتالان می‌باشد. نویسندگان این مسئله را ابتدا به‌طور مستقیم و با استفاده از رابطه بازگشتی^{۴۳} اثبات کردند و در انتها دوسویی بین این مسئله و جایگشت‌های

⁴³Multiset ⁴⁴transpositions ⁴⁵primitive

۲۳۱- پرهیز را به دست آورده‌اند. البته بعدها ریچارد استنلی^{۴۶} این مسئله را با یکی از مهمترین مسائل در ترکیبات شمارشی، یعنی تابع پارکینگ^{۴۷} متناظر کرد [۱۸]. برای مثال برای $n = 4$ داریم

$$(14)(13)(12), (14)(12)(23), (13)(12)(34), (12)(24)(23), (12)(23)(34).$$

(iii) تعداد جایگشت‌های α از مجموعه $\{1, 2, \dots, 2n\}$ با n ترانهش به طوری که برای هر جایگشت مانند $w = (1, 2, \dots, 2n)$ حاصل ضرب $w\alpha$ دارای $n + 1$ دور باشد. این دوسویی برای نخستین بار توسط جکسون^{۴۸} در [۵] معرفی گردید. به عنوان مثال برای $n = 4$ داریم

$$\begin{aligned} (123456)(12)(34)(56) &= (1)(246)(3)(5) \\ (123456)(12)(36)(45) &= (1)(26)(35)(4) \\ (123456)(14)(23)(56) &= (13)(2)(46)(5) \\ (123456)(16)(23)(45) &= (135)(2)(4)(6) \\ (123456)(16)(25)(34) &= (15)(24)(3)(6). \end{aligned}$$

(iv) جایگشت $w \in \mathcal{S}_n$ را پیشی^{۴۹} گویند هرگاه $w^2(k) = k$ برای هر $1 \leq k \leq n$. همچنین عدد k را نقطه ثابت w گویند هرگاه $w(k) = k$ ، در صورت عدم وجود نقطه ثابت، w را بدون نقطه ثابت^{۵۰} یا پریش^{۵۱} گویند. تعداد عناصر پریش پیشی $w \in \mathcal{S}_{2n}$ به طوری که برای هر $i < j < k < \ell$ داشته باشیم $w(i) = k$ و $w(j) \neq \ell$ ؛ برابر با اعداد کاتالان می‌باشد. در واقع این مسئله نشان می‌دهد بین اعداد کاتالان و پیش‌های ۳۴۱۲- پرهیز بدون پریش، یک دوسویی برقرار است. برای $n = 5$ ، پیش‌های مورد نظر عبارتند از:

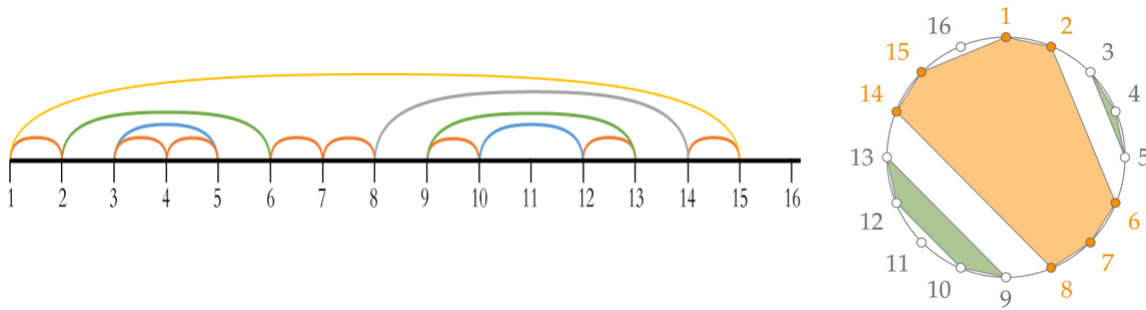
$$(12)(34)(56), (14)(23)(56), (12)(36)(45), (16)(23)(45), (16)(25)(34).$$

