

## PREDICTION OF GOLD PRICE PATTERN BY FRACTAL INTERPOLATION

HAMID REZA YOOSEFZADEH<sup>ORCID</sup> AND AZAM FOTOVAT\*<sup>ORCID</sup>

**ABSTRACT.** Analyzing and examining the price trend of an asset is a fundamental step in managing investment risk on that asset. Therefore, in markets, predicting the price trend of an asset is of special interest to traders and even plays a crucial role in a country's monetary policies. Based on this, in this paper, we will try to use the concept of fractal interpolation to predict the price trend of gold, given its price fluctuations and greater importance compared to other metals in markets. By analyzing the gold's price trend using time series data with a fractal structure, we aim to determine the pattern of price trend to predict the price trend of gold ounces. Such an approach can provide the necessary tool to help investment decision-making in different time periods (short-term, medium-term, and possibly long-term). To achieve this, we first identify the presence of long-term memory in gold's price trend using the Hurst exponent. After confirming stability, we generate fractal data by calling the fractal interpolation algorithm and then predict the behavior of the corresponding time series data using a neural network algorithm based on fractal data. Finally, we compare the results obtained from calling the algorithms present in the literature on gold data.

### 1. Introduction

The financial market data is unstable and irregular, and it sometimes contains missing data. To address these issues, researchers have developed different approaches, such as the fractal interpolation

---

Keywords: Fractal interpolation, Hurst measure, Time series, Meta-heuristic algorithm, Artificial neural network.

Communicated by Soghra Nobakhtian.

Article Type: Research Paper.

\*Corresponding author.

Received: 07/06/2023, Accepted: 11/10/2023, Published Online: 16-12-2023.

Cite this article: H. R. Yoosefzadeh and A. Fotovat, Prediction of gold price pattern by fractal interpolation, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 3 (2023) 119–144.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137920.1583> .

method. The aim of this study is to investigate the time series related to the gold market and determine whether it exhibits fractal characteristics. To generate fractal data, we can use the improved fractal interpolation algorithm (IFI). Then, we can use the support vector regression (SVR) algorithm, which is a type of machine learning method (SVM), to predict the price trend of gold in a specific time period. The price of an asset is directly proportional to its risk or fluctuation. Therefore, in the first phase, business owners and investors can determine the appropriate fee rate by analyzing the time series of data with fractal structure, and in the second phase, in the asset management phase, they can control losses caused by big fluctuations in returns and investment. The fluctuation of asset prices is a significant topic that has been studied by many researchers. They use linear or non-linear methods to predict and make appropriate use of these price fluctuations. In economic and social fields, fractal interpolation is often used to fit missing data and predict short-term trends due to the abundance of unstable and irregular data. In time series, data are collected at regular intervals according to a certain rule, and by analyzing the obtained data and with the help of different methods, the behavior of the series in the future can be approximately predicted. There are methods to determine whether a system is fractal or not, and thus, to calculate its fractal dimension. The method of calculating the dimension of the system depends on the type of its fractal structure. By determining the fractal dimension, the stability of the system can be investigated. Stability is a key factor in time series analysis, and the Hurst exponent is one of the criteria used to assess stability. Therefore, the fractal interpolation method can be implemented when the time series is stable. Hurst's exponent is a measure that identifies the long-term memory in time series. The R/S analysis criterion is one of the methods used to calculate the Hurst exponent. This criterion was first proposed by Hurst in his studies of natural phenomena such as the hydrological characteristics of the Nile Basin in 1951. In financial markets, the R/S analysis criterion is used to distinguish fractal from non-fractal systems, to identify the stability of trends, and to determine the length of life-time cycles. The range value of R in this index is equal to the difference between the lowest and highest deviation values from the cumulative average of the time series. Hurst normalized the value of the R range by using the standard deviation of the time series, relative to the fluctuations of the inputs of different time series, and defined the analysis criterion in a certain period of time. In this study, we aim to evaluate the performance of the fractal interpolation algorithm in predicting the trend of gold price based on time series data. The global ounce of gold is of great importance in world markets and experiences fluctuations, making it an ideal candidate for this analysis. To achieve this, we first calculate the Hurst exponent to determine the long-term memory of the gold price trend. We then generate fractal data using the fractal interpolation algorithm and apply the support vector regression (SVR) algorithm to predict the gold price trend. We compare the performance of Wang's algorithm and the Fracion algorithm to determine the best method for predicting the gold price trend. The primary objective of this research is to examine the predictability

of the price trend of gold and determine its price pattern. We analyze and evaluate this process by comparing it with past-oriented methods such as Wang's method.

## 2. Main Results

We have analyzed the results of the Wang algorithm and the Fracsion algorithm separately for their ability to predict the final price of gold in 2020, 2021, and 2022, using well-known evaluation criteria. Two algorithms, the Wong and Fracsion methods, are presented below for the purpose of numerical analysis. Wang, et al., in 2018, using the fractal property of the Shanghai stock market and employing the contribution of algorithm of fractal interpolation and Support Vector Machin (SVM), have focused on predicting price patterns [21].

---

**Algorithm 1** Wang Algorithm:

---

**Require:** Gold closing price.

**Ensure:** Prediction of gold price pattern in a short-term time interval.

**Start**

- 1: Examine the stability and fractal structure of gold price data using the Hurst exponent.
- 2: Predict the data using the SVM algorithm.
- 3: Adjust the points obtained from Step 2 using the fractal interpolation algorithm.
- 4: Predict a short-term period based on the corresponding fractal interpolation function of the points from Step 3.

**End**

---



---

**Algorithm 2** Fracsion Algorithm:

---

**Require:** Gold closing price in a priod.

**Ensure:** Prediction of gold price pattern in a short-term time interval.

**Start**

- 1: Examine the stability and confirm the fractal structure of the data using the Hurst exponent.
- 2: Generate a set of fractal points for data with a fractal structure.
- 3: Call and train the SVR algorithm based on the obtained fractal data.
- 4: Predict the trend of gold price in a time interval based on the regression function obtained in Step 3.

**End.**

---

The results for 2022 are presented in the following figure, for instance. The comparison of the results indicates that although both algorithms exhibit errors in price prediction, the adaptive Fracsion algorithm outperforms the Wang algorithm in predicting the price trend of gold in a short term memory.

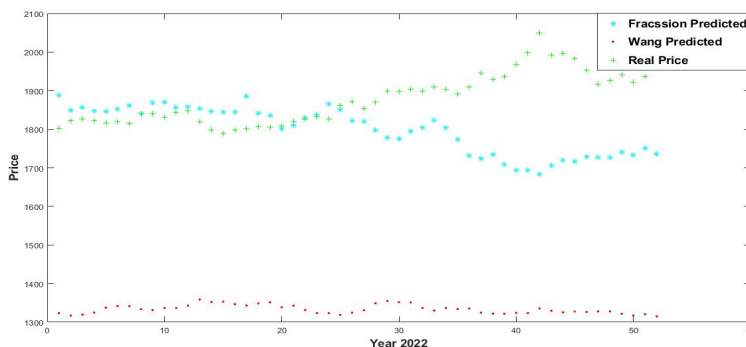


FIGURE 1. Prediction of gold price pattern by two algorithms and for 2022.

### 3. Summary of Proofs/Conclusions

In this paper, we analyzed the gold price time series in two phases. Firstly, by applying Hurst’s method for each year, we investigated the stability of the gold price pattern (fractal structure of the system). Secondly, we utilized existing algorithms on the time series corresponding to the price of gold to predict its price trend, which provides important information to investors who seek to predict the gold market. The fundamental analysis of the gold market with the fractal structure presents a new approach to the analysis of the gold market and a non-linear perspective on this issue. The characteristic of long-term memory as well as the fractal structure of a time series corresponding to gold price data can play an effective role in predicting gold fluctuations and hence, the return based on gold fluctuations. However, predicting the price trend of the gold market in the long term is difficult due to many different factors that affect the global markets. Nevertheless, using algorithms for predicting the behavior of a time series, as a technical analysis tool, in stable economic and political conditions can have satisfactory results in predicting the price trend of gold in the short term. However, when there are conditions that strongly affect the price trend, such as war, global inflation, and in recent years, the global pandemic of Covid-19, algorithms cannot perform well in predicting the price pattern trend, because the structural order of the price pattern in such a situation, it is faced to distribution.

**Hamid Reza Yoosefzadeh**

Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P.O. Box 19395-4697, Tehran, Iran

Email: usefzadeh.math@pnu.ac.ir

**Azam Fotovat**

Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P.O. Box 19395-4697, Tehran, Iran

Email: afotovat67@gmail.com

## پیش‌بینی الگوی قیمتی طلا با درونیابی فراکتال

حمیدرضا یوسف‌زاده<sup>۱</sup> و اعظم فتوت<sup>۲\*</sup>

**چکیده.** تحلیل و بررسی روند قیمت یک دارایی، گام اساسی در مدیریت ریسک سرمایه‌گذاری بر روی آن دارایی به شمار می‌رود. بنابراین در بازارهای جهانی، پیش‌بینی روند قیمتی یک دارایی مورد توجه ویژه معامله‌گران می‌باشد و حتی در سیاست‌های پولی یک کشور نقش اساسی را ایفا می‌کند. براین اساس، در این مقاله سعی خواهیم کرد با توجه به نوسانات قیمتی و اهمیت بیشتر اونس جهانی طلا نسبت به سایر فلزات در بازارهای جهانی، با استفاده از مفهوم درونیابی فراکتال در پیش‌بینی روند قیمتی داده‌های با ساختار سری‌های زمانی، روند قیمتی این فلز گرانبها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم تا به کمک آن، الگوی روند قیمتی طلا را به‌منظور پیش‌بینی روند قیمتی اونس جهانی طلا تعیین کنیم. چنین رویکردی، ابزار لازم در جهت کمک به‌نحوه انجام سرمایه‌گذاری در دوره‌های زمانی مختلف (کوتاه‌مدت، میان‌مدت و احتمالاً بلندمدت) را می‌تواند فراهم نماید. برای رسیدن به این مهم، در ابتدا به تشخیص وجود حافظه بلندمدت در روند قیمتی طلا، با استفاده از نمای هرست می‌پردازیم. پس از تأیید پایداری، با فراخوانی الگوریتم درونیابی فراکتال به تولید داده‌های فراکتالی می‌پردازیم و در پایان با فراخوانی الگوریتم مبتنی بر شبکه‌های عصبی بر روی داده‌های فراکتالی، به پیش‌بینی رفتار سری زمانی متناظر با داده‌های قیمتی طلا می‌پردازیم. در پایان، به مقایسه نتایج حاصل از فراخوانی دو الگوریتم موجود در ادبیات موضوع بر روی داده‌های طلا می‌پردازیم.

### ۱. مقدمه

داده‌ها در بازارهای مالی ناپایدار و نامنظم هستند و گاهی داده‌های مفقود شده‌ای نیز وجود دارند که برای پیدا کردن آنها می‌توان از رویکردهای مختلف مانند رویکرد درونیابی فراکتالی استفاده کرد [۱۱]، [۱۲]. هدف از این مقاله، بررسی فراکتالی بودن بازار طلای جهانی و پیش‌بینی الگوی قیمتی آن است، که با استفاده از الگوریتم درونیابی فراکتال بهبود یافته (IFI)<sup>۱</sup> که در [۲۱] معرفی شده است، به تولید داده‌های فراکتالی می‌پردازیم. پس از آن با الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان (SVR)<sup>۲</sup>، که توسعه یافته روش ماشین بردار پشتیبان (SVM)<sup>۳</sup> است، به پیش‌بینی روند قیمتی طلا در یک دوره زمانی می‌پردازیم. قیمت یک دارایی تابعی از ریسک یا نوسانات آن دارایی است [۴]. بنابراین در مرحله اول، صاحبان مشاغل و کارآفرینان می‌توانند با استفاده از تحلیل مناسب سری زمانی داده‌های مالی، نرخ مناسب کارمزد را تعیین نمایند و در مرحله دوم، در مدیریت دارایی‌ها

عبارات و کلمات کلیدی: درونیابی فراکتال، نمای هرست، سریهای زمانی، الگوریتم فراابتکاری، شبکه عصبی مصنوعی.

دبیر تخصصی رابط: صغری نوبختیان

نوع مقاله: پژوهشی

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۱۹ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۹/۲۵

ارجاع به مقاله: ح. ر. یوسف‌زاده و ا. فتوت، پیش‌بینی الگوی قیمتی طلا با درونیابی فراکتال، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره ۳ (۱۴۰۲) ۱۱۹-۱۴۴.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137920.1583>

<sup>1</sup>Improved Fractal Interpolation (IFI) <sup>2</sup>Support Vector Regression (SVR) <sup>3</sup>Support Vector Machine (SVM)

می‌توانند ضرر و زیان ناشی از نوسانات شدید در بازدهی و سرمایه‌گذاری را کنترل نمایند [۱۴]. نوسان قیمت دارایی‌ها یکی از پرچالش‌ترین موضوعاتی است که توجه محققان مختلفی را به سوی خود جلب کرده است. با استفاده از روش‌های خطی یا غیرخطی، به دنبال پیش‌بینی و در نتیجه استفاده مناسب از این تغییرات قیمتی هستند. در بخش‌های اقتصادی و اجتماعی، به دلیل تعدد داده‌های نایستا و نامنظم، برای برآزش داده‌های مفقودی و پیش‌بینی روند کوتاه‌مدت، اغلب از درونیایی فراکتال استفاده می‌شود. در سری‌های زمانی، داده‌ها در فواصل زمانی منظم طبق قانون خاصی جمع‌آوری می‌شوند و با تحلیل داده‌های به‌دست آمده و با کمک روش‌های متفاوت، می‌توان رفتار سری را در آینده به‌طور تقریبی پیش‌بینی کرد [۱۷].

برای بررسی فراکتالی بودن ساختار یک سیستم و همچنین تعیین بُعد فراکتالی، روش‌های مختلفی وجود دارد. روش محاسبه بُعد سیستم که براساس بُعد فراکتالی آن سیستم می‌توان تعریف کرد [۱۶]، با توجه به نوع ساختار فراکتالی آن تعیین می‌شود. پس از تعیین بُعد فراکتال، پایدار بودن سیستم بررسی می‌شود. زیرا شرط مهم برای پیاده‌سازی روش درونیایی فراکتال، داشتن پایداری در سری زمانی مورد مطالعه است. یکی از معیارهایی که به بررسی پایداری در سری زمانی می‌پردازد، استفاده از نمای هرست<sup>۴</sup> است. نمای هرست معیاری است که به اندازه‌گیری حافظه بلندمدت در سری‌های زمانی می‌پردازد. برای محاسبه کمیت نمای هرست روش‌های مختلفی ارائه شده است که یکی از آن‌ها استفاده از معیار تحلیل  $\frac{R}{S}$  می‌باشد. این معیار نخستین بار بر مبنای مطالعات هرست در مورد مطالعه پدیده‌های طبیعی مانند خصوصیات هیدرولوژیکی حوزه نیل در سال ۱۹۵۱ مطرح گردید. در بازارهای مالی از این معیار برای تمیز دادن سیستم‌های فراکتالی از غیرفراکتالی، پایداری روندها و طول دوره چرخه‌ها استفاده می‌شود [۸]. مقدار دامنه  $R$  در این شاخص برابر اختلاف کمترین و بیشترین مقادیر انحراف از میانگین تجمیعی سری‌های زمانی است. هرست برای نرمال‌سازی مقدار دامنه  $R$ ، نسبت به نوسانات ورودی‌های سری‌های زمانی مختلف، از انحراف معیار سری‌های زمانی استفاده کرد و معیار تحلیل را در یک دوره زمانی مشخص تعریف نمود [۹].

