

## SOME PASCAL-LIKE TRIANGLES

SEYED MOHAMMAD AMIN KHATAMI\*  AND HADI MOSLEHI 

**ABSTRACT.** In this article, we delve into the fascinating world of numerical triangles similar to Khayyam-Pascal triangle. Our focus is on triangles that are comprised of natural numbers. Along with a combinatorial interpretation, we also propose an algebraic interpretation for the elements in most cases. We explore in details the triangle of coefficients of Chebyshev polynomials (Chebyshev triangle). Through our analysis, we derive a recursive relation for its elements. This finding sheds new light on the properties of this intriguing numerical construction. To further enhance our understanding of these triangles, we also present new images related to the Catalan, Bell, and Chebyshev triangles. These images provide a clearer visualization of the numerical triangle construction. Overall, this article offers a comprehensive exploration of numerical triangles similar to Khayyam-Pascal triangle and examine some of their properties and relationships for better understanding of these constructions.

### 1. Introduction

The history of the Pascal's triangle dates back to the 8th century AD, but the synchronization of Pascal's work with the scientific revolution after the Middle Ages and using the triangle for solving many problems in combinatorial analysis in Pascal's work led to the recognition of this numerical triangle as Pascal's triangle in the world of mathematics. Although the triangle had been known as early as in

---

Keywords: Khayyam-Pascal triangle, Eulerian numbers triangle, Stirling's triangles, triangle of coefficients of Chebyshev polynomials, Catalan's triangle.

Communicated by Masoud Pourmahdian.

Article Type: Research Paper.

\*Corresponding author.

Received: 24 May 2023, Accepted: 04 September 2023, Published Online: 10-10-2023.

Cite this article: S. M. Amin Khatami and M. H. Moslehi, Some Pascal-like triangles, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 3 (2023) 1–30.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137812.1578> .

ancient India, and later in Persia, China and Europe in the Middle Ages by a number of scientists before Pascal. In Persia, Khayyam and Karaji referred the triangle and binomial coefficients in the 11th century AD [5, 6]. Due to Khayyam’s advancements in calculating binomial coefficients, the triangle is known as Khayyam-Pascal triangle in Iran.

Considering the numerous applications of the Khayyam-Pascal triangle and the fantastic patterns in it, various generalizations have been proposed for it. In this article, which is somewhat a continuation of article [1], we introduce some of the most famous numerical triangles that consist of natural numbers and have a structure similar to Khayyam-Pascal triangle. In some places, we have made changes in arguments or shapes. Two notable changes have been made in illustrating Bell’s Triangle and Catalan’s Triangle. The proof of the relationship between elements in triangle of coefficients of Chebyshev polynomials (Chebyshev triangle) is also relatively new.

## 2. Discussion/Main Results

**2.1. Khayyam-Pascal triangle.** Khayyam-Pascal triangle is an infinite array of numbers which is constructed by beginning with the number 1 and with 1’s running down the two sides of triangle. Each new number lies between two numbers and below them is the sum of the two numbers above it. Repeating this algorithm, we can create the triangle shown in Figure 1. The entries in  $n$ th row of the triangle are the coefficients of the binomial expansion  $(x + y)^n$ . By the Newton’s binomial theorem

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

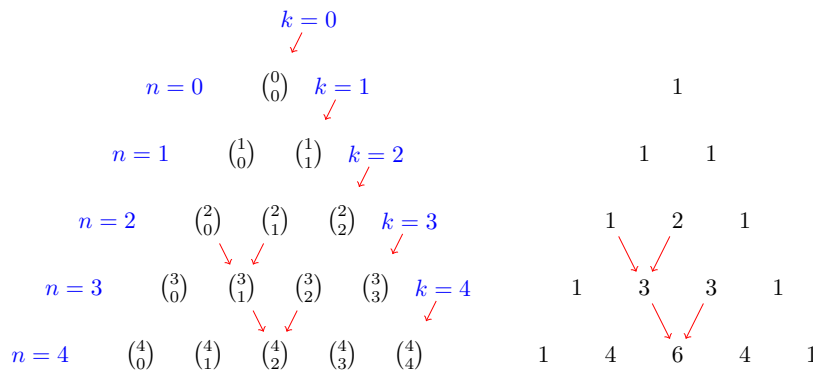


Figure 1. Khayyam-Pascal triangle

**2.2. (2, 1)-Pascal triangle or Lucas triangle.** The (2, 1)-Pascal triangle or Lucas triangle is constructed as like as the Khayyam-Pascal triangle in which its leftmost entries initialized to 2 and its rightmost entries (except the first row) initialized to 1. The inside numbers are sums of the two adjacent values of the preceding row (Figure 2). The entries in  $n$ th row of the (2, 1)-Pascal are the coefficients of the binomial expansion  $(2x + y)(x + y)^{n-1}$ .

The (2,1)-Pascal triangle is not symmetrical like as the Khayyam-Pascal triangle. However, similar to the Khayyam-Pascal triangle, it exhibits numerous patterns. For example, square numbers are located on diagonal  $k = 2$ . Additionally, it possesses the Hockey Stick property. More precisely, if  $T_{(2,1)}(n, k)$  represents the element in the  $n$ th row and  $k$ th diagonal of the (2,1)-Pascal triangle, then

$$T_{(2,1)}(0, k) + T_{(2,1)}(1, k) + \dots + T_{(2,1)}(n, k) = T_{(2,1)}(n+1, k+1).$$

For more details see [8]. Also see [7] for a fantastic property of (2,1)-Pascal triangle.