۸. ساختارهای کاتالان با افزازها

تعریف ۱.۸. یک افزاز از مجموعه متناهی A ، گردایه‌ی ناتهی B_1, \dots, B_k از زیرمجموعه‌های A است به طوری که $A = \cup_{i=1}^k B_i$ و برای هر $1 < i < j < n$ داشته باشیم $B_i \cap B_j = \emptyset$. زیرمجموعه‌های B_i را بلوک گویند. یک افزاز مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ را نامقاطع^{۵۲} گویند هرگاه $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, n\}$ وجود داشته باشد به طوری که $a < b < c < d$ و اگر $a, c \in B_i$ و $b, d \in B_j$ آنگاه $B_i = B_j$. تعداد افزازهای نامقاطع یک مجموعه n عضوی را با \mathcal{NC}_n نمایش می‌دهند.

از روش‌های رایج نمایش افزازهای نامقاطع به صورت کمان یا مشخص کردن آنها به صورت قطع‌های مجزای و نامقاطع یک دایره می‌باشد (شکل ۲۹).

⁴⁶Richard Stanley ⁴⁷parking function ⁴⁸D. M. Jackson ⁴⁹Involution ⁵⁰fixed point free ⁵¹derangement ⁵²Non-crossing Partitions



شکل ۲۹. عمل کردن دوسویی ϕ بر جایگشت ۱۳۲ پرهیز $w = 675849231$ و حاصل شدن جایگشت ۱۳۲-پرهیز

۲۳۴۱

Figure 29: Bijection between 132 avoiding of permutation $w = 675849231$

قضیه ۲.۸. تعداد افزازهای نامتقاطع مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ ، برابر است با اعداد کاتالان.

اثبات. برای اثبات، از رابطه بازگشتی ۳ استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم B^* بلوکی از افزازهای نامتقاطع می‌باشد که شامل عدد ۱ است و عدد k را بزرگترین عضو B^* در نظر می‌گیریم. اگر $k = 1$ باشد، آن‌گاه $B^* = \{1\}$. از طرفی $NC_0 = 1$ افزاز نامتقاطعی از عدد ۱ می‌باشد و همچنین هر افزاز نامتقاطع از مجموعه $\{2, 3, \dots, n\}$ که تعداد آن برابر با NC_{n-1} باشد، با مجموعه $B^* = \{1\}$ ، یک افزاز نامتقاطع از $\{1, 2, \dots, n\}$ تشکیل می‌دهد. تعداد این افزازهای نامتقاطع برابر است با $NC_0 \cdot NC_{n-1}$.

حال فرض کنیم $1 < k < n$. تعداد افزازهای نامتقاطع مجموعه $\{1, 2, \dots, k-1\}$ برابر است با NC_{k-1} ، و تعداد افزازهای نامتقاطع مجموعه $\{k+1, k+2, \dots, n\}$ برابر با NC_{n-k} می‌باشد. مجموعه P را در نظر می‌گیریم، برای P دو حالت وجود دارد. اگر $P \in NC_{k-1}$ ، بنابراین کافی است عدد k را در بلوکی که شامل عدد ۱ می‌باشد، قرار دهیم. بنابراین B^* یک افزاز نامتقاطع از مجموعه $\{1, 2, \dots, k-1, k\}$ می‌باشد. فرض کنیم P یک افزاز متقاطع باشد ($P \notin NC_{k-1}$). پس اعدادی مانند $a < b < c < k$ وجود دارند به طوری که $a, c \in B^*$ و $b, k \in B^*$ و $B \neq B^*$. به هر حال، چون $1 < a < b < c < k$ و $1, b \in B$ ؛ و $B \neq B^*$ ، مجموعه P افزازی متقاطع از مجموعه $\{1, 2, \dots, k-1\}$ است که این متناقض با انتخاب P است. توجه کنید k نمی‌تواند با عناصری مانند s, t به طوری که $s < k < t$ داخل بلوک یکسانی باشد. زیرا اگر این اتفاق رخ دهد داریم $1 < s < k < t$. چون $1, k \in B^*$ و s, t نیز داخل یک بلوک مشترک می‌باشند (تعریف افزاز نامتقاطع را نقض می‌کند).