در این مقاله برآنیم از یک‌سو، با توجه به نوسانات و اهمیت بیشتر اونس جهانی طلا نسبت به سایر فلزات در بازارهای جهانی و از سوی دیگر، عملکرد مناسب الگوریتم درونیایی فراکتال در پیش‌بینی روند داده‌های مبتنی بر سری‌های زمانی، به پیاده‌سازی این الگوریتم بر روی سری زمانی مربوط به این فلز گرانبها بپردازیم تا عملکرد این الگوریتم را در تعیین الگوی روند قیمتی طلا به‌منظور پیش‌بینی روند قیمتی اونس جهانی طلا جهت سرمایه‌گذاری در دوره‌های زمانی مختلف مورد ارزیابی قرار دهیم. برای این منظور، در گام نخست، جهت تشخیص حافظه بلندمدت روند قیمتی طلا، به محاسبه نمای هرست متناظر با سری زمانی مربوط به طلا می‌پردازیم. پس از تأیید پایداری، در گام بعدی، با الگوریتم درونیایی فراکتال به تولید داده‌های فراکتالی می‌پردازیم و با فراخوانی الگوریتم  $SVR$  بر روی داده‌های فراکتالی، به پیش‌بینی روند قیمتی طلا می‌پردازیم. در پایان به مقایسه دو الگوریتم ارائه شده در [۲۱] و الگوریتم فرکسیون ارائه شده در [۲۶]، می‌پردازیم. هدف اصلی این تحقیق را می‌توان در بررسی قابلیت پیش‌بینی‌پذیر بودن روند قیمتی فلز گرانبهای طلا و تعیین الگوی قیمتی طلا، خلاصه نمود. فرایندی که با فراخوانی و مقایسه با روش گذشته-محوری مانند روش وانگ [۲۱]، مورد تحلیل و ارزیابی قرار می‌گیرد.

ساختار کلی این مقاله به‌صورت ذیل، سازماندهی می‌شود. مروری بر ادبیات موضوع در بخش ۲ بیان شده است. در بخش ۳، به شرح الگوریتم‌های مورد استفاده در این مقاله پرداخته شده است. فراکتالی بودن و پیش‌بینی الگوی قیمتی سری زمانی قیمت طلا در بخش ۴ مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۵ نتایج عددی آورده شده است و در بخش ۶ نتیجه‌گیری کلی ارائه گردیده است.

## ۲. ادبیات موضوع

میرانی در سال ۲۰۰۴ به بررسی پیش‌بینی قیمت طلا با استفاده از الگوریتم پس انتشار ژنتیک<sup>۵</sup> پرداخت و دقت پیش‌بینی الگوریتم پیشنهادی خود را مورد ارزیابی قرار داد [۱۵]. سرفراز و همکارش افسر در سال ۲۰۰۵، به بررسی عوامل مؤثر بر قیمت

<sup>4</sup>Hurst <sup>5</sup>Genetic Backpropagation Algorithm

طلا و ارائه مدل پیش‌بینی قیمت آن به کمک شبکه‌های عصبی فازی پرداختند و برتری شبکه عصبی فازی را بر روش رگرسیون نشان دادند [۱۹]. مروت در سال ۱۳۹۱ به بحث فراکتالی بودن بازار بورس تهران پرداخت [۲۵]. حاتم‌لو و دلجوان در سال ۲۰۱۷، پیش‌بینی قیمت طلا را با استفاده از روش‌های داده‌کاوی با در نظر گرفتن عوامل جدید، انجام دادند و نشان دادند دقت پیش‌بینی در روش‌های سری زمانی با ۷۳٪ فزونی نسبت به روش رگرسیون از دقت بیشتری برخوردار است [۷]. پیلگرام و تیلور در سال ۲۰۱۸ روش‌هایی را برای سنجیدن ویژگی‌های ساختار فراکتالی سیستم‌ها معرفی کردند [۱۶]. در همین سال حافظی و اخوان برای پیش‌بینی تغییرات قیمت طلا یک الگوریتم فرا ابتکاری *BAT* پیشنهاد کردند و برتری الگوریتم پیشنهادی خود را بر برخی از روش‌های متداول و جدید نشان دادند [۶]. در سال ۲۰۱۸ وانگ و همکاران، به بررسی روند قیمتی بازار شانگهای چین با استفاده از الگوریتم *SVM* و الگوریتم درونیابی فراکتال، پرداختند و نشان دادند که روش پیشنهادی آن‌ها می‌تواند روند شاخص سهام بازار شانگهای را تنها در یک دوره زمانی کوتاه‌مدت چهار روزه تشخیص دهد [۲۱]. داس و همکاران در سال ۲۰۲۰ سهام مختلف در بنگلادش را با الگوریتم *SVR* با دو هسته خطی و استفاده از تابع پایه شعاعی (RBF)<sup>۶</sup> مورد مطالعه قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که الگوریتم *SVR* با هسته خطی دارای دقت حدود ۹۷٪ و با هسته تابع شعاعی دارای دقت بیش از ۹۷٪ است، که این امر برتری دقت *SVR* با هسته تابع شعاعی را نسبت به هسته خطی نشان می‌دهد [۵].

الحماری در سال ۲۰۲۰، سه ارز دیجیتال، بیت کوین، ریپل و اتریوم را با الگوریتم *SVR* با سه هسته متفاوت خطی، تابع پایه شعاعی (RBF) و چند جمله‌ای مورد بررسی قرار داد و نتیجه گرفت که پیش‌بینی الگوریتم *SVR* با هسته تابع پایه شعاعی نسبت به سایر هسته‌ها در پیش‌بینی قیمت ارزهای دیجیتال از دقت بیشتری برخوردار است [۲]. یوسف‌زاده و همکاران در سال ۱۳۹۹، در مطالعه خود به منظور بهبود دقت پیش‌بینی روند شاخص صنایع مختلف در بازار بورس، الگوریتم ترکیبی جدید فرکسیون، که تلفیقی از دو الگوریتم درونیابی فراکتالی و *SVR* است، را پیشنهاد دادند. آنها نشان دادند که پیاده‌سازی الگوریتم فرکسیون بر روی داده‌های متناظر با شاخص صنایع مختلف در بازار بورس ایران و مقایسه عملکرد آن با دو روش متداول شبکه عصبی مصنوعی و *SVR*، نشان از برتری دقت پیش‌بینی الگوریتم فرکسیون داشت [۲۶]. پریا سادورسکی<sup>۷</sup> در سال ۲۰۲۱، برای پیش‌بینی قیمت طلا و نقره از نوعی الگوریتم که مبتنی بر درخت طبقه‌بندی شده است، استفاده کرد [۱۸].

در این مقاله، با جمع‌آوری داده‌های مربوط به قیمت تمام شده (پایانی) جهانی طلا در یک بازه زمانی سه ساله، ابتدا فراکتالی بودن سری زمانی مربوط به روند قیمتی این فلز گرانبها را بررسی می‌کنیم و سپس با استفاده از ترکیب الگوریتم‌های درونیابی فراکتال و *SVR*، به پیش‌بینی الگوی قیمتی طلا می‌پردازیم. در ادامه همچنین دقت پیش‌بینی آن با روش پیشنهادی ارائه شده در [۲۱]، مورد ارزیابی و تحلیل قرار می‌گیرد.

### ۳. درونیابی فراکتال

پژوهش‌ها و مطالعات انجام شده در زمینه بازار جهانی طلا نشان می‌دهد که نحوه سرمایه‌گذاری بر روی این فلز گرانبها در قالب یک دستگاه دینامیکی غیرخطی پیچیده بیان می‌شود [۱۸]. به همین دلیل سرمایه‌گذاری در این بازار و پیش‌بینی روند بازار، با توجه به وجود ریسک بالا و نیز وجود عوامل مؤثر مختلف بر روند قیمتی آن، از اهمیت خاصی برخوردار است. با پیشرفت‌های چشمگیر اخیر که در نظریه هوش مصنوعی و یادگیری ماشین رخ داده است، بعضی از روش‌های هوشمند مانند *SVR* و *SVM* برای پیش‌بینی رفتار سری‌های زمانی داده‌های مالی مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین به دلیل تعداد بالای داده‌های نایستا و نامنظم، برای تقریب داده‌های مفقود شده و پیش‌بینی روند داده‌ها، ترکیب روش‌های هوشمند و درونیابی فراکتال می‌تواند به عنوان یک رویکرد مناسب مورد استفاده قرار گیرد [۲۲].

۱.۳. محاسبه نمای هرست با استفاده از معیار  $\frac{R}{S}$ . نمای هرست معیاری است که به اندازه‌گیری حافظه بلندمدت در سری‌های زمانی می‌پردازد. برای محاسبه مقدار نمای هرست روش‌های مختلفی ارائه شده است که یکی از آن‌ها استفاده از

<sup>۶</sup>Radial Basis Function (RBF) <sup>۷</sup>Perea Sadorsky

معیار تحلیل  $\frac{R}{S}$  می‌باشد. این معیار نخستین بار بر مبنای مطالعات هرست در مورد مطالعه پدیده‌های طبیعی مانند ویژگی‌های هیدرولوژیکی حوزه نیل در سال ۱۹۵۲، مطرح گردید. در بازارهای مالی از این معیار برای تمیز دادن سیستم‌های تصادفی از غیرتصادفی، فراکتالی از غیر فراکتالی و همچنین بررسی پایداری روندها و تعیین طول دوره چرخه‌ها استفاده می‌شود. در محاسبه نمای هرست، مقدار دامنه  $R$  در این شاخص برابر اختلاف مقادیر کمترین و بیشترین انحراف از میانگین تجمیعی سری‌های زمانی است. برای نرمال‌سازی مقدار دامنه ( $R$ ) نسبت به نوسانات ورودی‌های سری‌های زمانی مختلف، می‌توان از انحراف معیار سری‌های زمانی ( $S$ ) استفاده کرد و معیار تحلیل  $\frac{R}{S}$  را در یک دوره زمانی مشخص تعریف نمود. در الگوریتم ۱، نحوه محاسبه نمای هرست ( $H$ ) بیان شده است [۲۶].

### الگوریتم ۱ محاسبه‌ی $H$ با استفاده از معیار $\frac{R}{S}$ .

ورودی: سری زمانی به طول  $M$ .

خروجی: تعیین مقدار نمای هرست ( $H$ ).

شروع

۱: سری زمانی با  $M$  داده را به  $d$  زیرمجموعه با طول‌های یکسان  $\tau$  تقسیم می‌کنیم و هر زیرمجموعه را با  $Z_{\tau,m}$ ، که  $m = 1, 2, 3, \dots, d$ ، نمایش دهید.

۲: میانگین  $E_{\tau,m}$  و انحراف معیار  $S_{\tau,m}$  متناظر با زیرمجموعه  $Z_{\tau,m}$  را به صورت زیر محاسبه کنید.

$$E_{\tau,m} = \frac{\sum_{i=1}^{\tau} Z_{\tau,m}}{\tau}, \quad S_{\tau,m} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\tau} (Z_{\tau,m} - E_{\tau,m})^2}{\tau}}$$

۳: قرار دهید:

$$(1) \quad X_{\tau,m}(i) := Z_{\tau,m}(i) - E_{\tau,m}.$$

۴: سری تجمعی  $Y_{\tau,m}$  متناظر با  $X_{\tau,m}$  را محاسبه کنید.

$$(2) \quad Y_{\tau,m}(i) = \sum_{i=1}^{\tau} X_{\tau,m}(i).$$

۵: اختلاف بیشترین و کمترین مقدار  $Y_{\tau,m}$ ، یعنی

$$(3) \quad R_{\tau,m} = \text{Max}_{i=1}^{\tau} Y_{\tau,m}(i) - \text{Min}_{i=1}^{\tau} Y_{\tau,m}(i).$$

را بیابید.

۶: به ازاء هر  $Z_{\tau,m}$ ، نسبت  $\frac{R_{\tau,m}}{S_{\tau,m}}$  را محاسبه کنید و سپس به ازاء هر مقدار  $\tau$ ، نسبت  $(\frac{R}{S})_{\tau}$  را برابر میانگین مقادیر  $\frac{R_{\tau,m}}{S_{\tau,m}}$  به دست آمده، قرار دهید.

۷: مقادیر  $(\frac{R}{S})_{\tau}$  را بر حسب  $\tau$  در یک نمودار لگاریتمی رسم کنید.

۸: با استفاده از روش رگرسیون حداقل مربعات، مجموعه نقاط به دست آمده را توسط یک خط برازش دهید و سپس شیب خط برازش شده را به عنوان نمای هرست ( $H$ ) در نظر بگیرید. به ازای  $m = 1, 2, \dots, d$  مراحل ۲ تا ۵ را تکرار کنید.

پایان

مثال ۱. در این مثال نحوه پیاده‌سازی الگوریتم محاسبه‌ی نمای هرست را برای مجموعه داده‌های  $W$  نشان می‌دهیم و بر اساس آن درباره پایداری دستگاه بحث می‌کنیم.

$$W = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15), (6, 18)\}$$

گام ۱. ابتدا داده‌ها را به  $d = 1, 2, 3$  زیرمجموعه  $Z_{\tau, m}$  با طول یکسان  $\tau = 2, 3, 6$  تقسیم می‌کنیم.  
گام ۲. میانگین  $E_{\tau, m}$  و انحراف معیار  $S_{\tau, m}$  متناظر با هر زیرمجموعه  $Z_{\tau, m}$  را به دست می‌آوریم (جدول ۱ ملاحظه شود).

جدول ۱. کمیت‌های  $E_{\tau, m}$  و  $S_{\tau, m}$  برای زیرمجموعه‌های  $\tau$  در مثال ۱.

Table 1:  $E_{\tau, m}$  and  $S_{\tau, m}$  values for subsets of  $\tau$  in Example 1.

زیر مجموعه‌های $Z_{\tau, m}$	$E_{\tau, m}$	$S_{\tau, m}$
$Z_{6,1} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$	$E_{6,1} = 10/5$	$S_{6,1} = 5/86$
$Z_{3,1} = \{3, 6, 9\}$	$E_{3,1} = 6$	$S_{3,1} \cong 2/45$
$Z_{3,2} = \{12, 15, 18\}$	$E_{3,2} = 15$	$S_{3,2} \cong 2/45$
$Z_{2,1} = \{3, 6\}$	$E_{2,1} = 4/5$	$S_{2,1} \cong 1/22$
$Z_{2,2} = \{9, 12\}$	$E_{2,2} = 10/5$	$S_{2,2} \cong 1/22$
$Z_{2,3} = \{15, 18\}$	$E_{2,3} = 16/5$	$S_{2,3} \cong 1/22$

گام ۳. با توجه به رابطه‌ی  $X_{\tau, m}(i) := Z_{\tau, m}(i) - E_{\tau, m}$  میانگین اعضای هر زیرمجموعه  $Z_{\tau, m}$  را از عضوهای آن زیرمجموعه کم می‌کنیم (جدول ۲ ملاحظه شود).

جدول ۲. محاسبه‌ی مقادیر  $X_{\tau, m}$  متناظر با هر زیرمجموعه در مثال ۱.