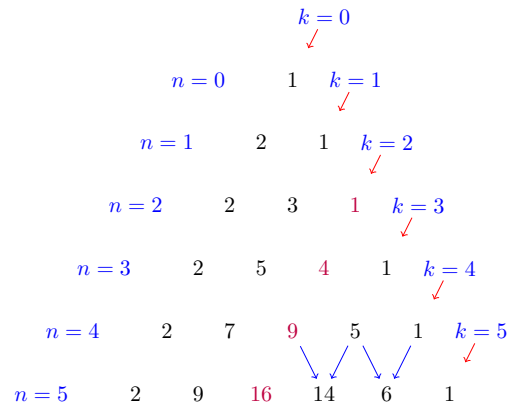


Figure 2. (2,1)-Pascal triangle

**2.3. Pascal's pyramid.** Pascal's pyramid is the three-dimensional analog of the two-dimensional Khayyam-Pascal triangle. The elements of the  $n$ th row of the Pascal's pyramid are the coefficients of the trinomial expansion  $(x + y + z)^n$ . By the trinomial expansion,

$$(x + y + z)^n = \sum_{0 \leq k_i \leq n, k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$$

where  $\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$ . For  $n \geq 3$ , and  $i, j, k \geq 1$  these coefficients satisfy the recurrence relation

$$\binom{n}{i, j, k} = \binom{n-1}{i-1, j, k} + \binom{n-1}{i, j-1, k} + \binom{n-1}{i, j, k-1},$$

which leads to the formation of Pascal's pyramid shown in Figure 3. For more details see [2, 9].

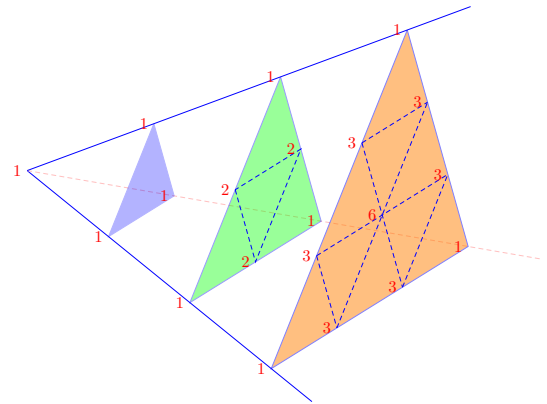


Figure 3. Pascal's pyramid

**2.4. Triangle of trinomial coefficients.** Coefficients of the expansion  $(1 + x + x^2)^n$  are called trinomial coefficients. If these coefficients are shown by  $\binom{n}{k}_2$ , then

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 x^{n+k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k-n}_2 x^k.$$

Note that for any  $n \geq 0$  and  $-n \leq k \leq n$ ,  $\binom{n}{k}_2 = \binom{n}{-k}_2$ . The numbers on the  $n$ th row of triangle of trinomial coefficients are  $\binom{n}{-n}_2, \binom{n}{-n+1}_2, \dots, \binom{n}{n}_2$ . For more details see [3, 10].

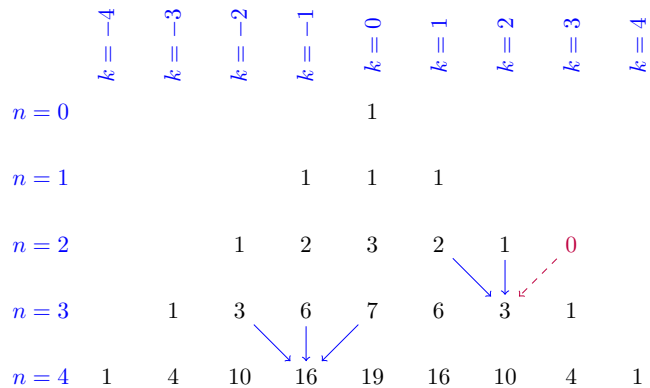


Figure 4. triangle of trinomial coefficients

**2.5. Stirling triangles.** Stirling numbers are defined in various combinatorial and algebraic interpretations. There are three kind of Stirling numbers. The Stirling numbers of the first kind, the Stirling numbers of the second kind, and the Lah numbers which sometimes referred to as the Stirling numbers of the third kind. A common algebraic property of all three kinds is that they describe coefficients relating three different sequences of polynomials that frequently arise in combinatorics. Moreover, all three can be defined as the number of partitions of  $n$  elements into  $k$  non-empty subsets, where each subset is endowed with a certain kind of order. The falling factorial is defined as the polynomial  $(x)_n = x(x - 1)(x - 2) \cdots (x - n + 1)$  while the rising factorial is  $\langle x \rangle_n = x(x + 1)(x + 2) \cdots (x + n - 1)$ .

The unsigned Stirling numbers of the first kind are denoted by  $[n_k]$  and algebraically are defined as the coefficients of the powers of  $x$  in the expansion  $\langle x \rangle_n$ , i.e.,  $\langle x \rangle_n = \sum_{k=0}^n [n_k] x^k$ . According to this definition, it can be shown that  $[0_0] = 1$ ,  $[1_1] = 1$ ,  $[n_n] = 1$ , and  $[n_0] = 0$  for each natural number  $n$ . Furthermore,  $[n+1_k] = [n_{k-1}] + n[n_k]$  for each  $1 \leq k \leq n$ . Hence, the Stirling triangle of the first kind constructed as Figure 5. It can be show that the number of permutations on  $n$  elements with  $k$  cycles is also equal to the unsigned Stirling number  $[n_k]$ . See [11] for more details.

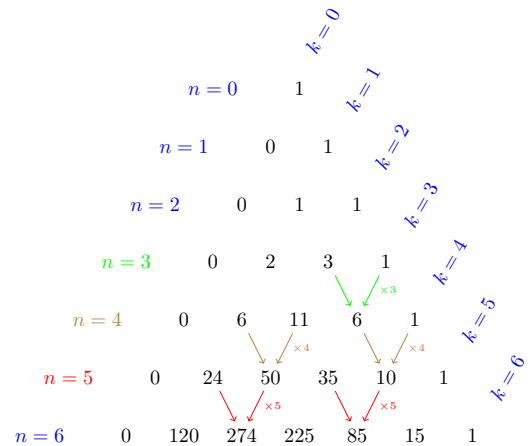


Figure 5. triangle of the Stirling numbers of the first kind

Algebraically, the Stirling numbers of the second kind which are denoted by  $\{n_k\}$  are defined as the coefficients of the falling factorials in the expansion of  $x^n$ , i.e.,  $x^n = \sum_{k=0}^n \{n_k\} (x)_k$ . Combinatorially, Stirling numbers of the second kind  $\{n_k\}$  counts the number of ways in which  $n$  distinguishable objects can be partitioned into  $k$  indistinguishable nonempty subsets. Accordingly, one could established that  $\{n_1\} = 1$ ,  $\{n_n\} = 1$  for each  $n \geq 0$ . Furthermore,  $\{n_0\} = 0$  for each  $n \geq 1$  and  $\{n+1_k\} = \{n_{k-1}\} + k\{n_k\}$  for each  $1 \leq k < n$ . See [11, 12] for more details.