در آخر، فرض می‌کنیم $1, n$ داخل افزاز یکسان B^* از افزاز نامتقاطع $P \in NC_n$ از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. با حذف عدد n از مجموعه B^* ، افزاز نامتقاطعی از مجموعه $\{1, 2, \dots, n-1\}$ را به دست می‌آوریم. به عکس، اگر ما این فرآیند را از افزازی نامتقاطعی مانند P' از مجموعه $\{1, 2, \dots, n-1\}$ شروع کنیم، یعنی فرض کنیم $P' \in NC_{n-1}$ را به افزاز نامتقاطعی که شامل عدد ۱ می‌باشد، اضافه می‌کنیم، پس ما به افزاز P از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ می‌رسیم. اگر چنین نباشد، آنگاه مانند قبل اعدادی مانند a, b, c, n وجود دارند به طوری که $a < b < c < n$ و a, c در یک بلوک با یکدیگر و b, n در بلوکی دیگر با هم قرار دارند. نتیجه می‌شود $1 < a < b < c < n$ به طوری که $1, b$ در یک بلوک با یکدیگر مانند B^* و a, c در بلوک یکسان دیگری می‌باشند. این با فرض نامتقاطع بودن افزاز P' از مجموعه $\{1, 2, \dots, n-1\}$ متناقض است. با توجه به مراحل بالا،

فرض کنیم $NC_0 = 1$ و NC_n افزایش نامتقاطعی از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. بنابراین، داریم

$$NC_n = \sum_{i=1}^n NC_{i-1} NC_{n-i}.$$

□

تبصره ۳.۸. تناظرهای زیادی بین افزایشهای نامتقاطع و اعداد کاتالان وجود دارد. به عنوان مثال در سال ۱۹۹۶ با استفاده از تکنیک تابع مولد، مارتین کلایزر^{۵۳} نشان داد تعداد افزایشهای نامتقاطع مجموعه $\{1, 2, \dots, k\}$ به $n+1$ بلوک، به طوری که هر دو عضو متمایز در هر بلوک دارای اختلاف ۳ باشند؛ یک ساختار کاتالان می باشد. برای مثال برای $n=3$ افزایشهای زیر را داریم

$$\begin{aligned} & \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}, \quad \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}\}, \\ & \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1, 5\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}. \end{aligned}$$

همچنین در سال ۱۹۷۲ رونالد کلیولند مولین^{۵۴} و رالف گردون استانتون^{۵۵} نشان دادند یک دوسوی بین اعداد کاتالان و مجموعه افزایشهای نامتقاطع $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$ ، به $n+1$ بلوک به طوری که هیچ بلوکی شامل دو عضو متوالی نباشد، وجود دارد [۱۳] (کافی است در نمایش افزایشهای نامتقاطع بر روی یک دایره، هر قطاع از دایره را یک بلوک در نظر بگیرید). برای مثال تعداد افزایشهای نامتقاطع برای $n=3$ در شکل ۳۰ نشان داده شده است.