Table 2: Calculation of  $X_{\tau, m}$  values corresponding to each subset in Example 1.

$X_{6,1} = \{-6/5, -3/5, -1/5, 1/5, 3/5, 6/5\}$	$X_{\tau, m}(i) := Z_{\tau, m}(i) - E_{\tau, m}$
$X_{3,1} = \{-3, 0, 3\}$	
$X_{3,2} = \{-3, 0, 3\}$	
$X_{2,1} = \{-1/5, 1/5\}$	
$X_{2,2} = \{-1/5, 1/5\}$	
$X_{2,3} = \{-1/5, 1/5\}$	

گام ۴. با توجه به رابطه  $Y_{\tau, m}(i) = \sum_{i=1}^{\tau} X_{\tau, m}(i)$  سری تجمعی هر زیرمجموعه  $X_{\tau, m}$  محاسبه می‌کنیم (جدول ۲ ملاحظه شود).

گام ۵. انحراف بیشترین و کمترین مقدار  $Y_{\tau, m}$  یعنی دامنه  $R$  را به صورت زیر محاسبه می‌نماییم (این مقادیر در جدول ۴ آورده شده‌اند).

$$R_{\tau, m} = \text{Max}_{i=1}^{\tau} Y_{\tau, m}(i) - \text{Min}_{i=1}^{\tau} Y_{\tau, m}(i), \quad \tau = 1, 2, 3, \dots, m.$$

گام ۶. به ازاء هر  $Z_{\tau, m}$  نسبت  $(\frac{R_{\tau, m}}{S_{\tau, m}})$  را محاسبه کرده و سپس به ازای هر مقدار  $\tau$ ،  $(\frac{R}{S})_{\tau}$  را برابر میانگین مقادیر  $(\frac{R_{\tau, m}}{S_{\tau, m}})$  به دست آمده، قرار می‌دهیم (جدول ۴ ملاحظه شود).

جدول ۳. سری تجمعی اعضای زیرمجموعه‌های  $X_{\tau,m}$  در جدول ۲.

Table 3: Cumulative series of members of subsets  $X_{\tau,m}$  in Table 2.

$Y_{\epsilon,1} = \{-6/5, -3/5, -1/5, 1/5, 3/5, 6/5\}$	$Y_{\tau,m}(i) = \sum_{i=1}^{\tau} X_{\tau,m}(i)$
$Y_{\tau,1} = \{-3, -3, 0\}$	
$Y_{\tau,2} = \{-3, -3, 0\}$	
$Y_{\tau,1} = \{-1/5, 0\}$	
$Y_{\tau,1} = \{-1/5, 0\}$	
$Y_{\tau,1} = \{-1/5, 0\}$	

جدول ۴. نسبت‌های  $\frac{R_{\tau,m}}{S_{\tau,m}}$  محاسبه شده از مثال ۱.

Table 4: Ratios  $\frac{R_{\tau,m}}{S_{\tau,m}}$  calculated from Example 1.

$\tau$	زیرمجموعه $Z_{\tau,m}$	$R_{\tau,m}$	$S_{\tau,m}$	$\frac{R_{\tau,m}}{S_{\tau,m}}$	$(\frac{R}{S})_{\tau}$
۶	$Z_{\epsilon,1}$	$R_{\epsilon,1} = 11/5$	$S_{\epsilon,1} = 5/86$	$\frac{R_{\epsilon,1}}{S_{\epsilon,1}} = 1/96$	۱/۹۶
۳	$Z_{\tau,1}$	$R_{\tau,1} = 3$	$S_{\tau,1} \cong 2/45$	$\frac{R_{\tau,1}}{S_{\tau,1}} \cong 1/22$	۱/۲۲
	$Z_{\tau,2}$	$R_{\tau,2} = 3$	$S_{\tau,2} \cong 2/45$	$\frac{R_{\tau,2}}{S_{\tau,2}} \cong 1/22$	
۲	$Z_{\tau,1}$	$R_{\tau,1} = 1/5$	$S_{\tau,1} \cong 1/22$	$\frac{R_{\tau,1}}{S_{\tau,1}} \cong 1/23$	۱/۲۳
	$Z_{\tau,2}$	$R_{\tau,2} = 1/5$	$S_{\tau,2} \cong 1/22$	$\frac{R_{\tau,2}}{S_{\tau,2}} \cong 1/23$	
	$Z_{\tau,3}$	$R_{\tau,3} = 1/5$	$S_{\tau,3} = 1/22$	$\frac{R_{\tau,3}}{S_{\tau,3}} \cong 1/23$	

گام ۷. اکنون مقادیر  $(\log \frac{R}{S})_{\tau}$  بر حسب  $\tau$  که در جدول ۵ آورده شده‌اند، را در یک نمودار رسم می‌کنیم و خط برازش نظیر را تعیین می‌کنیم (شکل ۱).

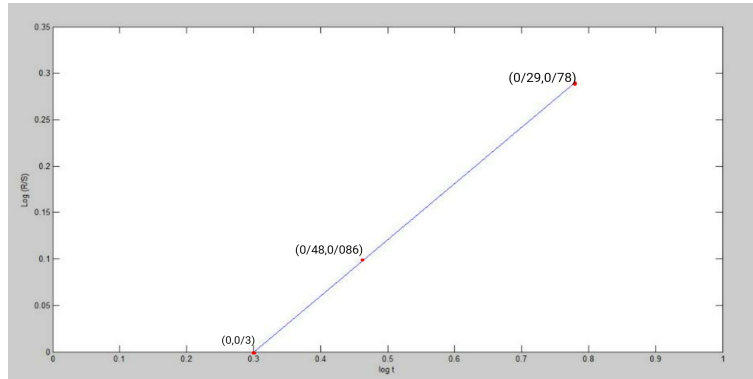
در پایان، شیب خط برازش شده ( $H$ ) را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم.

$$H = \frac{\Delta \log \frac{R}{S}}{\Delta \log \tau} = \frac{\log(\frac{R}{S})_2 - \log(\frac{R}{S})_1}{\log \tau_2 - \log \tau_1} = \frac{0/29 - 0/86}{0/78 - 0/48} = \frac{0/204}{0/3} = 0/68 \Rightarrow H = 0/68.$$

جدول ۵. مقادیر  $\log(\frac{R}{S})_\tau$  بر حسب  $\tau$  در مثال ۱.

Table 5: Values of  $\log(\frac{R}{S})_\tau$  terms of  $\tau$  in Example 1.

$\tau$	$\frac{R}{S}$	$\log \tau$	$\log \frac{R}{S}$
۶	۱/۹۶	۰/۷۸	۰/۲۹
۳	۱/۲۲	۰/۴۸	٪۸۶
۲	۱	۰/۳	۰



شکل ۱. محاسبه مقدار نمای هرست در مثال ۱ با استفاده از الگوریتم ۱.

Figure 1: Calculation of Hurst's exponent value in Example 1 using Algorithm 1

همان‌طور که اشاره شد، برای تشخیص پایداری دستگاه، سه حالت زیر را داریم.

الف) اگر  $0 \leq H < 0/5$ ، آنگاه سری ناپایدار است،

ب) اگر  $H = 0/5$ ، آنگاه جملات دنباله مستقل هستند،

ج) اگر  $0/5 < H \leq 1$ ، آنگاه سری پایدار است.

بر این اساس، چون در این مثال  $H = 0/68$ ، بنابراین سری داده شده پایدار است.

۲.۳. الگوریتم درونیابی فراکتال. اولین بار مفهوم درونیابی فراکتال توسط بارنسلی<sup>۸</sup> برای دستگاه‌هایی از توابع تکرارشونده مانند سری‌های زمانی معرفی گردید [۳]. با توجه به وجود داده‌های غیرثابت نامنظم، برای تقریب داده‌های مفقود شده و همچنین پیش‌بینی روند کوتاه‌مدت داده‌ها، در بیشتر مواقع از درونیابی فراکتال استفاده می‌شود. علاوه بر پیدا کردن نقاط درونیابی، پیدا کردن و انتخاب تابع درونیاب نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در الگوریتم درونیابی فراکتال از توابع درونیابی مختلفی مانند توابع خطی، توابع چندجمله‌ای، توابع‌های کسری، تابع آفین و تابع آفین‌برشی، به عنوان تابع درونیاب می‌توان استفاده کرد. در این بخش، ابتدا سعی خواهد شد که تابع درونیاب مورد استفاده را بیان و شرح دهیم و در ادامه به بیان دو الگوریتم شناخته شده *SVR* و *SVM* که برای پیش‌بینی و تعیین الگوی متناظر با سری زمانی مورد مطالعه به‌کار برده می‌شود، می‌پردازیم. یک تابع آفین‌برشی در حالت کلی به صورت

$$F(X) = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = AX + B,$$

<sup>8</sup>Barnsley

بیان می‌شود، که در آن پارامترهای  $a, c, d, e, f$  اعداد حقیقی هستند. اگر مجموعه داده‌های یک مسئله به صورت

$$\{(x_i, y_i) \in R^2 | i = 0, 1, 2, \dots, N\},$$

باشد که در آن  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ، آنگاه یافتن نقاط درونیابی توسط الگوریتم ۲ صورت می‌پذیرد. مجموعه نقاط مرزی  $\{(x_i^*, y_i^*) \in R^2 | i = 0, 1, 2, \dots, N\}$  و توابع تکرار  $\{w_n | n = 1, 2, \dots, M\}$  را در نظر بگیرید.

$$w_n \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix},$$

که در آن، شرایط آغازین مسئله به صورت

$$w_n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1}^* \\ y_{n-1}^* \end{pmatrix}, \quad w_n \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n^* \\ y_n^* \end{pmatrix},$$

در نظر گرفته می‌شوند. در معادلات بالا  $w_n$ ،  $n$  امین تابع آفین برشی،  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$  مختصات نقاط در فضای دو بعدی،  $d_n$  عامل مقیاس

عمودی ( $d_n \in [-1, 1]$ ) و نقاط  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix}$  به ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی هر زیر بازه هستند. همچنین نقاط  $\begin{pmatrix} x_n^* \\ y_n^* \end{pmatrix}$

و  $\begin{pmatrix} x_{n-1}^* \\ y_{n-1}^* \end{pmatrix}$  مختصات نقاط درونیابی متوالی در مجموعه داده‌ها هستند و ضرایب حقیقی  $f_n, e_n, d_n, c_n, a_n$  پارامترهای تابع آفین برشی متناظر با  $w_n$  هستند که از حل دستگاه (۴) به دست می‌آیند.

$$(۴) \quad \begin{cases} a_n = \frac{x_n^* - x_{n-1}^*}{x_N - x_0}, \\ e_n = \frac{x_N x_{n-1}^* - x_0 x_n^*}{x_N - x_0}, \\ c_n = \frac{[(y_n^* - y_{n-1}^*) - d_n (y_N - y_0)]}{x_N - x_0}, \\ f_n = \frac{[(x_N y_{n-1}^*) - x_0 y_n^*] - d_n (x_N y_0 - x_0 y_N)}{x_N - x_0}. \end{cases}$$

۳.۳. محاسبه عامل مقیاس عمودی. برای به دست آوردن عامل مقیاس عمودی که با  $d_n$  نمایش داده می‌شود، ابتدا اولین و آخرین داده در مجموعه داده‌های مسئله را به عنوان اولین و آخرین نقطه درونیابی در نظر می‌گیریم. سپس این دو نقطه را با یک خط به یکدیگر متصل کرده و فاصله عمودی سایر نقطه‌ها از این خط را به دست می‌آوریم. بیشترین میزان فاصله نقاط از خط واصل، برابر با  $\mu$  تعریف می‌شود. حال فرض کنیم در نقطه  $n$ ام درونیابی، دو نقطه درونیابی متوالی  $(x_n^*, y_n^*)$  و  $(x_{n+1}^*, y_{n+1}^*)$  را با یک خط مستقیم به یکدیگر متصل کرده و فاصله عمودی سایر نقاط بین این دو نقطه از خط واصل را محاسبه کرده و بیشترین فاصله از خط واصل را  $u_n$  در نظر بگیریم. بنابراین، عامل مقیاس عمودی  $n$ ام با استفاده از رابطه (۵) محاسبه می‌شود.

$$(۵) \quad d_n = \frac{u_n}{\mu}.$$

۴.۳. الگوریتم درونیابی فراکتال بهبود یافته. در این الگوریتم از تابع آفین‌برشی به عنوان تابع درونیاب برای پیدا کردن بهترین تابع درونیاب و نقاط درونیاب استفاده می‌شود.

### الگوریتم ۲ الگوریتم درونیابی فراکتال بهبود یافته [۲۶]

ورودی: مجموعه  $points$  با  $n$  نقطه داده‌ای.

خروجی: تعیین مجموعه نقاط درونیابی  $Fpoints$  توابع درونیابی متناظر با مجموعه  $points$ .  
شروع

۱: قرار دهید  $Fpoints := \emptyset$ ،  $Points := \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 | i = 0, 1, 2, \dots, N\}$  و  $k := 0$ .

۲: مجموعه  $Fpoints = Fpoints \cup \{(x_0, y_0), (x_N, y_N)\}$  را به‌روز کنید.

۳: مقدار  $\mu$  را به‌صورت  $\mu := \max\{d_{0,N}(x_i, y_i) | i = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$  محاسبه کنید.

۴: قرار دهید  $j := k + 2$  و  $n := 1$ .

۵:  $u_n$  را به‌صورت  $u_n := \{d_{k,j}(x_i, y_i) | k < i < j\}$  محاسبه کنید.

۶: عامل مقیاس عمودی  $d_n$  را مطابق رابطه  $d_n := \frac{u_n}{\mu}$  محاسبه کنید. دو شرط زیر را برای  $d_n$  بررسی کنید.

۱- اگر  $|d_n| < 1$  آنگاه  $i := j + 1$  و به گام ۵ بروید.

۲- اگر  $|d_n| > 1$  آنگاه با توجه به دستگاه (۴)، سایر پارامترهای تابع آفین را در فاصله بین نقاط  $k, j$  محاسبه کنید.

۷: تابع آفین به‌دست آمده را بر روی تمامی نقاط مجموعه  $points$  اعمال کنید.

۸: انحراف بین نقاط اندازه‌گیری شده  $y_i$  و نقاط شبیه‌سازی شده (خروجی مرحله ۷) را محاسبه کنید.

۹:  $j := j + 1$  قرار دهید. اگر  $j == N$  به مرحله ۱۰ بروید، در غیر این‌صورت به گام ۵ بازگردید.

۱۰: کمترین انحراف به‌دست آمده را انتخاب کنید و نقطه  $(x_i, y_i)$  متناظرش را به مجموعه  $Fpoints$  اضافه کنید.

۱۱: اگر  $i == N$  به مرحله ۱۲ بروید، در غیر این‌صورت قرار دهید  $k := i$  و  $n := n + 1$  و سپس به مرحله ۴ بروید.

۱۲: توابع درونیابی را بر روی مجموعه نقاط  $points$  اعمال کنید و داده‌های جدید را تولید کنید.

پایان

مثال ۲. در این مثال نحوه‌ی محاسبه‌ی نقاط درونیاب و توابع درونیابی برای ۳۱ داده دلخواه زیر و با توجه به الگوریتم ۲، شرح داده می‌شود.

$$points = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 | i = 0, 1, 2, \dots, N\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \dots, (30, 30)\}.$$

گام ۱. مجموعه نقاط درونیاب را برابر تهی قرار می‌دهیم. یعنی  $Fpoints := \emptyset$  و  $k := 0$ .