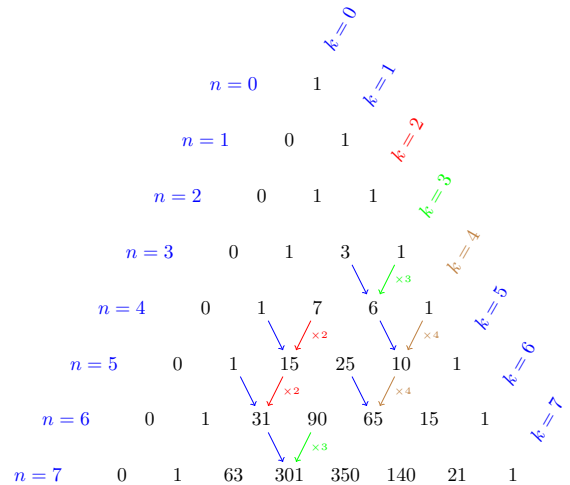


Figure 6. triangle of Stirling numbers of the second kind

Lah numbers or the Stirling numbers of the third kind are denoted by  $L(n, k)$  and defined as the coefficients of the falling factorials in the expansion of  $\langle x \rangle_n$ , i.e.,  $\langle x \rangle_n = \sum_{k=1}^n L(n, k)(x)_k$ . Lah numbers count the number of ways that a set of  $n$  elements can be partitioned into  $k$  nonempty linearly ordered subsets. They satisfies the recursive relation

$$L(n + 1, k) = (n + k)L(n, k) + L(n, k - 1).$$

Triangle of the Lah numbers is show in Figure 7. For more details see [11, 13].

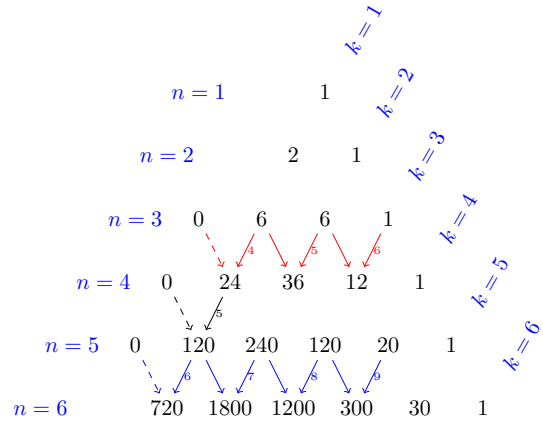


Figure 7. triangle of Lah numbers

**2.6. Triangle of Eulerian numbers (Euler triangle).** The Eulerian number  $\langle n \rangle_m$  is the number of permutations of the numbers  $\{1, \dots, n\}$  in which exactly  $m$  elements are greater than previous element. For example, there are 4 permutations of the numbers  $\{1, 2, 3\}$  in which exactly 1 element is greater than the previous elements. 132 in which 13 is ascending, 213 in which 13 is ascending, 231 in which 23 is ascending, and 312 in which 12 is ascending. Note that 321 has no ascending sequence and 123 has two ascending sequences. Therefore,  $\langle 3 \rangle_1 = 4$ . Eulerian numbers satisfies the recursive relation  $\langle n+1 \rangle_k = (k + 1)\langle n \rangle_k + (n + 1 - k)\langle n \rangle_{k-1}$ . Hence, they formed a numerical triangle pictured in Figure 8. Algebraically, Eulerian Numbers are the coefficients of the binomial coefficients in the expansion  $x^n = \langle n \rangle_0 \binom{x}{n} + \langle n \rangle_1 \binom{x+1}{n} + \dots + \langle n \rangle_k \binom{x+k}{n} + \dots + \langle n \rangle_{n-1} \binom{x+n-1}{n}$  of  $x^n$ . See [12, 14] for more details.

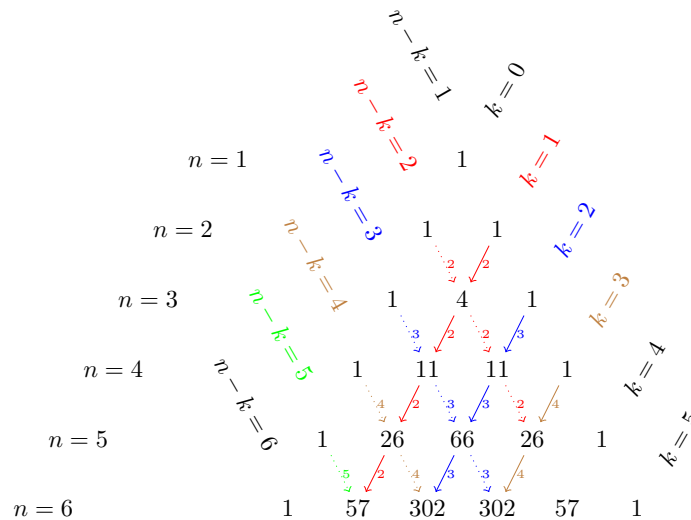


Figure 8. Euler triangle

**2.7. Catalan's triangle.** The Catalan numbers are denoted by  $C_n$ ,  $n \geq 0$ , and are given by the explicit formula  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Combinatorially,  $C_n$  counts the number of expressions containing  $n$  pairs of parentheses which are correctly matched.  $C_n$  also count the number of Dyck words of length  $2n$ . A Dyck word is a string consisting of  $n$  X's and  $n$  Y's such that no initial segment of the string has more Y's than X's. For example, the only Dyck words of length 2 is XY, and Dyck words of length 4 are XXYY and XYXY. A generalization of the latest interpretation of Catalan numbers, defined  $C(n, k)$  as the number of strings consisting of  $n$  X's and  $k$  Y's such that no initial segment of the string has more Y's than X's.