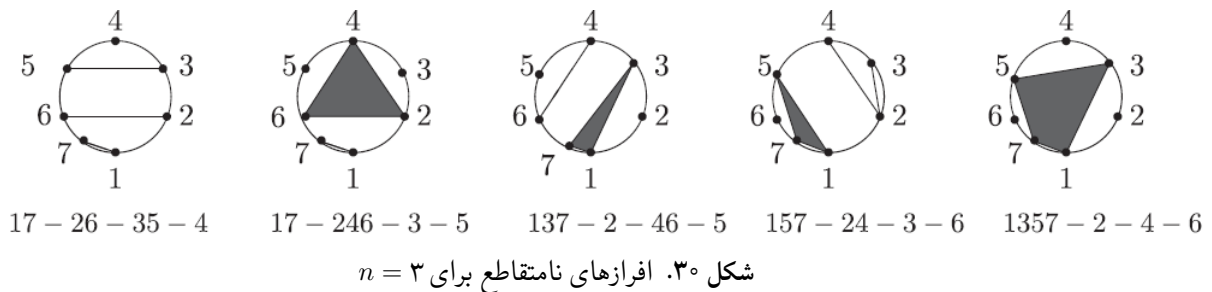


Figure 30: Non-crossing partitions of length $n=3$

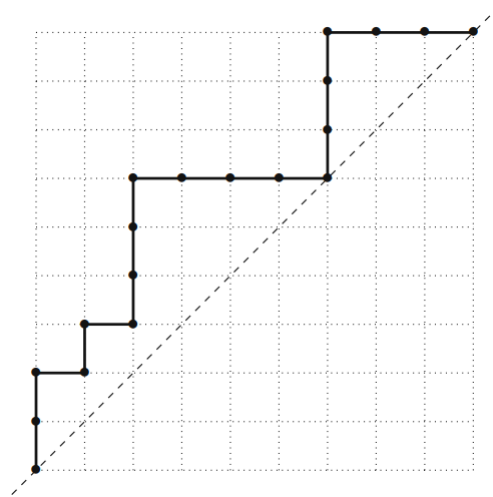
تعداد این افزایشهای نامتقاطع به طوری که هیچ بلوکی شامل دو عضو متوالی نباشد برابر است با

$$\begin{aligned} & \{\{1, 5, 7\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{6\}\}, \quad \{\{1, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{3\}, \{5\}\}, \\ & \{\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4\}\}, \quad \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}\}, \\ & \{\{1, 3, 7\}, \{2\}, \{4, 6\}, \{5\}\}. \end{aligned}$$

۱.۸. تطابقهای نامتقاطع، پرانترهای متوازن. یک تطابق نامتقاطع^{۵۶}، یک افزایش نامتقاطع می باشد به طوری که هر بلوک در آن از اندازه ۲ باشد. می توان نشان داد تعداد تطابقهای نامتقاطع یک مجموعه با $2n$ عضو، برابر است با C_n . تناظرهای متفاوتی بین این افزایشها و اعداد کاتالان وجود دارد که به اشاره بعضی از آنها می پردازیم.

⁵³Martin Klazer ⁵⁴Ronald Cleveland Mullin ⁵⁵Ralph Gordon Stanton ⁵⁶non-crossing matching

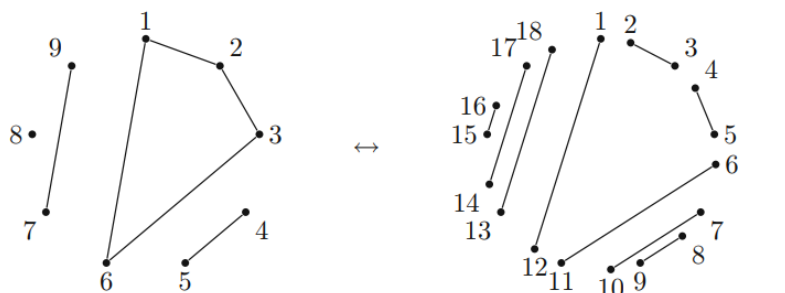
به راحتی می‌توان تناظر دو سویی بین تطابق‌ها نامتقاطع و تعداد پرانتزگذاری n متغیر تعریف کرد. تطابق نامتقاطع مجموعه ۱۸ عضوی در شکل ۳۴ را در نظر بگیرید و کافی است نقطه ابتدایی هر کمان را پرانتز باز (و نقطه انتهای هر کمان را پرانتز بسته (در نظر بگیرید. بنابراین پرانتزگذاری معادل با تطابق نامتقاطع شکل ۳۴ به صورت $((((()))((((()))(()))$ می‌باشد. به راحتی می‌توان با در نظر گرفتن نقطه ابتدایی هر کمان به صورت حرکت شمالی و نقطه انتهای هر کمان به صورت حرکت شرقی، این افرازاها را با مسیرهای دیک از طول $2n$ متناظر کرد (شکل ۳۱).