گام ۲. مجموعه نقاط درونیاب را برابر اولین و آخرین داده  $Fpoints$  قرار می‌دهیم و در هر مرحله این مجموعه را به‌روز می‌کنیم.

$$Fpoints = Fpoints \cup \{(x_0, y_0), (x_N, y_N)\} = Fpoints = \{(0, 0), (30, 30)\}.$$

در گام ۷، تابع آفین به‌دست آمده را برای تمامی نقاط مجموعه  $points$  اعمال می‌کنیم و نقاط شبیه‌سازی شده از مجموعه داده‌ها به‌دست می‌آید. در گام ۸، انحراف بین نقاط داده  $y_i$  و نقاط شبیه‌سازی شده، یعنی  $(y_i - y_{i-1})$  را محاسبه می‌کنیم و برای به‌دست آوردن نقطه‌ی درونیاب بعدی به گام ۹ می‌رویم. به همین منوال، تمام نقاط درونیابی را تعیین و فرایند را تکرار می‌کنیم. انحراف بین داده‌های اصلی و شبیه‌سازی شده را به‌دست می‌آوریم. بهترین تابع درونیاب، تابعی است که کمترین انحراف را داشته

جدول ۶. تعداد  $n = 5$  تکرار از گام‌های ۱ تا ۶ الگوریتم ۲ در مثال ۲.

Table 6:  $n = 5$  iterations of steps 1 to 6 of Algorithm 2 in Example 2.

$n$	$Fpoints$	$u_n$	$d_n$	$a_n$	$c_n$	$e_n$	$f_n$
۱	$\{(0, 0), (30, 30)\}$	$u_1 = -3$	$d_1 = \frac{1}{10}$	$a_1 = \frac{1}{10}$	$c_1 = 0$	$e_1 = 0$	$f_1 = 0$
۲	$\{(0, 0), (3, 3), (30, 30)\}$	$u_2 = -5$	$d_2 = \frac{1}{6}$	$a_2 = \frac{1}{6}$	$c_2 = 0$	$e_2 = 0$	$f_2 = 0$
۳	$\{(0, 0), (3, 3), (5, 5), (30, 30)\}$	$u_3 = -6$	$d_3 = \frac{1}{5}$	$a_3 = \frac{1}{5}$	$c_3 = 0$	$e_3 = 0$	$f_3 = 0$
۴	$\{(0, 0), (3, 3), (5, 5), (6, 6), (30, 30)\}$	$u_4 = -10$	$d_4 = \frac{1}{3}$	$a_4 = \frac{1}{3}$	$c_4 = 0$	$e_4 = 0$	$f_4 = 0$
۵	$\{(0, 0), (3, 3), (5, 5), (6, 6), (10, 10), (30, 30)\}$	$u_5 = -15$	$d_5 = \frac{1}{2}$	$a_5 = \frac{1}{2}$	$c_5 = 0$	$e_5 = 0$	$f_5 = 0$

باشد (جدول ۷ ملاحظه شود). با توجه به اینکه کمترین فاصله بین داده‌های اصلی و نقاط درونیابی شده (شبه سازی شده) در  $w_5$  اتفاق افتاده است، بنابراین تابع  $w_5$  به‌عنوان تابع درونیاب انتخاب می‌شود.

جدول ۷. اعمال  $w_n$  بر روی نقاط مثال ۲ و به‌دست آوردن  $y_i - y_{n,i}$ .

Table 7: Implementation of  $w_n$  on the points of Example 2 and obtain  $y_i - y_{n,i}$ .