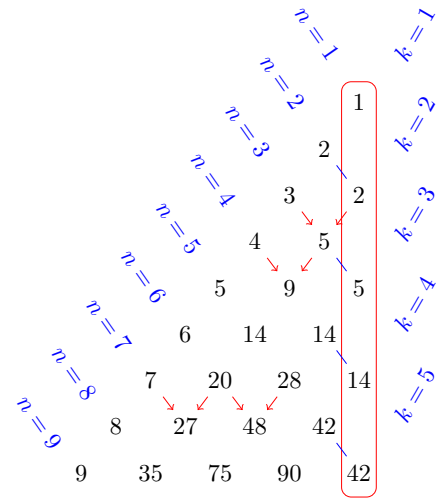


Figure 9. Catalan's triangle

$C(n, k)$  satisfies the recursive relations  $C(n, 0) = 1$  for  $n \geq 0$ ,  $C(n, 1) = n$  for  $n \geq 1$ ,  $C_{n+1, k} = C_{n+1, k-1} + C_{n, k}$  for  $1 < k < n + 1$ , and  $C_{n+1, n+1} = C_{n+1, n}$  for  $n \geq 1$ . Thus they formed the numerical triangle in Figure 9. Note that the Catalan number  $C_n$  is equal to  $C(n, n)$ . For more details see [2, 12, 15, 16, 17].

**2.8. Narayana Triangle.** Another interpretation of Catalan number  $C_n$  says that  $C_n$  counts the number of expressions containing  $n$  pairs of parentheses which are correctly matched. For example,  $C_3 = 5$ . Indeed, the only correctly matched parentheses of length three are  $()()()$ ,  $()(())$ ,  $((()))$ ,  $((()()))$ ,  $((())())$ .

Narayana number  $N_{n,k}$  generalize this interpretation. Indeed,  $N_{n,k}$  count the number of words containing  $n$  pairs of parentheses, which are correctly matched and which contain  $k$  distinct nestings. For instance,  $N_{4,2} = 6$ , since with four pairs of parentheses, six sequences can be created which each contain two occurrences the sub-pattern  $()$ .

$$()((())), ((()))(), ((())()), (((()())), (((()()))(), (((())))()$$

One can established that  $N_{n,k} = \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} \binom{n}{k}$ . So, Narayana numbers formed the triangle in Figure 10. Yellow numbers are Khayyam-Pascal triangle and the Narayana numbers are extracted from  $2 \times 2$  minors of Khayyam-Pascal triangle. More details on [14, 18, 19].

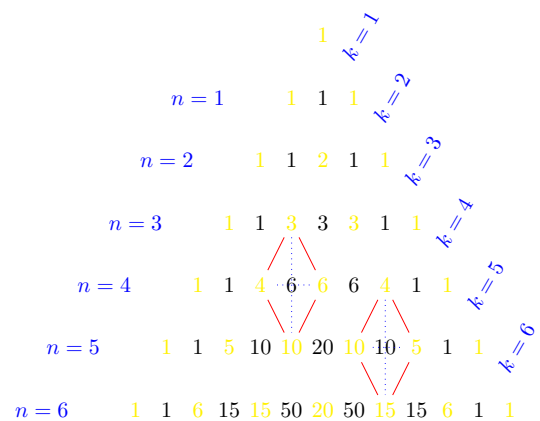


Figure 10. Narayana triangle

**2.9. Bernoulli's Triangle.** Bernoulli's triangle is an array of partial sums of the binomial coefficients. For any non-negative integer  $n$  and for any integer  $m$  included between 0 and  $n$ , the component in row  $n$  and column  $m$  of Bernoulli's triangle is  $B_{n,m} = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k}$ . Similarly to Khayyam-Pascal triangle, each component of Bernoulli's triangle is the sum of two components of the previous row, except for the last number of each row, which is double the last number of the previous row. So,  $B_{n+1,m} = B_{n,m} + B_{n,m-1}$  for  $m < n + 1$  and  $B_{n+1,n+1} = 2B_{n,n}$  (Figure 11).

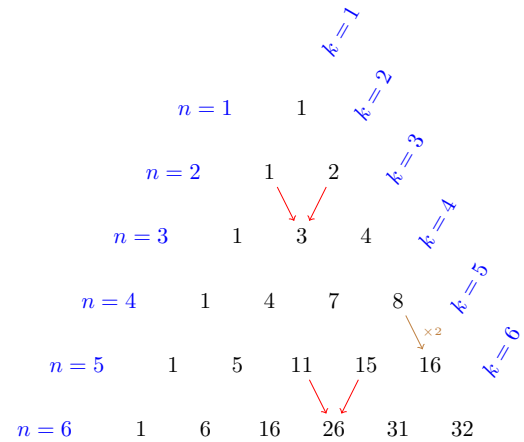


Figure 11. Bernoulli's triangle

**2.10. Bell triangle.** Bell numbers is an array of total sums of the Stirling numbers of the second kind, i.e. for any non-negative integer  $n$ ,  $B(n) = \sum_{k=1}^n \{n \atop k\}$ . The components of the Bell triangle are obtained by beginning the first diagonal with the number one, and begin all other diagonals with the last number in first diagonal, and filling out the other elements of each row by adding the elements in the preceding row. Combinatorially, Bell numbers count the number of ways of partitioning a finite set into subsets, or equivalently the number of equivalence relations on a finite set. See also [22, 23, 24, 12, 16, 25].

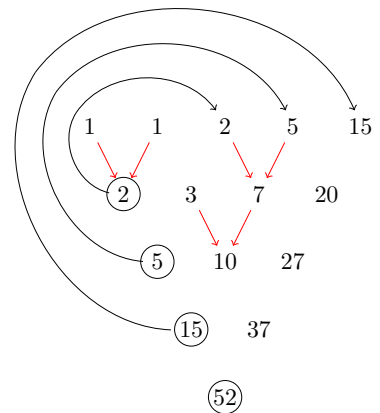


Figure 12. Bell triangle

**2.11. Triangle of the Coefficients of Chebyshev Polynomials.** Chebyshev polynomials are defined through identities  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$  and  $U_{n-1}(\cos \theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}$ .  $\{T_n(x)\}_{n=0}^\infty$  are called the Chebyshev polynomials of the first kind and  $\{U_n(x)\}_{n=0}^\infty$  are called the Chebyshev polynomials of the second kind. Chebyshev polynomials satisfies several recursive relations. We find a new recursive relation for the coefficients of Chebyshev polynomials which leads to the triangle for the coefficients of Chebyshev Polynomials shown if Figure 13.