شکل ۳۱. تناظر بین تطابق‌های نامتقاطع یک مجموعه ۱۸ عضوی با مسیرهای دیک.

Figure 31: Bijection between non-crossing matchings of a set with 18 elements and lattice paths

همچنین می‌توان بین تطابق‌های نامتقاطع و افرازاها نامتقاطع تناظری دو سویی به صورت زیر به دست آورد. تطابق نامتقاطع را برای راحتی به صورت کمان‌های روی یک دایره در می‌گیریم. دو رأس $2k-1$ و $2k$ را برای $k = 1, 2, \dots, n$ در نظر می‌گیریم. اگر رأس‌ها $2k-1$ یا $2k$ منطبق شده باشند با رأس‌ها $2j-1$ یا $2j$ ، بنابراین j, k را در یک بلوک قرار می‌دهیم (شکل ۳۲).



شکل ۳۲. تناظر بین تطابق‌های نامتقاطع و افرازاها نامتقاطع یک مجموعه ۱۸ عضوی.

Figure 32: Bijection between non-crossing matchings and non-crossing partitions of set with 18 elements

۲.۸. افزایش بدون آشیانه. در نمایش به صورت کمائی افزازها، تودرتویی^{۵۷} هنگامی رخ می‌دهد که دو کمان هم مرکز هیچ‌گاه داخل هم قرار نگیرند و به اصطلاح تشکیل ساختاری رنگین‌کمائی دهد. اگر کمان‌ها همدیگر را قطع کنند گویند تقاطع^{۵۸} اتفاق افتاده است (شکل ۳۳).

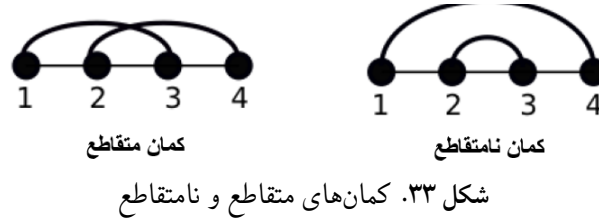


Figure 33: Crossing and non-crossing matching

یک افزاز بدون تودرتویی یا بدون آشیانه^{۵۹} افزازی از مجموعه $\pi = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ می‌باشد به طوری که برای هر $R_i = R_j$ ، آن‌گاه $\{b, c\} \in R_j$ و $\{a, d\} \in R_i$ اگر $a < b < c < d$ در واقع در نمایش به صورت کمان، افزازهای بدون تودرتویی دارای کمان‌های هم مرکزی هستند که هیچ‌کدام به طور کامل داخل هم قرار نگرفته‌اند.

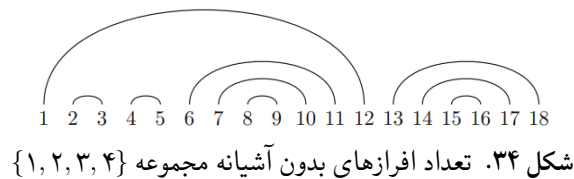
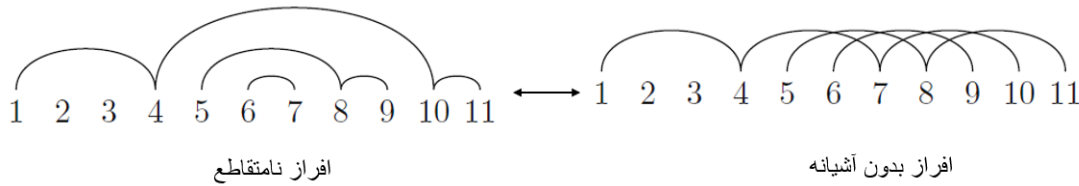