$w_n$	$y_i - y_{n,i}$
$w_1 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{9}{10}, \frac{18}{10}, \frac{27}{10}, \frac{36}{10}, \frac{45}{10}, \frac{54}{10}, \frac{63}{10}, \frac{72}{10}, \frac{81}{10}, \frac{90}{10}, \frac{99}{10}, \frac{108}{10}, \frac{117}{10}, \frac{126}{10}, \frac{135}{10}, \frac{144}{10}, \frac{153}{10}, \frac{162}{10}, \frac{171}{10}, \frac{180}{10}, \frac{189}{10}, \frac{198}{10}, \frac{207}{10}, \frac{216}{10}, \frac{225}{10}, \frac{234}{10}, \frac{243}{10}, \frac{252}{10}, \frac{261}{10}, \frac{270}{10}, \frac{279}{10}, \frac{288}{10}, \frac{297}{10}, \frac{306}{10}, \frac{315}{10}, \frac{324}{10}, \frac{333}{10}, \frac{342}{10}, \frac{351}{10}, \frac{360}{10}, \frac{369}{10}, \frac{378}{10}, \frac{387}{10}, \frac{396}{10}, \frac{405}{10}, \frac{414}{10}, \frac{423}{10}, \frac{432}{10}, \frac{441}{10}, \frac{450}{10}, \frac{459}{10}, \frac{468}{10}, \frac{477}{10}, \frac{486}{10}, \frac{495}{10}, \frac{504}{10}, \frac{513}{10}, \frac{522}{10}, \frac{531}{10}, \frac{540}{10}, \frac{549}{10}, \frac{558}{10}, \frac{567}{10}, \frac{576}{10}, \frac{585}{10}, \frac{594}{10}, \frac{603}{10}, \frac{612}{10}, \frac{621}{10}, \frac{630}{10}, \frac{639}{10}, \frac{648}{10}, \frac{657}{10}, \frac{666}{10}, \frac{675}{10}, \frac{684}{10}, \frac{693}{10}, \frac{702}{10}, \frac{711}{10}, \frac{720}{10}, \frac{729}{10}, \frac{738}{10}, \frac{747}{10}, \frac{756}{10}, \frac{765}{10}, \frac{774}{10}, \frac{783}{10}, \frac{792}{10}, \frac{801}{10}, \frac{810}{10}, \frac{819}{10}, \frac{828}{10}, \frac{837}{10}, \frac{846}{10}, \frac{855}{10}, \frac{864}{10}, \frac{873}{10}, \frac{882}{10}, \frac{891}{10}, \frac{900}{10}, \frac{909}{10}, \frac{918}{10}, \frac{927}{10}, \frac{936}{10}, \frac{945}{10}, \frac{954}{10}, \frac{963}{10}, \frac{972}{10}, \frac{981}{10}, \frac{990}{10}, \frac{999}{10}, \frac{1008}{10}, \frac{1017}{10}, \frac{1026}{10}, \frac{1035}{10}, \frac{1044}{10}, \frac{1053}{10}, \frac{1062}{10}, \frac{1071}{10}, \frac{1080}{10}, \frac{1089}{10}, \frac{1098}{10}, \frac{1107}{10}, \frac{1116}{10}, \frac{1125}{10}, \frac{1134}{10}, \frac{1143}{10}, \frac{1152}{10}, \frac{1161}{10}, \frac{1170}{10}, \frac{1179}{10}, \frac{1188}{10}, \frac{1197}{10}, \frac{1206}{10}, \frac{1215}{10}, \frac{1224}{10}, \frac{1233}{10}, \frac{1242}{10}, \frac{1251}{10}, \frac{1260}{10}, \frac{1269}{10}, \frac{1278}{10}, \frac{1287}{10}, \frac{1296}{10}, \frac{1305}{10}, \frac{1314}{10}, \frac{1323}{10}, \frac{1332}{10}, \frac{1341}{10}, \frac{1350}{10}, \frac{1359}{10}, \frac{1368}{10}, \frac{1377}{10}, \frac{1386}{10}, \frac{1395}{10}, \frac{1404}{10}, \frac{1413}{10}, \frac{1422}{10}, \frac{1431}{10}, \frac{1440}{10}, \frac{1449}{10}, \frac{1458}{10}, \frac{1467}{10}, \frac{1476}{10}, \frac{1485}{10}, \frac{1494}{10}, \frac{1503}{10}, \frac{1512}{10}, \frac{1521}{10}, \frac{1530}{10}, \frac{1539}{10}, \frac{1548}{10}, \frac{1557}{10}, \frac{1566}{10}, \frac{1575}{10}, \frac{1584}{10}, \frac{1593}{10}, \frac{1602}{10}, \frac{1611}{10}, \frac{1620}{10}, \frac{1629}{10}, \frac{1638}{10}, \frac{1647}{10}, \frac{1656}{10}, \frac{1665}{10}, \frac{1674}{10}, \frac{1683}{10}, \frac{1692}{10}, \frac{1701}{10}, \frac{1710}{10}, \frac{1719}{10}, \frac{1728}{10}, \frac{1737}{10}, \frac{1746}{10}, \frac{1755}{10}, \frac{1764}{10}, \frac{1773}{10}, \frac{1782}{10}, \frac{1791}{10}, \frac{1800}{10}, \frac{1809}{10}, \frac{1818}{10}, \frac{1827}{10}, \frac{1836}{10}, \frac{1845}{10}, \frac{1854}{10}, \frac{1863}{10}, \frac{1872}{10}, \frac{1881}{10}, \frac{1890}{10}, \frac{1899}{10}, \frac{1908}{10}, \frac{1917}{10}, \frac{1926}{10}, \frac{1935}{10}, \frac{1944}{10}, \frac{1953}{10}, \frac{1962}{10}, \frac{1971}{10}, \frac{1980}{10}, \frac{1989}{10}, \frac{1998}{10}, \frac{2007}{10}, \frac{2016}{10}, \frac{2025}{10}, \frac{2034}{10}, \frac{2043}{10}, \frac{2052}{10}, \frac{2061}{10}, \frac{2070}{10}, \frac{2079}{10}, \frac{2088}{10}, \frac{2097}{10}, \frac{2106}{10}, \frac{2115}{10}, \frac{2124}{10}, \frac{2133}{10}, \frac{2142}{10}, \frac{2151}{10}, \frac{2160}{10}, \frac{2169}{10}, \frac{2178}{10}, \frac{2187}{10}, \frac{2196}{10}, \frac{2205}{10}, \frac{2214}{10}, \frac{2223}{10}, \frac{2232}{10}, \frac{2241}{10}, \frac{2250}{10}, \frac{2259}{10}, \frac{2268}{10}, \frac{2277}{10}, \frac{2286}{10}, \frac{2295}{10}, \frac{2304}{10}, \frac{2313}{10}, \frac{2322}{10}, \frac{2331}{10}, \frac{2340}{10}, \frac{2349}{10}, \frac{2358}{10}, \frac{2367}{10}, \frac{2376}{10}, \frac{2385}{10}, \frac{2394}{10}, \frac{2403}{10}, \frac{2412}{10}, \frac{2421}{10}, \frac{2430}{10}, \frac{2439}{10}, \frac{2448}{10}, \frac{2457}{10}, \frac{2466}{10}, \frac{2475}{10}, \frac{2484}{10}, \frac{2493}{10}, \frac{2502}{10}, \frac{2511}{10}, \frac{2520}{10}, \frac{2529}{10}, \frac{2538}{10}, \frac{2547}{10}, \frac{2556}{10}, \frac{2565}{10}, \frac{2574}{10}, \frac{2583}{10}, \frac{2592}{10}, \frac{2601}{10}, \frac{2610}{10}, \frac{2619}{10}, \frac{2628}{10}, \frac{2637}{10}, \frac{2646}{10}, \frac{2655}{10}, \frac{2664}{10}, \frac{2673}{10}, \frac{2682}{10}, \frac{2691}{10}, \frac{2700}{10}, \frac{2709}{10}, \frac{2718}{10}, \frac{2727}{10}, \frac{2736}{10}, \frac{2745}{10}, \frac{2754}{10}, \frac{2763}{10}, \frac{2772}{10}, \frac{2781}{10}, \frac{2790}{10}, \frac{2799}{10}, \frac{2808}{10}, \frac{2817}{10}, \frac{2826}{10}, \frac{2835}{10}, \frac{2844}{10}, \frac{2853}{10}, \frac{2862}{10}, \frac{2871}{10}, \frac{2880}{10}, \frac{2889}{10}, \frac{2898}{10}, \frac{2907}{10}, \frac{2916}{10}, \frac{2925}{10}, \frac{2934}{10}, \frac{2943}{10}, \frac{2952}{10}, \frac{2961}{10}, \frac{2970}{10}, \frac{2979}{10}, \frac{2988}{10}, \frac{2997}{10}, \frac{3006}{10}, \frac{3015}{10}, \frac{3024}{10}, \frac{3033}{10}, \frac{3042}{10}, \frac{3051}{10}, \frac{3060}{10}, \frac{3069}{10}, \frac{3078}{10}, \frac{3087}{10}, \frac{3096}{10}, \frac{3105}{10}, \frac{3114}{10}, \frac{3123}{10}, \frac{3132}{10}, \frac{3141}{10}, \frac{3150}{10}, \frac{3159}{10}, \frac{3168}{10}, \frac{3177}{10}, \frac{3186}{10}, \frac{3195}{10}, \frac{3204}{10}, \frac{3213}{10}, \frac{3222}{10}, \frac{3231}{10}, \frac{3240}{10}, \frac{3249}{10}, \frac{3258}{10}, \frac{3267}{10}, \frac{3276}{10}, \frac{3285}{10}, \frac{3294}{10}, \frac{3303}{10}, \frac{3312}{10}, \frac{3321}{10}, \frac{3330}{10}, \frac{3339}{10}, \frac{3348}{10}, \frac{3357}{10}, \frac{3366}{10}, \frac{3375}{10}, \frac{3384}{10}, \frac{3393}{10}, \frac{3402}{10}, \frac{3411}{10}, \frac{3420}{10}, \frac{3429}{10}, \frac{3438}{10}, \frac{3447}{10}, \frac{3456}{10}, \frac{3465}{10}, \frac{3474}{10}, \frac{3483}{10}, \frac{3492}{10}, \frac{3501}{10}, \frac{3510}{10}, \frac{3519}{10}, \frac{3528}{10}, \frac{3537}{10}, \frac{3546}{10}, \frac{3555}{10}, \frac{3564}{10}, \frac{3573}{10}, \frac{3582}{10}, \frac{3591}{10}, \frac{3600}{10}, \frac{3609}{10}, \frac{3618}{10}, \frac{3627}{10}, \frac{3636}{10}, \frac{3645}{10}, \frac{3654}{10}, \frac{3663}{10}, \frac{3672}{10}, \frac{3681}{10}, \frac{3690}{10}, \frac{3699}{10}, \frac{3708}{10}, \frac{3717}{10}, \frac{3726}{10}, \frac{3735}{10}, \frac{3744}{10}, \frac{3753}{10}, \frac{3762}{10}, \frac{3771}{10}, \frac{3780}{10}, \frac{3789}{10}, \frac{3798}{10}, \frac{3807}{10}, \frac{3816}{10}, \frac{3825}{10}, \frac{3834}{10}, \frac{3843}{10}, \frac{3852}{10}, \frac{3861}{10}, \frac{3870}{10}, \frac{3879}{10}, \frac{3888}{10}, \frac{3897}{10}, \frac{3906}{10}, \frac{3915}{10}, \frac{3924}{10}, \frac{3933}{10}, \frac{3942}{10}, \frac{3951}{10}, \frac{3960}{10}, \frac{3969}{10}, \frac{3978}{10}, \frac{3987}{10}, \frac{3996}{10}, \frac{4005}{10}, \frac{4014}{10}, \frac{4023}{10}, \frac{4032}{10}, \frac{4041}{10}, \frac{4050}{10}, \frac{4059}{10}, \frac{4068}{10}, \frac{4077}{10}, \frac{4086}{10}, \frac{4095}{10}, \frac{4104}{10}, \frac{4113}{10}, \frac{4122}{10}, \frac{4131}{10}, \frac{4140}{10}, \frac{4149}{10}, \frac{4158}{10}, \frac{4167}{10}, \frac{4176}{10}, \frac{4185}{10}, \frac{4194}{10}, \frac{4203}{10}, \frac{4212}{10}, \frac{4221}{10}, \frac{4230}{10}, \frac{4239}{10}, \frac{4248}{10}, \frac{4257}{10}, \frac{4266}{10}, \frac{4275}{10}, \frac{4284}{10}, \frac{4293}{10}, \frac{4302}{10}, \frac{4311}{10}, \frac{4320}{10}, \frac{4329}{10}, \frac{4338}{10}, \frac{4347}{10}, \frac{4356}{10}, \frac{4365}{10}, \frac{4374}{10}, \frac{4383}{10}, \frac{4392}{10}, \frac{4401}{10}, \frac{4410}{10}, \frac{4419}{10}, \frac{4428}{10}, \frac{4437}{10}, \frac{4446}{10}, \frac{4455}{10}, \frac{4464}{10}, \frac{4473}{10}, \frac{4482}{10}, \frac{4491}{10}, \frac{4500}{10}, \frac{4509}{10}, \frac{4518}{10}, \frac{4527}{10}, \frac{4536}{10}, \frac{4545}{10}, \frac{4554}{10}, \frac{4563}{10}, \frac{4572}{10}, \frac{4581}{10}, \frac{4590}{10}, \frac{4599}{10}, \frac{4608}{10}, \frac{4617}{10}, \frac{4626}{10}, \frac{4635}{10}, \frac{4644}{10}, \frac{4653}{10}, \frac{4662}{10}, \frac{4671}{10}, \frac{4680}{10}, \frac{4689}{10}, \frac{4698}{10}, \frac{4707}{10}, \frac{4716}{10}, \frac{4725}{10}, \frac{4734}{10}, \frac{4743}{10}, \frac{4752}{10}, \frac{4761}{10}, \frac{4770}{10}, \frac{4779}{10}, \frac{4788}{10}, \frac{4797}{10}, \frac{4806}{10}, \frac{4815}{10}, \frac{4824}{10}, \frac{4833}{10}, \frac{4842}{10}, \frac{4851}{10}, \frac{4860}{10}, \frac{4869}{10}, \frac{4878}{10}, \frac{4887}{10}, \frac{4896}{10}, \frac{4905}{10}, \frac{4914}{10}, \frac{4923}{10}, \frac{4932}{10}, \frac{4941}{10}, \frac{4950}{10}, \frac{4959}{10}, \frac{4968}{10}, \frac{4977}{10}, \frac{4986}{10}, \frac{4995}{10}, \frac{5004}{10}, \frac{5013}{10}, \frac{5022}{10}, \frac{5031}{10}, \frac{5040}{10}, \frac{5049}{10}, \frac{5058}{10}, \frac{5067}{10}, \frac{5076}{10}, \frac{5085}{10}, \frac{5094}{10}, \frac{5103}{10}, \frac{5112}{10}, \frac{5121}{10}, \frac{5130}{10}, \frac{5139}{10}, \frac{5148}{10}, \frac{5157}{10}, \frac{5166}{10}, \frac{5175}{10}, \frac{5184}{10}, \frac{5193}{10}, \frac{5202}{10}, \frac{5211}{10}, \frac{5220}{10}, \frac{5229}{10}, \frac{5238}{10}, \frac{5247}{10}, \frac{5256}{10}, \frac{5265}{10}, \frac{5274}{10}, \frac{5283}{10}, \frac{5292}{10}, \frac{5301}{10}, \frac{5310}{10}, \frac{5319}{10}, \frac{5328}{10}, \frac{5337}{10}, \frac{5346}{10}, \frac{5355}{10}, \frac{5364}{10}, \frac{5373}{10}, \frac{5382}{10}, \frac{5391}{10}, \frac{5400}{10}, \frac{5409}{10}, \frac{5418}{10}, \frac{5427}{10}, \frac{5436}{10}, \frac{5445}{10}, \frac{5454}{10}, \frac{5463}{10}, \frac{5472}{10}, \frac{5481}{10}, \frac{5490}{10}, \frac{5499}{10}, \frac{5508}{10}, \frac{5517}{10}, \frac{5526}{10}, \frac{5535}{10}, \frac{5544}{10}, \frac{5553}{10}, \frac{5562}{10}, \frac{5571}{10}, \frac{5580}{10}, \frac{5589}{10}, \frac{5598}{10}, \frac{5607}{10}, \frac{5616}{10}, \frac{5625}{10}, \frac{5634}{10}, \frac{5643}{10}, \frac{5652}{10}, \frac{5661}{10}, \frac{5670}{10}, \frac{5679}{10}, \frac{5688}{10}, \frac{5697}{10}, \frac{5706}{10}, \frac{5715}{10}, \frac{5724}{10}, \frac{5733}{10}, \frac{5742}{10}, \frac{5751}{10}, \frac{5760}{10}, \frac{5769}{10}, \frac{5778}{10}, \frac{5787}{10}, \frac{5796}{10}, \frac{5805}{10}, \frac{5814}{10}, \frac{5823}{10}, \frac{5832}{10}, \frac{5841}{10}, \frac{5850}{10}, \frac{5859}{10}, \frac{5868}{10}, \frac{5877}{10}, \frac{5886}{10}, \frac{5895}{10}, \frac{5904}{10}, \frac{5913}{10}, \frac{5922}{10}, \frac{5931}{10}, \frac{5940}{10}, \frac{5949}{10}, \frac{5958}{10}, \frac{5967}{10}, \frac{5976}{10}, \frac{5985}{10}, \frac{5994}{10}, \frac{6003}{10}, \frac{6012}{10}, \frac{6021}{10}, \frac{6030}{10}, \frac{6039}{10}, \frac{6048}{10}, \frac{6057}{10}, \frac{6066}{10}, \frac{6075}{10}, \frac{6084}{10}, \frac{6093}{10}, \frac{6102}{10}, \frac{6111}{10}, \frac{6120}{10}, \frac{6129}{10}, \frac{6138}{10}, \frac{6147}{10}, \frac{6156}{10}, \frac{6165}{10}, \frac{6174}{10}, \frac{6183}{10}, \frac{6192}{10}, \frac{6201}{10}, \frac{6210}{10}, \frac{6219}{10}, \frac{6228}{10}, \frac{6237}{10}, \frac{6246}{10}, \frac{6255}{10}, \frac{6264}{10}, \frac{6273}{10}, \frac{6282}{10}, \frac{6291}{10}, \frac{6300}{10}, \frac{6309}{10}, \frac{6318}{10}, \frac{6327}{10}, \frac{6336}{10}, \frac{6345}{10}, \frac{6354}{10}, \frac{6363}{10}, \frac{6372}{10}, \frac{6381}{10}, \frac{6390}{10}, \frac{6399}{10}, \frac{6408}{10}, \frac{6417}{10}, \frac{6426}{10}, \frac{6435}{10}, \frac{6444}{10}, \frac{6453}{10}, \frac{6462}{10}, \frac{6471}{10}, \frac{6480}{10}, \frac{6489}{10}, \frac{6498}{10}, \frac{6507}{10}, \frac{6516}{10}, \frac{6525}{10}, \frac{6534}{10}, \frac{6543}{10}, \frac{6552}{10}, \frac{6561}{10}, \frac{6570}{10}, \frac{6579}{10}, \frac{6588}{10}, \frac{6597}{10}, \frac{6606}{10}, \frac{6615}{10}, \frac{6624}{10}, \frac{6633}{10}, \frac{6642}{10}, \frac{6651}{10}, \frac{6660}{10}, \frac{6669}{10}, \frac{6678}{10}, \frac{6687}{10}, \frac{6696}{10}, \frac{6705}{10}, \frac{6714}{10}, \frac{6723}{10}, \frac{6732}{10}, \frac{6741}{10}, \frac{6750}{10}, \frac{6759}{10}, \frac{6768}{10}, \frac{6777}{10}, \frac{6786}{10}, \frac{6795}{10}, \frac{6804}{10}, \frac{6813}{10}, \frac{6822}{10}, \frac{6831}{10}, \frac{6840}{10}, \frac{6849}{10}, \frac{6858}{10}, \frac{6867}{10}, \frac{6876}{10}, \frac{6885}{10}, \frac{6894}{10}, \frac{6903}{10}, \frac{6912}{10}, \frac{6921}{10}, \frac{6930}{10}, \frac{6939}{10}, \frac{6948}{10}, \frac{6957}{10}, \frac{6966}{10}, \frac{6975}{10}, \frac{6984}{10}, \frac{6993}{10}, \frac{7002}{10}, \frac{7011}{10}, \frac{7020}{10}, \frac{7029}{10}, \frac{7038}{10}, \frac{7047}{10}, \frac{7056}{10}, \frac{7065}{10}, \frac{7074}{10}, \frac{7083}{10}, \frac{7092}{10}, \frac{7101}{10}, \frac{7110}{10}, \frac{7119}{10}, \frac{7128}{10}, \frac{7137}{10}, \frac{7146}{10}, \frac{7155}{10}, \frac{7164}{10}, \frac{7173}{10}, \frac{7182}{10}, \frac{7191}{10}, \frac{7200}{10}, \frac{7209}{10}, \frac{7218}{10}, \frac{7227}{10}, \frac{7236}{10}, \frac{7245}{10}, \frac{7254}{10}, \frac{7263}{10}, \frac{7272}{10}, \frac{7281}{10}, \frac{7290}{10}, \frac{7299}{10}, \frac{7308}{10}, \frac{7317}{10}, \frac{7326}{10}, \frac{7335}{10}, \frac{7344}{10}, \frac{7353}{10}, \frac{7362}{10}, \frac{7371}{10}, \frac{7380}{10}, \frac{7389}{10}, \frac{7398}{10}, \frac{7407}{10}, \frac{7416}{10}, \frac{7425}{10}, \frac{7434}{10}, \frac{7443}{10}, \frac{7452}{10}, \frac{7461}{10}, \frac{7470}{10}, \frac{7479}{10}, \frac{7488}{10}, \frac{7497}{10}, \frac{7506}{10}, \frac{7515}{10}, \frac{7524}{10}, \frac{7533}{10}, \frac{7542}{10}, \frac{7551}{10}, \frac{7560}{10}, \frac{7569}{10}, \frac{7578}{10}, \frac{7587}{10}, \frac{7596}{10}, \frac{7605}{10}, \frac{7614}{10}, \frac{7623}{10}, \frac{7632}{10}, \frac{7641}{10}, \frac{7650}{10}, \frac{7659}{10}, \frac{7668}{10}, \frac{7677}{10}, \frac{7686}{10}, \frac{7695}{10}, \frac{7704}{10}, \frac{7713}{10}, \frac{7722}{10}, \frac{7731}{10}, \frac{7740}{10}, \frac{7749}{10}, \frac{7758}{10}, \frac{7767}{10}, \frac{7776}{10}, \frac{7785}{10}, \frac{7794}{10}, \frac{7803}{10}, \frac{7812}{10}, \frac{7821}{10}, \frac{7830}{10}, \frac{7839}{10}, \frac{7848}{10}, \frac{7857}{10}, \frac{7866}{10}, \frac{7875}{10}, \frac{7884}{10}, \frac{7893}{10}, \frac{7902}{10}, \frac{7911}{10}, \frac{7920}{10}, \frac{7929}{10}, \frac{7938}{10}, \frac{7947}{10}, \frac{7956}{10}, \frac{7965}{10}, \frac{7974}{10}, \frac{7983}{10}, \frac{7992}{10}, \frac{8001}{10}, \frac{8010}{10}, \frac{8019}{10}, \frac{8028}{10}, \frac{8037}{10}, \frac{8046}{10}, \frac{8055}{10}, \frac{8064}{10}, \frac{8073}{10}, \frac{8082}{10}, \frac{8091}{10}, \frac{8100}{10}, \frac{8109}{10}, \frac{8118}{10}, \frac{8127}{10}, \frac{8136}{10}, \frac{8145}{10}, \frac{8154}{10}, \frac{8163}{10}, \frac{8172}{10}, \frac{8181}{10}, \frac{8190}{10}, \frac{8199}{10}, \frac{8208}{10}, \frac{8217}{10}, \frac{8226}{10}, \frac{8235}{10}, \frac{8244}{10}, \frac{8253}{10}, \frac{8262}{10}, \frac{8271}{10}, \frac{8280}{10}, \frac{8289}{10}, \frac{8298}{10}, \frac{8307}{10}, \frac{8316}{10}, \frac{8325}{10}, \frac{8334}{10}, \frac{8343}{10}, \frac{8352}{10}, \frac{8361}{10}, \frac{8370}{10}, \frac{8379}{10}, \frac{8388}{10}, \frac{8397}{10}, \frac{8406}{10}, \frac{8415}{10}, \frac{8424}{10}, \frac{8433}{10}, \frac{8442}{10}, \frac{8451}{10}, \frac{8460}{10}, \frac{8469}{10}, \frac{8478}{10}, \frac{8487}{10}, \frac{8496}{10}, \frac{8505}{10}, \frac{8514}{10}, \frac{8523}{10}, \frac{8532}{10}, \frac{8541}{10}, \frac{8550}{10}, \frac{8559}{10}, \frac{8568}{10}, \frac{8577}{10}, \frac{8586}{10}, \frac{8595}{10}, \frac{8604}{10}, \frac{8613}{10}, \frac{8622}{10}, \frac{8631}{10}, \frac{8640}{10}, \frac{8649}{10}, \frac{8658}{10}, \frac{8667}{10}, \frac{8676}{10}, \frac{8685}{10}, \frac{8694}{10}, \frac{8703}{10}, \frac{8712}{10}, \frac{8721}{10}, \frac{8730}{10}, \frac{8739}{10}, \frac{8748}{10}, \frac{8757}{10}, \frac{8766}{10}, \frac{8775}{10}, \frac{8784}{10}, \frac{8793}{10}, \frac{8802}{10}, \frac{8811}{10}, \frac{8820}{10}, \frac{8829}{10}, \frac{8838}{10}, \frac{8847}{10}, \frac{8856}{10}, \frac{8865}{10},$

۵.۳. الگوریتم ماشین بردار پشتیبان. الگوریتم ماشین بردار پشتیبان یا  $SVM$  برای پیدا کردن ابرصفحه جدا کننده از مفهومی چون بردارهای پشتیبان و حاشیه‌ها استفاده می‌کند. هر چند الگوریتم  $SVM$  به محاسبات پیچیده نیاز دارد و حتی سریع‌ترین آن‌ها بسیار کند عمل می‌کنند، ولی پیچیدگی محاسباتی این الگوریتم‌ها به بُعدهای فضای ورودی بستگی ندارد و نتیجه نهایی آن‌ها از دقت بالایی برخوردار است. این الگوریتم‌ها به‌طور خودکار اندازه مدل را انتخاب می‌کند و برای مدل یادگیری شده، توصیف فشرده‌ای را ارائه می‌دهند. از این الگوریتم‌ها علاوه بر دسته‌بندی، می‌توان برای تقریب‌سازی نیز استفاده نمود [۲۳]. از کاربردهای عملی این الگوریتم‌ها می‌توان به تشخیص الگو، پردازش تصویر، داده‌کاوی و کاربردهای پزشکی اشاره نمود. در حالت کلی مدل‌های  $SVM$  به دو گروه تقسیم می‌شوند [۲۴]:

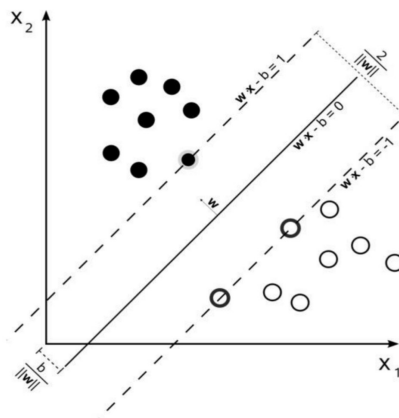
(الف) مدل طبقه‌بندی  $SVM$ ،

(ب) مدل رگرسیون بردارهای پشتیبان یا  $SVR$ .