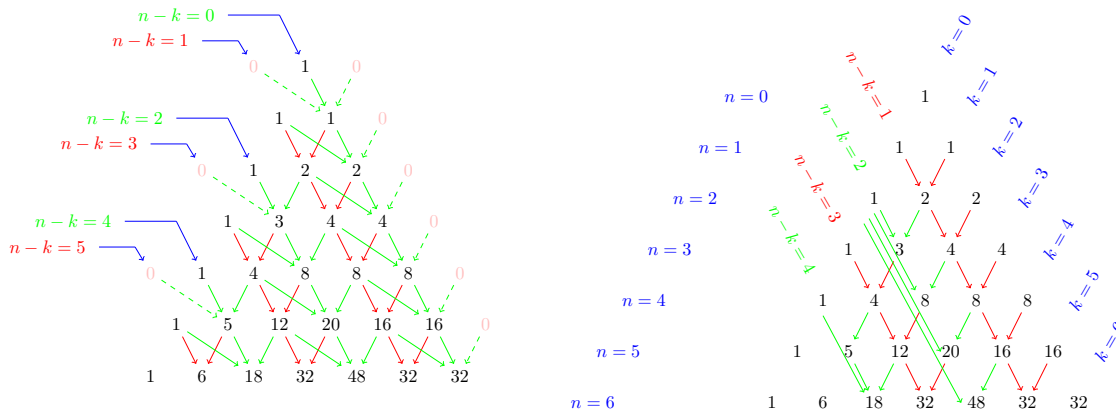


Figure 13. triangle of the coefficients of Chebyshev Polynomials

### 3. Summary of Proofs

In this section we state a new recursive relation around Chebyshev polynomials which leads to a triangle for the coefficients of Chebyshev Polynomials shown if Figure 13. Following identities  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$  and  $U_{n-1}(\cos \theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}$  and using De Moivre’s formula one could established that

$T_0(x) = 1$					1
$T_1(x) = 1x$	$U_0(x) = 1$				1 1
$T_2(x) = -1 + 2x^2$	$U_1(x) = 2x$				1 2 2
$T_3(x) = -3x + 4x^3$	$U_2(x) = -1 + 4x^2$				1 3 4 4
$T_4(x) = 1 - 8x^2 + 8x^4$	$U_3(x) = -4x + 8x^3$				1 4 8 8 8

If we write  $T_n(x) = a_{n,n}x^n - a_{n,n-2}x^{n-2} + \dots$  and  $U_{n-1}(x) = a_{n,n-1}x^{n-1} - a_{n,n-3}x^{n-3} + \dots$  then we could obtain recursive relations  $a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}$  for  $k > 0$  and odd values of  $n - k$ , and  $a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} + a_{n-1,k+1}$  for  $k > 0$  and even values of  $n - k$ . This fact leads to the following triangle for the unsigned coefficients of Chebyshev Polynomials. See [20] and [21] also.

**Seyed Mohammad Amin khatami**

Department of Computer Science, Birjand University of Technology, Birjand, Iran

Email: khatami@birjandut.ac.ir

**Mohammad Hadi Moslehi**

Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P.O. Box 19395-3697, Tehran, Iran

Email: mh\_moslehi@pnu.ac.ir

## چند مثلث عددی مشابه مثلث خیام- پاسکال

سید محمد امین خاتمی\*<sup>id</sup> و محمد هادی مصلحی<sup>id</sup>

چکیده. در این مقاله نگاهی به دنیای شگفت‌انگیز مثلث‌های عددی مشابه مثلث خیام- پاسکال می‌اندازیم. تمرکز ما البته به مثلث‌هایی است که از اعداد طبیعی تشکیل شده‌اند. سعی کرده‌ایم علاوه بر تعابیر ترکیبیاتی و جبری اعداد مثلث‌ها، به پاره‌ای از خواص مهم آنها نیز اشاره کنیم ولی کمتر به جزئیات پرداخته‌ایم. البته در این بین تجزیه و تحلیلی که از روابط عناصر در مثلث چبیشف داشته‌ایم با تفصیل بیشتر بوده است که ویژگی‌های بیشتری از ساختار عددی این مثلث را روشن می‌کند. برای تقویت درک خود از این مثلث‌ها، بعضی از اثبات‌ها و تصاویر را تغییر داده‌ایم و بخصوص تصاویر جدیدی برای مثلث‌های کاتالان، بل، و چبیشف رسم کرده‌ایم.

### ۱. مقدمه

پیشینه مثلث عددی خیام- پاسکال به قرن هشتم میلادی برمی‌گردد، اما تقارن کارهای پاسکال با انقلاب علمی بعد از قرون وسطی باعث شد دنیای ریاضیات، این مثلث عددی را به نام پاسکال بشناسد. در ایران نیز کرجی و خیام حدود قرن دهم میلادی به مثلث عددی خیام- پاسکال و نیز بسط دوجمله‌ای اشاره داشته‌اند [۵، ۶]. به لحاظ پیشرفتی که خیام در محاسبه ضرایب دوجمله‌ای داشته است، این مثلث عددی را در ایران با نام خیام می‌شناسند. ما به اختصار از نام «مثلث خیام» استفاده می‌کنیم.

با توجه به کاربردهای فراوان مثلث خیام و الگوهای موجود در آن، تعمیم‌ها و مشابه‌های مختلفی برای آن ارائه شده است. در این مقاله، که به نوعی ادامه مقاله [۱] می‌باشد، برخی از مشهورترین مثلث‌های عددی که مشتمل بر اعداد طبیعی هستند و ساختاری نزدیک به مثلث خیام دارند را معرفی می‌کنیم. در بعضی جاها، تغییراتی در استدلال‌ها یا شکل‌ها اعمال کرده‌ایم. دو تا از تغییرات قابل توجه در به تصویر کشیدن مثلث بل و مثلث کاتالان بوده است. در مورد مثلث چبیشف نیز اثبات ارتباط بین عناصر مثلث چبیشف تا حدودی جدید است. در مورد هر یک از این مثلث‌های عددی، قطعاً می‌توان مشابه مثلث خیام و آنچه در [۱] ارائه شده است، با بررسی ایده‌هایی که منجر به تشکیل هر مثلث شده است و همچنین بررسی سایر خواص آن‌ها، یک کار تحقیقی مفصل انجام داد.