Figure 34: The number of non-nesting partitions of the set $\{1, 2, 3, 4\}$

با روشی بسیار زیبا و ابتکاری می‌توان بین افزازهای بدون آشیانه و افزازهای نامتقاطع، تناظری دوسویی برحسب کوچکترین عضو در هر بلوک تعریف کرد. این دوسویی برای اولین بار در [۱، ۲] تعریف گردید که نشان می‌دهد بین افزازهای نامتقاطع با k بلوک و افزازهای بدون آشیانه با k بلوک، یک دوسوی برحسب کوچکترین عضو در هر بلوک وجود دارد. فرض کنیم مجموعه $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ افزازی نامتقاطع از π باشد، قرار می‌دهیم $a_i = \min R_i$ و $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. افزاز بدون آشیانه π' را با در نظر گرفتن کوچکترین عضو هر بلوک طوری تعریف می‌کنیم که تعداد بلوک‌ها و همچنین اندازه بلوک‌ها با افزاز نامتقاطع π برابر باشد، یعنی اگر مجموعه $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ افزازی بدون آشیانه از π' باشد آن‌گاه $\min S_i = a_i$ و $|S_i| = |R_i|$. برای رسیدن به یک افزاز بدون آشیانه، ابتدا کوچکترین عضو در هر بلوک را انتخاب کرده و این عضوها را در بلوک‌های مجزا قرار می‌دهیم. حال چون اندازه بلوک‌ها در دو افزاز برابر می‌باشد، بنابراین بلوک‌های تک عضوی در هر دو افزاز یکسان می‌باشند. به عنوان مثال شکل ۳۵ که یک افزاز غیرمتقاطع از مجموعه $\{1, 2, \dots, 11\}$ با بلوک‌های $\{1, 2, \dots, 11\}$ ، $\{2\}$ ، $\{3\}$ ، $\{5, 8, 9\}$ ، $\{6, 7\}$ را نشان می‌دهد در نظر بگیرید. برای ساختن افزاز بدون آشیانه معادل با این افزاز، ابتدا کوچکترین اعضای هر بلوک که ۱، ۲، ۳، ۵، ۶ می‌باشد را در بلوک‌های مجزا قرار می‌دهیم. عضو ۱ در اولین بلوک را در نظر بگیرید. از ۱ به کوچکترین عضوی که در بلوک‌ها نیامده است، یعنی ۴، یک کمان رسم می‌کنیم و این فرآیند را ادامه می‌دهیم تا بلوک اول را با چهار عضو تشکیل دهیم. حال، بلوک‌های ۲ و ۳ چون تک عضوی هستند، به همین صورت تشکیل می‌شوند. کوچکترین عضو در بلوک سوم ۵ است و کوچکترین عضوی که در بلوک‌ها ظاهر نشده است عدد ۸ می‌باشد و بعد آن عدد ۹، این اعداد را در یک بلوک قرار داده و به صورت کمان به هم وصل می‌کنیم. دو عدد باقیمانده ۶ و ۷ نیز در بلوک آخر قرار

⁵⁷nesting ⁵⁸crossing ⁵⁹nonnesting partitions

می‌گیرند بنابراین مجموعه $\{6, 9\}, \{5, 8, 11\}, \{3\}, \{2\}, \{1, 4, 7, 10\}$ ؛ یک افراز بدون آشیانه معادل با افراز غیرمتقاطع فوق می‌باشد.



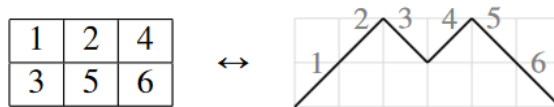
شکل ۳۵. تناظر بین افرازهای نامتقاطع و افرازهای بدون آشیانه