از مدل طبقه‌بندی  $SVM$  جهت حل مسائل طبقه‌بندی داده‌هایی که در کلاس‌های مختلف قرار می‌گیرند، استفاده می‌گردد و مدل  $SVR$  در حل تقریبی مسائل بهینه‌سازی، مانند مسائل پیش‌بینی، کاربرد دارد. فرض کنیم مجموعه داده‌های آزمایش  $D$  شامل  $n$  عضو (نقطه) باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D = \{(x_i, y_i) | x_i \in R^p, y_i \in \{1, -1\} \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

هدف پیدا کردن ابرصفحه جداکننده با بیشترین فاصله از نقاط حاشیه‌ای است که نقاط با  $y_i$  برابر با ۱ را از نقاط با  $y_i$  برابر با -۱ جدا نماید.



شکل ۲. پیدا کردن یک ابرصفحه برای تفکیک داده‌ها [۲۳].

Figure 2: Hyperplane to separate the data [23].

شایان ذکر است که چنانچه الگوریتم  $SVM$  در زمینه رگرسیون به‌کار برده شود، نام رگرسیون بردار پشتیبان  $SVR$  برای آن به‌کار می‌رود. تفاوت اصلی  $SVM$  و  $SVR$  در نوع خروجی آن‌ها است. فرض کنیم مقدار خروجی  $SVM$  برابر با  $y$  باشد، پس  $y$  فقط مقادیر ۱ و -۱ را اختیار می‌کند (در طبقه‌بندی دو کلاسه)، ولی در  $SVR$  متغیر  $y$  می‌تواند هر مقدار حقیقی را به خود اختصاص دهد.

$$(۶) \quad \begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{x}_i - b \geq 1, & y_i = 1, \\ \vec{w} \cdot \vec{x}_i - b \leq -1, & y_i = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i(\vec{w} \cdot \vec{x}_i - b) \geq 1, & 1 \leq i \leq n, \\ y_i \in \{1, -1\}. \end{cases}$$

۶.۳. الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان. الگوریتم رگرسیون بردار پشتیبان یا  $SVR$  مستقیماً از  $SVM$  که یک نظریه آماری از وپنیک<sup>۹</sup> است، گرفته شده است [۲۰]. این روش جزء روش‌های نظارت شده است که در آن همانند دیگر روش‌های یادگیری ماشین، مراحل ساخت مدل یادگیری شامل مرحله اول آموزش و مرحله دوم آزمایش می‌باشد. در مرحله آموزش، ابتدا مدل آموزش دیده می‌شود و سپس مدل حاصل با استفاده از داده‌های آزمایشی ارزیابی می‌شود. برای توضیح بیشتر، فرض کنیم داده‌ها در مجموعه  $D$  داده شده باشند:

$$D = \{(x_i, y_i) | x_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{1, -1\}, i = 1, 2, \dots, n\},$$

که  $\mathbb{R}^d$  نشان دهنده فضای ورودی می‌باشد ( $d$  بعد فضا)،  $x_i$  برداری در فضای ورودی و  $y_i$  مقدار خروجی متناظر با آن می‌باشد. هدف الگوریتم  $SVR$  پیدا کردن تابعی مانند  $f(x)$  است به نحوی که به ازای هر نمونه‌ی آموزشی  $x_i$ ، فاصله  $f(x_i)$  از  $y_i$  حداکثر برابر  $\varepsilon$  باشد. فرض کنیم

$$(۷) \quad f(x) = w^T \cdot x + b, \quad x, w \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}.$$

در رابطه (۷)، متغیرهای  $w$  و  $b$  باید به نحوی طراحی شوند که نه تنها به ازای تمامی نمونه‌های آموزشی  $x_i$  انحراف مقدار  $f(x_i)$  از  $y_i$  حداکثر به میزان  $\varepsilon$  باشد، بلکه میزان پیچیدگی محاسباتی مربوطه نیز کمینه شود. برای تحقق این هدف، به کمینه سازی  $\|w\|$  یا  $\|w\|^2 = w^T \cdot w$  می‌توان اشاره کرد [۱]. به عبارت دیگر، هدف در  $SVR$  کمینه‌سازی نرم  $\|w\|$  است. بنابراین مسئله کمینه‌سازی (۸) مطرح می‌گردد:

$$(۸) \quad \begin{aligned} & \min \frac{\|w\|^2}{2} \\ & \text{s.t.} \\ & \begin{cases} y_i - f(x_i) \leq \varepsilon, & i = 0, 1, 2, \dots, N, \\ f(x_i) - y_i \leq \varepsilon, & i = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases} \end{aligned}$$

در این مقاله، فرض می‌کنیم فضای جواب‌های شدنی مسئله (۸) ناتهی باشد و تابع  $f(x)$  داده‌های آموزشی  $(x_i, y_i)$  را با دقت  $\varepsilon$  تخمین می‌زند. البته در بعضی مواقع امکان دارد میزان انحراف برخی از داده‌های آموزشی از مقدار حاشیه  $\varepsilon$  بیشتر شود که برای پوشش قرار دادن تمام داده‌های آموزشی و بنابراین ناتهی شدن مسئله (۸)، تابع جریمه  $L_\varepsilon(y_i, f(x_i))$  را به صورت

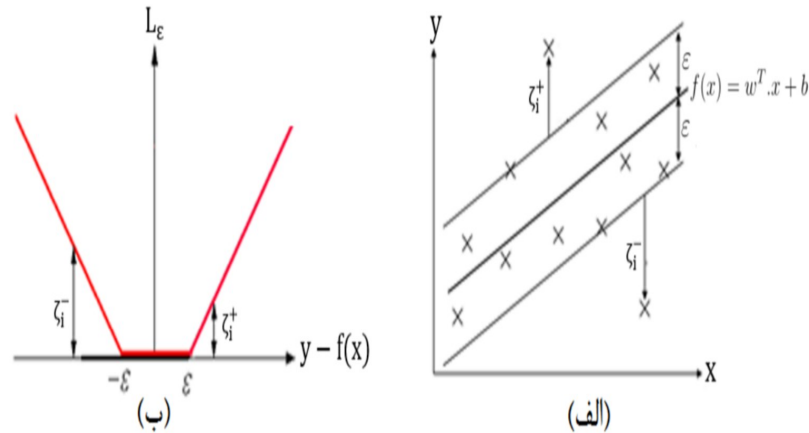
$$(۹) \quad L_\varepsilon(y_i, f(x_i)) = \begin{cases} 0, & |y_i - f(x_i)| \leq \varepsilon, \\ |y_i - f(x_i)| - \varepsilon, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. اکنون برای داده‌هایی که  $|y_i - f(x_i)| > \varepsilon$ ، متغیرهای کمکی  $\zeta_i^+$  و  $\zeta_i^-$  را به صورت روابط (۱۰) تعریف می‌کنیم (به شکل ۳ توجه شود).

$$(۱۰) \quad \begin{aligned} y_i - f(x_i) \geq \varepsilon & \Rightarrow \zeta_i^+ = y_i - f(x_i) - \varepsilon, \\ y_i - f(x_i) \leq -\varepsilon & \Rightarrow \zeta_i^- = f(x_i) - y_i - \varepsilon. \end{aligned}$$

ابرفضه‌هایی با معادلات  $f(x) = w^T \cdot x + b + \varepsilon$  و یا  $f(x) = w^T \cdot x - b + \varepsilon$  که فاصله داده‌های واقع بر آن‌ها از تابع  $f(x)$  دقیقاً برابر  $\varepsilon$  است، ابرصفحه‌های حاشیه‌ای نامیده می‌شوند.

<sup>۹</sup>Vapnik



شکل ۳. الف- ابرصفحه‌های حاشیه‌ای تابع  $f(x)$  ب- تابع زیان [۲۶]

Figure 3: a. Marginal hyperplanes of function  $f(x)$ , b. Loss function.

در شکل ۳ (الف)، تابع  $f(x)$  به همراه ابرصفحه‌های حاشیه‌ای آن، و در شکل ۳ (ب)، با توجه به رابطه (۹)، نمودار تابع زیان (جریمه) نشان داده شده است. با در نظر گرفتن تابع جریمه و متغیرهای کمکی کمبود  $\zeta_i^+$  و  $\zeta_i^-$ ، مسئله کمینه‌سازی (۸) را می‌توان به صورت مسئله کمینه‌سازی (۱۱) بازنویسی کرد.

$$\Phi(w, \zeta_i^+, \zeta_i^-) = \frac{\|w\|^2}{2} + C \left( \sum_{i=0}^N \zeta_i^+ + \sum_{i=0}^N \zeta_i^- \right)$$

s.t.

$$(11) \quad \begin{aligned} y_i - f(x_i) &\leq \varepsilon + \zeta_i^+, & i = 0, 1, 2, \dots, N, \\ f(x_i) - y_i &\leq \varepsilon + \zeta_i^-, & i = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \zeta_i^+, \zeta_i^- &\geq 0 & i = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

که در آن  $\|w\|$  بیانگر نرم بردار وزن و  $C$  یک پارامتر تطبیقی است که بسته به اهمیت کاهش انحراف، توسط کاربر به دستگاه اعمال می‌شود.

برای یافتن مقادیر  $w$  و  $b$  در مسئله بهینه‌سازی (۱۱)، از روش تابع لاگرانژ استفاده می‌کنیم. پس با در نظر گرفتن ضرایب  $\alpha_i^+$  و  $\alpha_i^-$  و  $\mu_i^+$  و  $\mu_i^-$  به‌عنوان ضرایب لاگرانژ متناظر با محدودیت‌های اول تا چهارم مسئله، تابع لاگرانژ به صورت (۱۲) تعریف می‌شود:

$$(12) \quad \begin{aligned} L_P = \Phi(w, \zeta_i^+, \zeta_i^-) = & \frac{\|w\|^2}{2} + C \left( \sum_{i=0}^N \zeta_i^+ + \sum_{i=0}^N \zeta_i^- \right) - \sum_{i=0}^N \alpha_i^+ (\varepsilon + \zeta_i^+ + (w^T \cdot x_i + b) - y_i) - \\ & \sum_{i=0}^N \alpha_i^- (\varepsilon + \zeta_i^- + (w^T \cdot x_i + b) - y_i) - \sum_{i=0}^N \zeta_i^+ \mu_i^+ - \sum_{i=0}^N \zeta_i^- \mu_i^- \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد جواب متناظر با تابع لاگرانژ (۱۲) نسبت به متغیرهای اولیه و دوگان یک نقطه زینی است [۱۰]. با توجه به شرایط لازم بهینگی در نقطه زینی، مشتقات جزئی تابع لاگرانژ  $LP$  نسبت به متغیرهای  $\zeta_i^+$  و  $\zeta_i^-$  و  $b$  و  $w$  را برابر صفر قرار می‌دهیم. بنابراین، دستگاه (۱۳) را خواهیم داشت؛

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial LP}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^N \alpha_i^+ + \sum_{i=0}^N \alpha_i^- = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^N (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) = 0, \\ \frac{\partial LP}{\partial w} = 0 \Rightarrow w - \sum_{i=0}^N \alpha_i^+ x_i + \sum_{i=0}^N \alpha_i^- x_i = 0 \Rightarrow w = \sum_{i=0}^N (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) x_i, \\ \frac{\partial LP}{\partial \zeta_i^+} = 0 \Rightarrow \alpha_i^+ - \mu_i^+ + C = 0 \Rightarrow \mu_i^+ = C - \alpha_i^+, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \frac{\partial LP}{\partial \zeta_i^-} = 0 \Rightarrow \alpha_i^- - \mu_i^- + C = 0 \Rightarrow \mu_i^- = C - \alpha_i^-, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

با بازنویسی تابع  $LP$  با توجه به روابط (۱۳)، مسئله بهینه‌سازی فقط وابسته به متغیرهای دوگان خواهد شد.

$$(14) \quad L_D = -\varepsilon \sum_{i=0}^N (\alpha_i^+ + \alpha_i^-) + \sum_{i=0}^N y_i (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) (\alpha_j^+ - \alpha_j^-) (x_i, x_j).$$

اکنون با بیشینه کردن تابع  $L_D$  و در نظر گرفتن محدودیت‌های (۱۵)، مقادیر ضرایب  $\alpha^+$  و  $\alpha^-$  به دست می‌آیند.

$$(15) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^N \alpha_i^+ = \sum_{i=0}^N \alpha_i^-, \\ 0 \leq \alpha_i^+, \alpha_i^- \leq C, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

مسئله بهینه‌سازی (۱۴) یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم (QP)<sup>۱۰</sup> است. پس از حل مسئله بهینه‌سازی (۱۴)، با در نظر گرفتن محدودیت‌های (۱۵) و یافتن مقادیر بهینه  $\alpha_i^+$  و  $\alpha_i^-$ ، مقدار بهینه بردار وزن  $w$  را با استفاده از روابط (۱۳) به صورت (۱۶) محاسبه می‌کنیم،

$$(16) \quad w = \sum_{i=0}^N (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) x_i.$$

برای محاسبه مقدار  $b$ ، از داده‌های موجود روی ابرصفحه‌های حاشیه‌ای استفاده می‌کنیم. از آنجا که انحراف این داده‌ها از تابع  $f(x)$  دقیقاً برابر  $\varepsilon$  است، بنابراین داریم:

$$(17) \quad \begin{cases} y_i - f(x_i) = \varepsilon \Rightarrow y_i - (w^T \cdot x_i + b) = \varepsilon \Rightarrow b = y_i - w^T \cdot x_i - \varepsilon, \\ y_i - f(x_i) = -\varepsilon \Rightarrow y_i - (w^T \cdot x_i + b) = -\varepsilon \Rightarrow b = y_i - w^T \cdot x_i + \varepsilon. \end{cases}$$

از آنجا که به ازای داده‌های روی ابرصفحه‌های حاشیه‌ای، مقادیر مختلفی از  $b$  حاصل می‌شود، بنابراین میانگین این مقادیر را به عنوان مقدار نهایی  $b$  تعریف می‌کنیم (برای مطالعه بیشتر به [۲۰] مراجعه شود).