عبارات و کلمات کلیدی: مثلث خیام- پاسکال، مثلث اویلر، مثلث‌های استرلینگ، مثلث چبیشف، مثلث کاتالان.  
دبیرتخصصی رابط: مسعود پورمه‌دیان

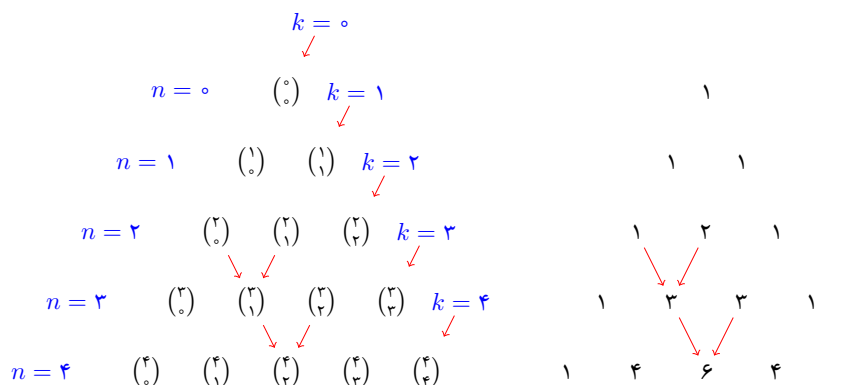
نوع مقاله: پژوهشی  
\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۱۳ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۷/۱۸  
ارجاع به مقاله: س. م. ا. خاتمی و م. ه. مصلحی، چند مثلث عددی مشابه مثلث خیام- پاسکال، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره، ۳ (۱۴۰۲) ۱-۳۰.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137812.1578>

## ۲. مثلث عددی خیام

یکی از اولین جاهایی که مثلث عددی خیام ظهور یافته است، در بیان ضرایب بسط دوجمله‌ای  $(x + y)^n$  است. قضیه دوجمله‌ای نیوتن می‌گوید  $(x + y)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ ، که در آن  $\binom{n}{k}$  تعداد راه‌های انتخاب  $k$  شیء از  $n$  شیء می‌باشد، پس  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ، که البته  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . این ضرایب عددی در مثلث خیام با هم در ارتباط هستند. همان‌طور که در تصویر ۱ دیده می‌شود، همه اعداد روی دو ضلع مثلث خیام برابر ۱ هستند و سپس اعداد هر سطر، از جمع اعداد واقع در سطر بالاتر آن به دست می‌آیند. در واقع به راحتی و با یک استدلال جبری می‌توان دید  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ . اگر سطرهای مثلث را به ترتیب ۰، ۱، ۲، ... بنامیم، آنگاه اعداد واقع در سطر  $n$  ام، ضرایب بسط دوجمله‌ای  $(x + y)^n$  هستند.



شکل ۱. مثلث خیام

Figure 1: Khayyam-Pascal triangle

## ۳. مثلث پاسکال ۱-۲ یا مثلث لوکاس

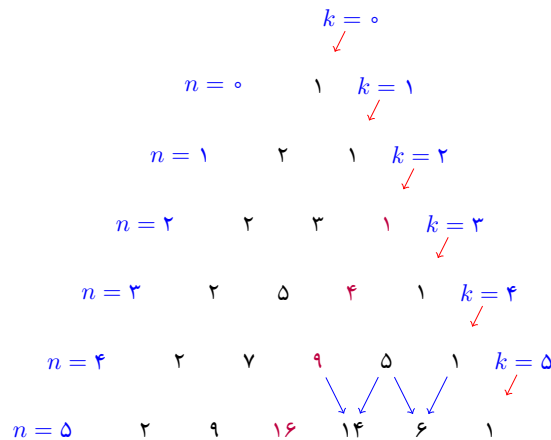
به تعمیمی از مثلث خیام که در یکی از اضلاع بجای عدد ۱ عدد ۲ قرار گرفته است، مثلث پاسکال ۱-۲ یا مثلث لوکاس<sup>۱</sup> می‌گویند. سایر اعداد مثلث خیام، از جمع اعداد سطر بالاتر خود به دست می‌آیند. اگر شبیه مثلث خیام، شماره‌گذاری سطرها را از صفر شروع کنیم، آنگاه برای  $n > 0$  اعداد سطر  $n$  ام مثلث لوکاس که در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند، ضرایب بسط دوجمله‌ای  $(2x + y)(x + y)^{n-1}$  هستند. همان‌طور که شکل ۲ نشان می‌دهد، مثلث لوکاس بر خلاف مثلث خیام متقارن نیست. در عین حال، شبیه مثلث خیام الگوهای فراوانی در آن می‌توان دید. مثلاً اعداد مربع روی قطر دوم آن قرار دارند. همچنین «خاصیت چوب چوگانی» در آن برقرار است. به طور دقیق‌تر اگر  $T_{(2,1)}(n, k)$  درایه واقع در سطر  $n$  ام و قطر  $k$  ام مثلث لوکاس باشد، آنگاه

$$T_{(2,1)}(0, k) + T_{(2,1)}(1, k) + \dots + T_{(2,1)}(n, k) = T_{(2,1)}(n + 1, k + 1),$$

$$T_{(2,1)}(n, 0) + T_{(2,1)}(n + 1, 1) + \dots + T_{(2,1)}(n + k, k) = T_{(2,1)}(n + k + 1, k).$$

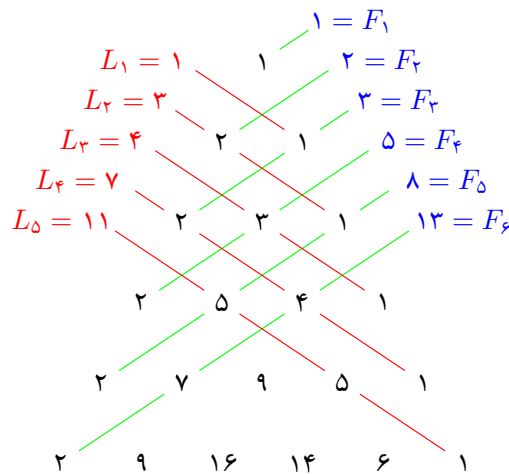
به‌علاوه نه تنها جمع اعداد روی قطرهای با شیب کم سمت راست، دنباله فیبوناچی را مشخص می‌کند؛ بلکه جمع اعداد روی قطرهای با شیب کم سمت چپ، دنباله لوکاس را مشخص می‌کند. دنباله لوکاس که از آن به «خواهر دنباله فیبوناچی» یاد می‌کنند عبارت است از ۱، ۳، ۴، ۷، ۱۱، ۱۸، ...