Figure 35: Bijections between non-crossing partitions and non-nesting partitions

۳.۸. نمودارهای یانگ. یکی از مهمترین شاخه‌های ترکیبیات شمارشی را، افراز یک عدد صحیح مثبت تشکیل می‌دهد. یک افراز از عدد صحیح λ دنباله‌ای ناصعودی به صورت $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ می‌باشد به طوری که $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ می‌باشد. نمایش‌های هندسی متفاوتی برای نمایش افراز یک عدد طبیعی وجود دارد. از مهمترین آن‌ها می‌توان به نمودارهای یانگ^{۶۰} اشاره کرد. یک نمودار یانگ از مرتبه n تشکیل شده از n مربع 1×1 است به طوری که سطر اول دارای λ_1 مربع 1×1 ، سطر دوم دارای λ_2 مربع 1×1 و ... می‌باشد. در یک نمودار یانگ اگر اعداد 1 تا n در سطرها از چپ به راست و در ستون‌های از بالا به پایین به صورت صعودی قرار گرفته باشند، نمودار یانگ فوق را نمودار یانگ استاندارد^{۶۱} می‌گویند. به عنوان مثال، یک نمودار یانگ استاندارد از افراز عدد $(5, 4, 3, 2, 1) = 15$ عبارت است:

۱	۲	۴	۹
۳	۵	۶	
۷	۸		
۱۰			

تناظری دوسویی بین نمودارهای یانگ استاندارد $2 \times n$ و مسیرهای دیک وجود دارد. از عدد یک شروع می‌کنیم و به ترتیب اعداد در سطر اول را حرکت شمالی و اعداد در سطر دوم را حرکت شرقی در نظر می‌گیریم (شکل ۳۶).



شکل ۳۶. تناظر نمودارهای یانگ با مسیرهای لاتیس

Figure 36: Bijection between young diagram and lattice paths

۴.۸. افرازهای موروساکی. یکی از ساختارهای زیبایی که از اعداد کاتالان به وسیله افرازاها وجود دارد استفاده از افرازهای موروساکی^{۶۲} می‌باشد. این نمایش از افرازاها برای نخستین بار در داستان گنجی^{۶۳} برای نشان دادن افرازهای یک مجموعه 5 عضوی استفاده گردید. این نمایش از n خط عمودی که به وسیله خطوط افقی غیرمتقاطع به هم وصل شده‌اند تشکیل شده است (شکل ۳۷).

⁶⁰young diagrams ⁶¹standard young tableaux ⁶²Murasaki partition ⁶³the tale of Genji



شکل ۳۷. تعداد افزازهای موراساکی به طول ۳

Figure 37: Murasaki Partition of length 3

می‌توان نشان داد بین افزازهای موراساکی و افزازهای نامتقاطع تناظری دوسویی برقرار می‌باشد. ابتدا اعداد $1, 2, \dots, n$ را به ترتیب از چپ به راست زیر هر خط عمودی می‌نویسیم. حال اعداد که با یک خط افقی به هم وصل می‌باشند را در یک بلوک قرار می‌دهیم. به‌عنوان مثال

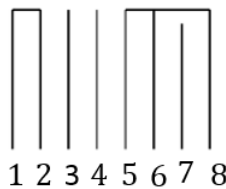

 شکل ۳۸. تعداد افزازهای موراساکی برای $n = 3$

 Figure 38: The number of Murasaki Partition for $n=3$

نمودار موراساکی از افزاز نامتقاطع $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5, 6, 8\}, \{7\}\}$ است.

مراجع

- [1] C. A. Athanasiadis, On noncrossing and nonnesting partitions for classical reflection groups, *Electron. J. Combin.*, **5** (1998) 16 pp.
- [2] A. Fink and B. Iriarte Giraldo, Bijections between noncrossing and nonnesting partitions for classical reflection groups, *Port. Math.*, **67** no. 3 (2010) 369–401.
- [3] D. A. Gewurz and F. Merola, Some factorisations counted by Catalan numbers, *European J. Combin.*, **27** no. 6 (2006) 990–994.
- [4] A. Granville and O. Ramaré, Explicit bounds on exponential sums and the scarcity of squarefree binomial coefficients, *Mathematika*, **43** no. 1 (1996) 73–107.
- [5] D. M. Jackson, Counting cycles in permutations by group characters, with an application to a topological problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **299** no. 2 (1987) 785–801.
- [6] D. E. Knuth, *The art of computer programming*, **1**, Fasc. 1. MMIX, a RISC computer for the new millennium, Addison-Wesley, Upper Saddle River, NJ, 2005.
- [7] C. Krattenthaler and Daniel Yaqubi, Some determinants of path generating functions, II, *Adv. in Appl. Math.*, **101** (2018) 232–265.
- [8] P. A. MacMahon, *Combinatory analysis*, **I & II**, American Mathematical Soc., 2001.
- [9] T. Mansour, Counting peaks at height k in a Dyck path, *J. Integer Seq.*, **5** no. 1 (2002) 9 pp.