<sup>10</sup>Quadratic Programming (QP)

#### ۴. تعیین الگوی قیمتی طلا با رویکرد فراکتالی

پیش‌بینی قیمت طلا همواره به‌عنوان یک موضوع مهم در مطالعات و بررسی سری‌های زمانی مورد تأکید بوده است. بنابراین، پیش‌بینی قابل قبول روند قیمتی طلا، در ارائه اقدامات معاملاتی سودمند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تحلیل داده‌های مربوط به قیمت طلا به علت غیرخطی روند قیمتی، پویا بودن داده‌های ورودی و وابستگی به عوامل مختلف، پیچیده است. این بازار به‌طور کلی تحت تأثیر عوامل بسیاری از جمله رخدادهای سیاسی، شرایط اقتصادی فراگیر، نگرش در رفتار سرمایه‌گذاران بزرگ و پارامترهای مختلف دیگری است. روش‌های یادگیری ماشین از جمله روش‌های فراابتکاری رو به رشدی است که در بخش‌های مختلف از جمله الگوسازی، شناخت الگوی خوشه‌بندی، دسته‌بندی و پیش‌بینی به‌کار می‌رود و نتایج امیدبخشی به همراه داشته‌اند. هرچند روش‌های یادگیری ماشین از عملکرد بهتری در پیش‌بینی و طبقه‌بندی داده‌ها نسبت به سایر روش‌ها برخوردارند، ولی دقت عملیاتی آن‌ها به شدت تحت تأثیر ورودی‌های مسئله است و از آنجا که از ورودی‌های مسئله در مرحله آموزش به کار گرفته می‌شود، بنابراین تأثیر زیادی در کاهش دقت پیش‌بینی دارند [۱۳].

محققان زیادی به‌بررسی وضعیت بازار پرداخته‌اند و روش‌های زیادی ارائه شده است، از آن جمله می‌توان به [۲۱] اشاره کرد که در آن بازار شانگهای چین مورد مطالعه قرار گرفت. در این مقاله، ابتدا توسط *SVM*، به پیش‌بینی داده‌ها پرداخته شده است، سپس با استفاده از الگوریتم درونیابی فراکتال، نقاط جدید به‌دست آمده تعدیل گردیده و نشان داده شده که روش پیشنهادی آن‌ها می‌تواند روند شاخص سهام بازار شانگهای را تنها در یک دوره زمانی کوتاه‌مدت چهار روزه پیش‌بینی نماید [۲۱].

یوسف‌زاده و همکارانش در سال ۱۳۹۹، در مطالعه خود به‌منظور بهبود دقت پیش‌بینی روند شاخص صنایع مختلف در بازار بورس ایران، الگوریتم ترکیبی جدید فرکسیون را، که تلفیقی از دو الگوریتم درونیابی فراکتالی و رگرسیون *SVM* است، پیشنهاد دادند. آن‌ها برای این روش با معرفی الگوریتم درونیابی فراکتال اصلاح‌شده به پیاده‌سازی آن بر روی داده‌های اولیه متناظر با شاخص یک صنعت فراکتالی پرداختند [۲۶]. در این رویکرد آن‌ها با تولید داده‌های فراکتالی جدید مربوط به آن صنعت و فراخوانی الگوریتم *SVR* بر روی داده‌های فراکتالی جدید تولید شده، به پیش‌بینی روند شاخص آن صنعت پرداختند. نتایج عددی آن‌ها نشان داد که پیاده‌سازی الگوریتم فرکسیون بر روی داده‌های متناظر با شاخص صنایع مختلف در بازار بورس ایران و مقایسه عملکرد آن با عملکرد دو روش مرسوم یعنی شبکه عصبی مصنوعی (*ANN*) و *SVM*، برتری دقت پیش‌بینی الگوریتم فرکسیون را به دنبال داشت [۲۶]. نکته حائز اهمیت این است که آن‌ها در نتایج خود هیچ اشاره‌ای به مقایسه بین عملکرد الگوریتم فرکسیون و الگوریتم ارائه شده در [۲۱] (در این مقاله برای سادگی از آن به الگوریتم وانگ نام می‌بریم) که مبنای اصلی کار آنها بوده است، نکردند. بنابراین در این مقاله، سعی خواهیم کرد تا به مطالعه و بررسی این مهم بپردازیم و عملکرد این الگوریتم‌ها را با توجه به میزان دقت پیش‌بینی روند قیمتی طلا مورد ارزیابی قرار دهیم. برای این منظور داده‌های مربوط به قیمت پایانی طلا را در سال‌های ۲۰۱۸ تا ۲۰۲۲ به عنوان مجموعه داده‌های نمونه در نظر می‌گیریم<sup>۱۱</sup>.

شایان ذکر است جهت بررسی فراکتالی بودن ساختار سری زمانی روند قیمتی طلا، از روش آنالیز  $\frac{R}{S}$  برای محاسبه نمای هرست مربوط به داده‌های قیمت پایانی طلا، به تفکیک هر سال (از سال ۲۰۱۸ تا ۲۰۲۲) استفاده خواهیم نمود. پس از تأیید فراکتالی بودن سری زمانی مربوطه، عملکرد الگوریتم‌های فرکسیون و وانگ را جهت تعیین الگوی قیمتی طلا مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

۱.۴. مدل‌سازی سری زمانی داده‌های روزانه طلا. مجموعه داده‌های مورد مطالعه مربوط به نوسانات قیمتی روزانه طلا در بازه زمانی ۲۸ نوامبر ۲۰۱۸ تا ۲۱ مارس ۲۰۲۲، انتخاب شده‌اند.

<sup>۱۱</sup> داده‌های مورد آزمایش مربوط به قیمت پایانی طلا از سایت <https://stooq.com> گرفته شده است.

۲.۴. بررسی فراکتالی بودن الگوی قیمتی طلا. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، ضروری است ابتدا به تشخیص پایداری ساختار قیمتی طلا، با استفاده از الگوریتم نمای هرست پرداخته شود. نمای هرست مربوط به سری زمانی داده‌های طلا را در سه سال متوالی با کمک الگوریتم ۱، به تفکیک هر سال محاسبه می‌کنیم. این اطلاعات در جدول ۸ آورده شده است.

جدول ۸. نمای هرست سه سال متوالی مربوط به روند قیمتی طلا.

Table 8: Hurst's exponent for three consecutive years of gold price trends.

ردیف	سال	نمای هرست ( $H$ )
۱	۲۰۲۰	۰/۷۳۱۱
۲	۲۰۲۱	۰/۶۰۹۳
۳	۲۰۲۲	۰/۶۵۲۸

مشاهده می‌شود که مقدار نمای هرست مربوط به قیمت طلا در این سال‌ها  $H > 0.5$  است. به عبارت دیگر، با توجه به تأیید وجود خاصیت حافظه بلندمدت در سری زمانی داده‌های قیمتی طلا، می‌توان گفت که در سال‌های یاد شده، روند قیمتی داده‌های آتی به داده‌های گذشته نسبتاً دور وابسته است. بنابراین، شرایط لازم برای فراخوانی الگوریتم پیش‌بینی روند قیمتی گذشته-محور مانند وانگ یا فرکسیون مهیا است، که در ادامه به شرح آن‌ها می‌پردازیم.

بیان این نکته حائز اهمیت است که در مقوله پیش‌بینی رفتار یک سری زمانی، فراخوانی یک یا چند الگوریتم مشخص بر روی داده‌های گذشته نمی‌تواند رفتار آینده آن سری زمانی را به طور کامل و دقیق پیش‌بینی نماید. به‌طور کلی روند قیمتی یک سهم در بازارهای مالی، تابع عوامل مختلفی است که رفتار قیمتی آن سهم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. با این وجود هدف این مقاله، تنها ارائه یک ابزار برای بررسی روند قیمتی یک سهم به‌صورت تکنیکال (فنی) است که بتوان از آن به‌عنوان یک اندیکاتور (نشانگر) برای هشدار، پیش‌بینی و یا تأیید یک تحلیل بهره جست.

۳.۴. الگوریتم وانگ [۲۱]. در الگوریتم ۳، ساختار الگوریتم وانگ بیان شده است.

### الگوریتم ۳ الگوریتم وانگ

ورودی: قیمت پایانی طلا.

خروجی: پیش‌بینی قیمت پایانی طلا در یک بازه زمانی کوتاه‌مدت.

#### شروع

- ۱: بررسی پایداری و ساختار فراکتالی داده‌های مربوط به قیمت طلا با استفاده از نمای هرست توسط الگوریتم ۱.
- ۲: پیش‌بینی داده‌ها با استفاده از الگوریتم SVM.
- ۳: تعدیل نقاط حاصل از گام ۲ توسط الگوریتم ۲.
- ۴: پیش‌بینی یک دوره کوتاه‌مدت را براساس تابع درون‌یابی فراکتالی متناظر با نقاط گام ۳.

#### پایان

۴.۴. الگوریتم فرکسیون. در الگوریتم ۴، ساختار کلی الگوریتم فرکسیون بیان شده است.

#### الگوریتم ۴ الگوریتم فرکسیون

ورودی: قیمت پایانی طلا در یک بازه زمانی.

خروجی: پیش‌بینی قیمت پایانی طلا در یک بازه زمانی کوتاه‌مدت.

#### شروع

- ۱: بررسی پایداری و تأیید ساختار فراکتالی داده‌ها با استفاده از الگوریتم ۱.
- ۲: تولید مجموعه نقاط فراکتالی برای داده‌های با ساختار فراکتالی الگوریتم ۲.
- ۳: فراخوانی و آموزش الگوریتم  $SVR$  با توجه به داده‌های فراکتالی.
- ۴: پیش‌بینی روند قیمت طلا در یک بازه زمانی بر اساس تابع رگرسیون به‌دست آمده در گام ۳.

#### پایان

#### ۵. نتایج عددی

در این بخش، نتایج حاصل از فراخوانی و پیاده‌سازی دو الگوریتم ۳ و ۴ را بر روی یک نمودار نشان می‌دهیم. در این نمودار، رنگ قرمز (\*)، بیانگر قیمت پیش‌بینی شده توسط الگوریتم وانگ و رنگ آبی (o)، قیمت پیش‌بینی شده توسط الگوریتم پیشنهادی فرکسیون و رنگ سبز (+)، روند قیمتی واقعی طلا است. نتایج حاصل از پیاده‌سازی دو الگوریتم را به تفکیک هر سال مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در ادامه برای ارزیابی کارایی الگوریتم فرکسیون در پیش‌بینی قیمت طلا در مقایسه با عملکرد الگوریتم وانگ، از معیارهای معتبر و شناخته شده ارزیابی مانند میانگین مربعات  $MSE^{12}$ ، فاصله مربع خطای نسبی  $RSE^{13}$  و فاصله میانگین قدرمطلق خطا  $MAE^{14}$  که به ترتیب در روابط (۱۸) تا (۲۰) بیان شده‌اند، استفاده شده است.

$$(18) \quad MSE = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N (x_{ipred} - x_{imeas})^2,$$

$$(19) \quad RSE = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{ipred} - x_{imeas})^2}{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_{imeas})^2},$$

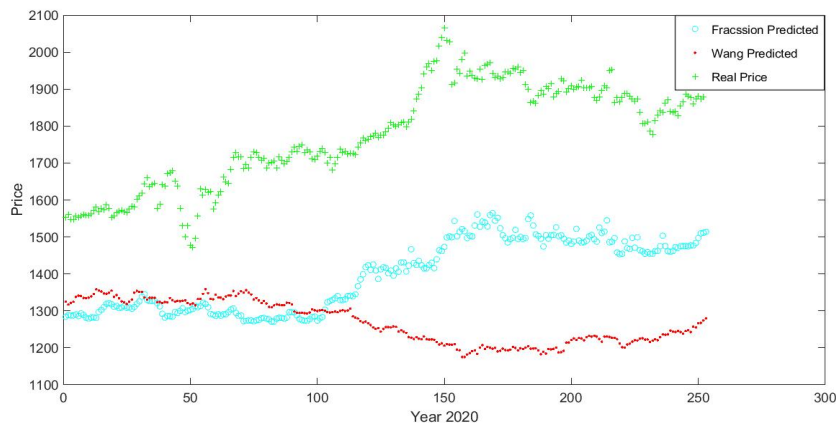
$$(20) \quad MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_{ipred} - x_{imeas}|,$$

که در آن  $N$  تعداد داده‌ها،  $\bar{x}$  میانگین داده‌های اندازه‌گیری شده یا داده‌های واقعی،  $x_{ipred}$  مقدار داده‌های پیش‌بینی شده و  $x_{imeas}$  مقدار داده‌های اندازه‌گیری شده می‌باشد.

نتایج مربوط به مقادیر متناظر با معیارهای ارزیابی دقیق پیش‌بینی قیمت پایانی طلا توسط الگوریتم وانگ و الگوریتم فرکسیون در سال‌های ۲۰۲۰، ۲۰۲۱ و ۲۰۲۲، به تفکیک در شکل‌های جداگانه ترسیم شده‌اند. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که هر چند دو الگوریتم از نظر پیش‌بینی قیمت دارای خطا می‌باشند، ولی الگوریتم تطبیقی فرکسیون در پیش‌بینی روند قیمتی طلا نسبت به الگوریتم وانگ از عملکرد بهتری برخوردار است.

<sup>12</sup>Mean Squared Error (MSE) <sup>13</sup>Relative Squared Error (RSE) <sup>14</sup>Mean Absolute Error (MAE)

روند قیمت واقعی طلا به همراه روند قیمت‌های پیش‌بینی شده توسط دو الگوریتم ۳ و ۴ مربوط به سال ۲۰۲۰ در شکل ۴ ترسیم شده‌اند.



شکل ۴. پیش‌بینی الگوی قیمتی طلا توسط دو الگوریتم ۳ و ۴ در سال ۲۰۲۰.

Figure 4: Prediction of gold price pattern by two algorithms 3 and 4 for 2020.

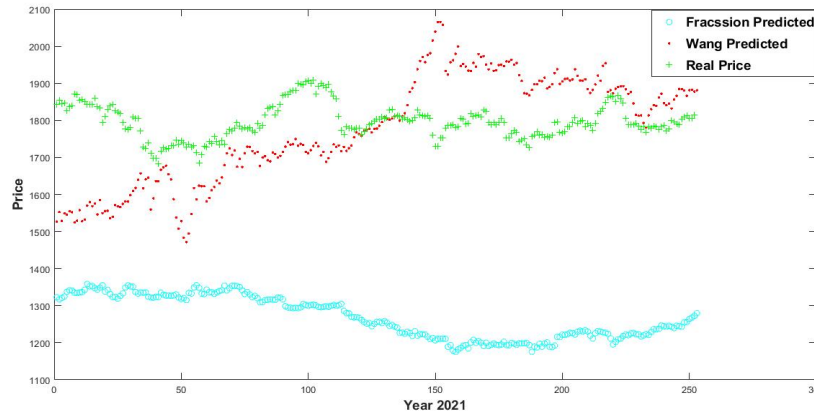
جدول ۹. مقایسه دقت پیش‌بینی دو الگوریتم فرکسیون و الگوریتم وانگ برای سال ۲۰۲۰.

Table 9: Comparison of prediction accuracy of Fracsion and Wang algorithms for 2020.