<sup>1</sup>Lucas triangle



شکل ۲. مثلث لوکاس

Figure 2: Pascal triangle (2,1)-or Lucas triangle



شکل ۳. دنباله فیبوناچی و دنباله لوکاس روی مثلث لوکاس

Figure 3: Fibonacci and Lucas numbers on Lucas triangle

به عنوان یک کاربرد جالب از مثلث لوکاس، اگر فرض کنیم  $r$  و  $s$  جواب‌های معادله درجه دوم  $x^2 - px - q = 0$  باشند، آنگاه می‌دانیم  $r + s = p$  و  $rs = -q$ . در نتیجه

$$r + s = p,$$

$$r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2rs = p^2 + 2q,$$

$$r^3 + s^3 = (r + s)^3 - 3rs(r + s) = p^3 + 3pq,$$

$$r^4 + s^4 = (r + s)^4 - 4rs(r^2 + s^2) - 6r^2s^2 = p^4 + 4p^2q + 2q^2,$$

$$r^5 + s^5 = (r + s)^5 - 5rs(r^3 + s^3) - 10r^2s^2(r + s) = p^5 + 5p^3q + 5pq^2.$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، ضرایب محاسبه  $r^n + s^n$  بر حسب  $p$  و  $q$  روی قطر با شیب کم  $L_n$  هستند که جمع اعداد آن قطر، عنصر  $n$  دنباله لوکاس را می‌دهند. مثلاً در محاسبه  $r^5 + s^5$  ضرایب عبارتند از ۱، ۵، ۵، ۱ که روی قطر با شیب کم  $L_5$  قرار دارند. به‌طور کلی [۷] نشان داده است که  $r^n + s^n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{(2,1)}(n-i, n-2i) p^{n-2i} q^i$ . از آنجایی که اعداد روی مثلث لوکاس ضرایب بسط دو جمله‌ای  $(2x+y)(x+y)^{n-1}$  هستند، پس به راحتی می‌توان دید  $T_{(2,1)}(n, k) = 2 \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ . تعمیم‌های مشابه مثلث پاسکال ۱-۲ منجر به مثلث‌های پاسکال  $a-b$  می‌شود. برای مطالعه بیشتر در این مورد، می‌توانید صفحه مربوط به مثلث لوکاس را در دانشنامه اعداد صحیح ببینید [۸].

#### ۴. هرم پاسکال

همان‌طور که اعداد روی سطر  $n$  مثلث خیام، ضرایب بسط دو جمله‌ای  $(x+y)^n$  هستند، در واقع اعداد روی هرم پاسکال<sup>۲</sup> (شکل ۴)، ضرایب بسط سه جمله‌ای  $(x+y+z)^n$  هستند. اعداد واقع روی صفحه  $n$ ام شکل ۴، ضرایب بسط سه جمله‌ای  $(x+y+z)^n$  هستند. بسط سه جمله‌ای به صورت زیر است

$$(x+y+z)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}.$$

برای  $k_1$  و  $k_2$  و  $k_3$ ‌های نامنفی‌ای که  $k_1 + k_2 + k_3 = n$ ، از نماد  $\binom{n}{k_1, k_2, k_3}$  برای نمایش دادن  $\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$  استفاده می‌شود. اثبات فرمول بسط  $n$  جمله‌ای را می‌توان در هر کتاب مقدماتی ترکیبیات یافت. مثلاً [۲]، قضیه ۲.۲۰۵ را ببینید. در هرم پاسکال، اعداد روی هر صفحه از جمع اعداد واقع روی صفحه ماقبل آن به دست می‌آید. در واقع برای ضرایب بسط سه جمله‌ای داریم

$$\binom{n}{i, j, k} = \binom{n-1}{i-1, j, k} + \binom{n-1}{i, j-1, k} + \binom{n-1}{i, j, k-1},$$

که اثبات آن کار چندانی ندارد. اگر ضریب دو جمله‌ای  $\binom{n}{k}$  را به صورت  $\binom{n}{k, j}$  بنویسیم که در آن  $j = n - k$ ، آنگاه می‌بینید جمع اخیر درست تعمیم خاصیت

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

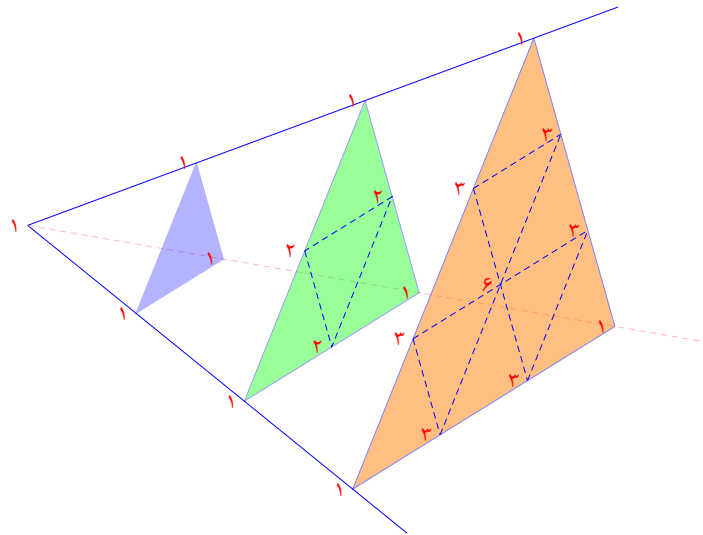
برای مثلث خیام می‌باشد. برای مطالعه برخی از خواص هرم پاسکال می‌توانید به [۹] مراجعه کنید.