- [10] T. Mansour, Restricted 132-alternating permutations and Chebyshev polynomials, *Ann. Comb.*, **7** (2003) 201–227.
- [11] M. Bóna, *Combinatorics of Permutations*, With a foreword by Richard Stanley, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [12] R. An and J. Hou, Characterizations of Jordan \dagger -skew multiplicative maps on operator algebras of indefinite inner product spaces, *Chinese Ann. Math. Ser. B*, **26** no. 4 (2005) 569–582.
- [13] R. C. Mullin and R. G. Stanton, A map-theoretic approach to Davenport-Schinzel sequences, *Pacific J. Math.*, **40** (1972) 167–172.
- [14] P. Peart and W.-J. Woan, Dyck paths with no peaks at height k , *J. Integer Seq.*, **4** no. 1 (2001) 6 pp.
- [15] A. Sárózy, On divisors of binomial coefficients, I, *J. Number Theory*, **20** no. 1 (1985) 70–80.
- [16] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, **2**, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [17] R. P. Stanley, *Catalan addendum to Enumerative Combinatorics*, Available online at <https://math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>, **2**, 2011.
- [18] R. P. Stanley, Parking functions and non-crossing partitions, *Electron. J. Combin.*, **4** (1997) 14 pp.
- [19] N. J. A. Sloane, The On-Line Encyclopaedia of Integer Sequences, oeis.org (2018).

[۲۰] م. میرزاووزیری، شمردنی‌ها را بشمارید، انتشارات سخن‌گستر، ۱۳۸۶.

دانیال یعقوبی

گروه کامپیوتر، مجتمع آموزش عالی تربت‌جام، تربت‌جام، ایران
yaqubi@tjamcaas.ac.ir

دانیال یعقوبی متولد بهمن ماه ۱۳۶۵ در شهر تربت‌جام یکی از شهرستان‌های خراسان رضوی می‌باشد. وی در سال ۱۳۸۳ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه فردوسی مشهد گردید و در سال ۱۳۸۷ از رساله ارشد خود دفاع کرد. وی دکتری خود را نیز در دانشگاه فردوسی سال ۱۳۹۱ در گرایش گراف و ترکیبیات جبری تحت سرپرستی دکتر مجید میرزاووزیری آغاز کرد و در سال ۱۳۹۶ از رساله دکتری خود تحت عنوان افزایش‌های ضربی دفاع کرد. وی هم‌اکنون عضو هیئت علمی دانشگاه تربت‌جام می‌باشد و زمینه‌های تحقیقاتی ایشان ترکیبیات شمارشی و نظریه مقدماتی اعداد است.



مجید میرزاووزیری

گروه ریاضی و کامپیوتر، دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران
mirzavaziri@um.ac.ir

مجید میرزاووزیری زاده ۹ اسفند ۱۳۵۰ در تهران می‌باشد. وی استاد تمام گروه ریاضی محض و گروه مهندسی کامپیوتر دانشگاه فردوسی مشهد و همچنین بنیانگذار شهر ریاضی است. وی مدرک دکتری خودش در ریاضیات محض را از دانشگاه فردوسی مشهد دریافت کرده است. دکتر مجید میرزاووزیری از سال ۱۳۹۸ تا ۱۴۰۲ رئیس گروه آموزش‌های آزاد (کالج دانشگاه فردوسی) نیز بوده است.