وانگ			فرکسیون		
MAE	RSE	MSE	MAE	RSE	MSE
۰/۰۴۲۱۱۳	۰/۰۴۰۲۹۵	۰/۰۰۴۲۲۰۱	۰/۰۵۳۱۶۹	۰/۰۴۶۳۲۶	۰/۰۰۳۵۴۸۲

ارزیابی نتایج سال ۲۰۲۰ نشان می‌دهد هر دو الگوریتم تا تقریباً ۱۰۰ روز ابتدایی دارای عملکرد نسبتاً مشابهی هستند. هرچند بین قیمت واقعی و قیمت پیش‌بینی شده، انحراف مشاهده می‌شود، ولی روند تغییرات قیمت طلا توسط الگوریتم فرکسیون نسبت به الگوریتم وانگ، همخوانی بیشتری با روند واقعی آن دارد که این برتری با افزایش تعداد روزها (بیش از ۱۰۰ روز) افزایش بیشتری می‌یابد. لازم به ذکر است که علت انحراف قابل توجه بین داده‌های پیش‌بینی و داده‌های واقعی در این سال را می‌توان مرتبط با شرایط سیاسی و اقتصادی خاص حاکم بر جهان دانست، که متأثر از شیوع کرونا و وضع بسیاری محدودیت‌ها بود، و بر اقتصاد و صنعت جهان همچنین بر قیمت طلا تأثیر بسزایی داشته است. نتایج به‌دست آمده در جدول ۹ نیز حاکی از عملکرد بهتر الگوریتم فرکسیون نسبت به الگوریتم وانگ می‌باشد.

در شکل ۵، داده‌های واقعی طلا به همراه پیش‌بینی قیمت طلا در سال ۲۰۲۱ توسط دو الگوریتم فرکسیون و الگوریتم وانگ آورده شده است. هرچند با توجه به شکل ۵، مشاهده می‌شود که از دیدگاه انحراف بین قیمت‌های پیش‌بینی شده از قیمت‌های واقعی، عملکرد الگوریتم وانگ در مقایسه با الگوریتم فرکسیون از وضعیت بهتری برخوردار است، ولی از نقطه نظر تغییر در روند قیمتی مشابه سال ۲۰۲۰، الگوریتم وانگ نسبت به الگوریتم فرکسیون در تشخیص روند صعودی یا نزولی ضعیف‌تر عمل کرده و در برخی از مقاطع زمانی در تشخیص روند دچار اشتباه شده است، وضعیتی که در الگوریتم فرکسیون کمتر به چشم می‌خورد و تا حدی می‌توان گفت وضعیت روند پیش‌بینی شده توسط الگوریتم فرکسیون به روند واقعی قیمت نزدیکتر است.



شکل ۵. پیش‌بینی الگوی قیمتی طلا توسط دو الگوریتم ۳ و ۴ در سال ۲۰۲۱.

Figure 5: Prediction of gold price pattern by two algorithms 3 and 4 in 2021.

جدول ۱۰. مقایسه دقت پیش‌بینی دو الگوریتم فرکسیون و الگوریتم وانگ برای سال ۲۰۲۱.

Table 10: Comparison of prediction accuracy of Fracsion and Wang algorithms for 2021.

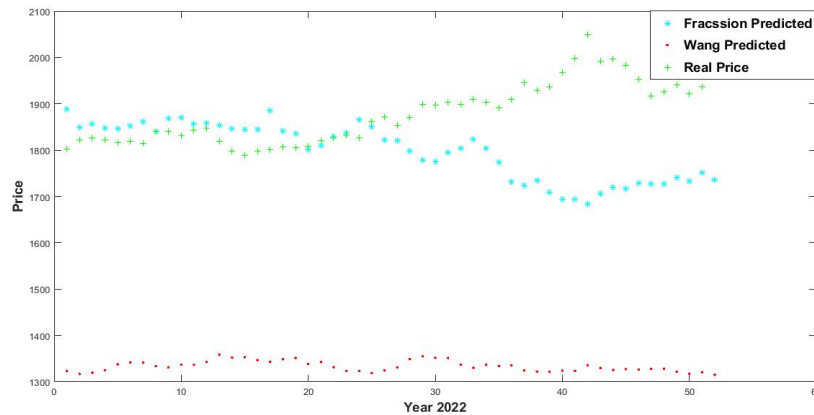
وانگ			فرکسیون		
MAE	RSE	MSE	MAE	RSE	MSE
۰/۰۳۴۴۶۴	۰/۰۴۲۵۱۹	۰/۰۰۲۶۲۴۲	۰/۰۴۶۳۴۷	۰/۰۵۲۱۴۸	۰/۰۰۴۲۳۸۸

شایان توجه است که جهش‌های پی‌درپی ویروس کووید ۱۹، تمام پیش‌بینی‌ها و برآوردها از تحولات بازارهای سرمایه‌گذاری را تحت تأثیر خود قرار داد. با وجود اینکه انتظار می‌رفت با افزایش سرعت واکسیناسیون در دنیا و کنترل نسبی همه‌گیری کرونا در جهان، قیمت طلا در بازار جهانی کاهش یابد، ولی بررسی وضعیت تغییرات قیمت در این بازار، نشان می‌دهد که شرایط کاملاً متفاوت بوده و سرمایه‌گذاران همچنان طلا را به عنوان کالا و بازاری مطمئن برای حفظ ارزش دارایی‌ها، تلقی می‌کنند. همچنین مقاومت فدرال رزرو آمریکا نسبت به افزایش نرخ بهره بانکی در این کشور، به دلیل رشد تورم طی ماه‌های گذشته و همه‌گیری سویه (دلتا) در سرتاسر دنیا، باعث افزایش نگرانی در مورد احتمال تداوم مشکلات اقتصادی در جهان شد و زمینه برای نوسانات شدید قیمت طلا در بازارهای جهانی فراهم گردید، مسئله‌ای که پیش‌بینی روند قیمتی را شدیداً تحت تأثیر قرار می‌دهد، چرا که نظم ساختاری الگوی قیمتی را دچار اختلال می‌کند. در شکل ۶، با استفاده از داده‌های قیمت طلا در سال ۲۰۲۱، الگوی قیمت این فلز در سال ۲۰۲۲ را تعیین نمودیم.

جدول ۱۱. مقایسه دقت پیش‌بینی دو الگوریتم فرکسیون و الگوریتم وانگ برای سال ۲۰۲۲.

Table 11: Comparison of prediction accuracy of Fracsion and Wang algorithms for 2022.

وانگ			فرکسیون		
MAE	RSE	MSE	MAE	RSE	MSE
۰/۰۵۱۷۰۷	۰/۰۴۷۲۴۱	۰/۰۰۴۴۶۶۴	۰/۰۴۵۷۲۶	۰/۰۴۲۲۳۹	۰/۰۰۴۳۷۳۹



شکل ۶. پیش‌بینی الگوی قیمتی طلا توسط الگوریتم ۳ و ۴ در سال ۲۰۲۲.

Figure 6: Prediction of gold price pattern by two algorithms 3 and 4 for 2022.

همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، وضعیت پیش‌بینی الگوریتم فرکسیون در ماه ابتدایی سال ۲۰۲۲ در مقایسه با الگوریتم وانگ از دقت بسیار خوبی برخوردار است و پس از آن، در پیش‌بینی توسط الگوریتم ضعف مشاهده می‌شود. این در حالی است که الگوریتم وانگ در پیش‌بینی قیمت طلا از وضعیت مطلوبی برخوردار نیست. جدول ۱۱ نیز دقت بیشتر پیش‌بینی روند قیمتی توسط الگوریتم فرکسیون را نشان می‌دهد.

## ۶. نتیجه‌گیری کلی

در این مقاله سری زمانی قیمت طلا را در چند مرحله تجزیه و تحلیل کردیم.

(الف) با استفاده از اعمال روش نمای هرست در هر سال، پایدار بودن الگوی قیمتی طلا (ساختار فراکتالی سیستم) مورد بررسی قرار گرفت.

(ب) با کمک الگوریتم‌های موجود بر روی سری زمانی متناظر با قیمت طلا، به پیش‌بینی روند قیمتی آن پرداختیم که می‌تواند اطلاعات مهمی را در اختیار سرمایه‌گذارانی که به دنبال پیش‌بینی بازار طلا هستند، قرار دهد.

تحلیل و بررسی اصولی بازار طلا با الگوی فراکتالی، رویکردی جدید برای بررسی بازار طلا و یک دیدگاه غیرخطی درباره این مسئله بیان می‌کند. ویژگی حافظه بلندمدت و همچنین ساختار فراکتالی یک سری زمانی متناظر با داده‌های قیمتی طلا، می‌تواند نقش مؤثری در پیش‌بینی نوسانات طلا و در نتیجه بازدهی نوسانات طلا داشته باشد. با توجه به این که نوسانات قیمت طلا در بازارهای جهانی، به عوامل مختلف زیادی وابسته است. بنابراین، پیش‌بینی دقیق روند قیمتی بازار طلا در بلندمدت، کار دشواری است. نتایج عددی به دست آمده بیانگر این است که به کار بردن الگوریتم‌های پیش‌بینی رفتار یک سری زمانی، به عنوان یک ابزار تحلیل فنی، در شرایط پایدار اقتصادی و سیاسی بر جهان برای پیش‌بینی روند قیمتی طلا در کوتاه‌مدت، می‌تواند نتایج رضایت‌بخشی را به دنبال داشته باشد. اما زمانی که شرایطی حاکم باشد که روند قیمتی را شدیداً تحت تأثیر قرار دهد؛ مانند جنگ، تورم جهانی و در سال‌های اخیر بیماری همه‌گیر جهانی کووید ۱۹؛ الگوریتم‌ها نمی‌توانند در پیش‌بینی روند الگوی قیمتی عملکرد مناسبی داشته باشند، چرا که نظم ساختاری الگوی قیمتی در چنین شرایطی دچار اختلال است.

## مراجع

- [1] M. Abaszade and S. Effati, Support vector regression with random output variable and probabilistic constraints, *Iran. J. Fuzzy Syst.*, **14** no. 1 (2017) 43–60.
- [2] S. Alahmari, Predicting the price of cryptocurrency using support vector regression methods, *J. Mech. Continua Math. Sci.*, **15** no. 4 (2020) 313–322.
- [3] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [4] C. Conrad, M. Karanasos and N. Zeng, Multivariate fractionally integrated APAARCH modeling of stock market volatility: A multi-country study, *Journal of Empirical Finance*, **18** no. 1 (2011) 147–159.
- [5] S. Das, M. S. Arman, S. S.Hossain and S. Islam, Bangladeshi stock price prediction and analysis with potent machine learning approaches, *Cyber Security and Computer Science*, **325** no. 2 (2020) 230–240.
- [6] R. Hafezi and A. N. Akhavan, Forecasting gold Price changes: application of an equipped artificial neural network, *AUT J Model Simul*, **50** no. 1 (2018) 71–82.
- [7] A. Hatamlou and M. Deljavan, Forecasting gold price using data mining techniques by considering new factors, *J. AI Data Min.*, **7** no. 3 (2019) 411–420.
- [8] H. E. Hurst, Long term storage capacities of reservoirs, *Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **116** (1951) 770–799.
- [9] J. Li, Rescaled range ( $R/S$ ) analysis on seismic activity parameters, *Acta Seismologica Sinica*, **14** no. 2 (2001) 148–155.
- [10] G. Z. Li, J. B. Huang and H. Y. Huang, Calculating method of contraction operators in fractal interpolation based on the  $B$ -spline, *Journal of Ordnance Engineering College*, **18** no. 2 (2006) 76–78.
- [11] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, Turbulence and financial markets, *Nature*, **383** (1996) 587–588.
- [12] M. Matsushita and H. Fukiwarara, Fractal growth in financial markets formation, *physical sciences and biology*, **35** (1993) 637–648.
- [13] J. H. Min and Y. C. Lee, Bankruptcy prediction using support vector machine with optimal choice of kernel function parameters, *Expert systems with applications*, **28** no. 4 (2005) 603–614.
- [14] M. Mun and R. Brooks, The roles of news and volatility in stok market correlations during the global financial crisis, *Emerging Markets Reviw*, **13** (2012) 1–7.
- [15] S. Mirmirani and H. C. Li, Gold price, neural networks and genetic algorithm, *Computational Economics*, **23** (2004) 193–200.
- [16] I. Pilgrim and R. P. Taylor, Fractal analysis of time-series data sets: Methods and challenges, In book *Fractal Analysis*, Working paper, 2018.
- [17] R. S. Tsay, *Analysis of financial time series*, Third edition. Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010.
- [18] P. Sadorsky, Predicting gold and silver price direction using tree-based classifiers, *J. Risk Financial Manag.*, **14** no. 5 (2021) pp. 21.
- [19] L. Sarfaras and A. Afsar, Study on the factors affecting gold price and a neuro-fuzzy model of forecast, *MPRA posted*, (2005) **21** 28–55.
- [20] V. N. Vapnik, *The nature of statistical learning theory*, Springer-Verlag, New York, 1995 188 pp.
- [21] H. Y. Wang, H. Li and J. Y. Shen, A novel hybrid fractal interpolation-SVM model for forecasting stock price indexes, *Fractals*, **27** no. 4 (2018) 11 pp.

[22] M. Y. Zhai, A new method for short-term load forecasting based on fractal interpolation and wavelet analysis, *Int. J. Electr Power Energy Syst.*, **69** no.1 (2015) 241-245.

[۲۳] ا. شریف فر، پیش‌بینی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از روش دو مرحله‌ای رگرسیون بردار پشتیبان ( $svr - svr$ )، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، (۱۳۹۶).

[۲۴] ز. شکیبیا، م. خدری، ف. فقیه موسوی، مقایسه‌ی عملکردی الگوریتمهای  $SVM$  و  $KNN$  در دسته‌بندی متون، چهارمین کنفرانس بین‌المللی تحقیقات دانش بنیان در مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، تهران، دانشگاه ابرار، (۱۳۹۶).

[۲۵] ح. مروت، آزمون فرضیه بازار فرکتالی در بورس اوراق بهادار تهران، بورس اوراق بهادار، ۵ (۹) (۱۳۹۱) ۵-۲۵.

[۲۶] ح. ر. یوسف زاده، ا. کرابی و ع. حیدری، فرکسیون: الگوریتم تلفیقی جدید پیش‌بینی شاخص صنایع بازار بورس اوراق بهادار تهران، پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۱) (۱۴۰۲) ۳۱۱-۴۸۴.

### حمیدرضا یوسفزاده

گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران  
usefzadeh.math@pnu.ac.ir

حمیدرضا یوسفزاده استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه پیام‌نور است. تحقیقاتش در حوزه تحقیق در عملیات می‌باشد. ارائه شیوه‌های زمان‌بندی چندبعدی و همچنین معرفی معیارهای پیچیدگی وابسته به زمان در مسائل زمان‌بندی پروژه با منابع محدود از جمله موضوعات کلیدی رساله دکتری ایشان می‌باشد. تا کنون ۳ دانشجوی دکتری و بالغ بر ۲۵ دانشجوی کارشناسی ارشد تحت نظارت و راهنمایی ایشان، دانش‌آموخته شده‌اند.



### اعظم فتوت

گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران  
afotovat67@gmail.com

اعظم فتوت متولد شهر مشهد است. وی مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی را در دانشگاه پیام‌نور گذرانده است و اکنون در رشته ریاضی کاربردی با گرایش بهینه‌سازی در مقطع کارشناسی ارشد از دانشگاه پیام‌نور دانش‌آموخته گردیده است. وی هم‌اکنون دبیر ریاضی آموزش و پرورش مشهد است.