#### ۵. مثلث سه جمله‌ای

ضرایب بسط سه جمله‌ای  $(1+x+x^2)^n$  را ضرایب بسط سه جمله‌ای می‌نامند. اگر این ضرایب را با  $\binom{n}{k}_2$  نمایش دهیم، آنگاه برای بسط  $(1+x+x^2)^n$ ، می‌توان از دو نمایش زیر استفاده کرد:

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 x^{n+k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k-n}_2 x^k.$$

<sup>2</sup>Pascal's pyramid



شکل ۴. هرم پاسکال

Figure 4: Pascal's pyramid

توجه دارید که در اینجا برای هر  $n$  و  $-n \leq k \leq n$ ، داریم  $\binom{n}{k}_p = \binom{n}{-k}_p$ . در مثلث سه‌جمله‌ای<sup>۳</sup>، اعداد روی سطر  $n$ ام عبارتند از

$$\binom{n}{-n}_p, \binom{n}{-n+1}_p, \dots, \binom{n}{n}_p.$$

همان‌طور که شکل ۵ نشان می‌دهد، اگر برای  $k > n$  و  $k < -n$  فرض کنیم  $\binom{n}{k}_p = 0$ ، آنگاه اعداد سطر  $n$ ام از روی اعداد سطر  $n-1$ ام به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\binom{n}{k}_p = \binom{n-1}{k-1}_p + \binom{n-1}{k}_p + \binom{n-1}{k+1}_p.$$

بسط سه‌جمله‌ای  $(1+x+x^{-1})^n$  را نیز می‌توان با  $\binom{n}{k}_p$ ها به صورت

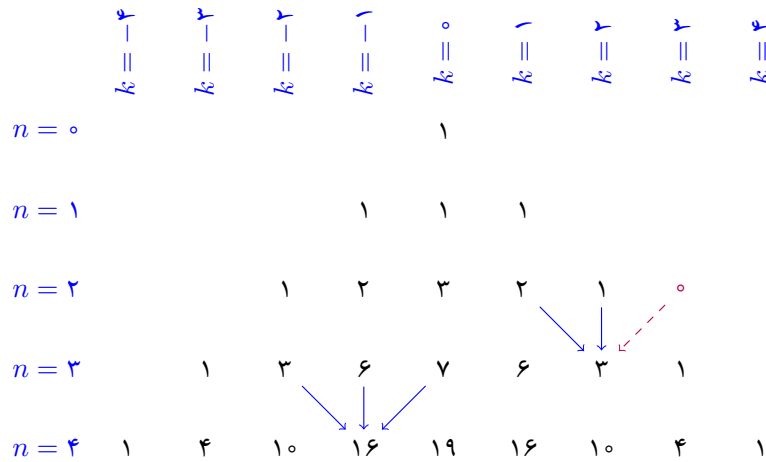
$$(1+x+x^{-1})^n = \sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_p x^k,$$

نمایش داد.

در حالت هرم پاسکال، تعمیم‌های بالاتر به دلیل وقوع در ابعاد بالاتر از ۳، فقط با به‌کارگیری عبارتهای جبری ممکن است، اما در مورد مثلث سه‌جمله‌ای، تعمیم آن به مثلث چندجمله‌ای نیز ممکن است. در واقع اگر بنویسیم

$$(1+x+x^2+\dots+x^m)^n = \sum_{k=[-(m.n+1)/2]}^{[(m.n+1)/2]} \binom{n}{k}_m x^k,$$

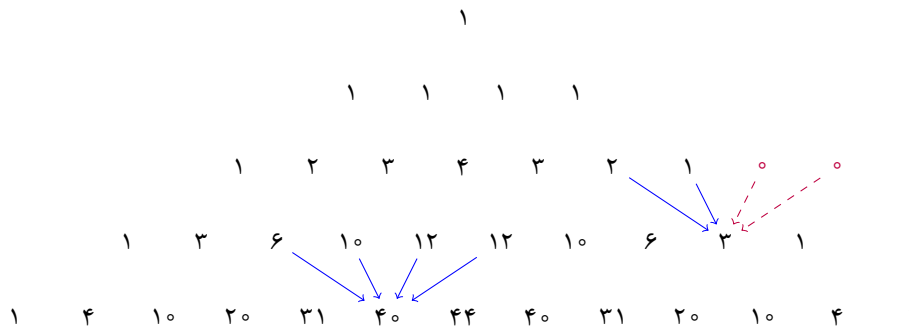
<sup>3</sup>Triangle of trinomial coefficients (trinomial triangle)



شکل ۵. مثلث سه‌جمله‌ای

Figure 5: Triangle of trinomial coefficients

آنگاه سطر  $n$ ام مثلث  $m + 1$  جمله‌ای، مشتمل است بر  $\binom{n}{k}_m$  ها به ازای  $[-(m.n + 1)/2] \leq k \leq [(m.n + 1)/2]$ ، مراجع [۳] و [۱۰] را برای مطالعه بیشتر می‌توانید ببینید. شکل ۶ مثلث چهارجمله‌ای را نمایش می‌دهد.



شکل ۶. مثلث چهارجمله‌ای

Figure 6: Triangle of quadrinomial coefficients

### ۶. مثلث استرلینگ نوع اول

با توجه به قضیه دوجمله‌ای می‌دانیم  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ . پس اعداد روی سطر  $n$ ام مثلث خیام که ضرایب دوجمله‌ای هستند، در واقع ضریب توان‌های  $x$  را در بسط  $(1+x)^n$  مشخص می‌کنند. یکی دیگر از چندجمله‌ای‌های کاربردی در ریاضیات، چندجمله‌ای‌های به صورت  $p_n(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$  هستند. از آنجا که  $p_n(1) = n!$ ، این نوع چندجمله‌ای را می‌توان تعمیم دیگری از تابع فاکتوریل در کنار تابع گاما نیز دانست، و به همین علت  $p_n(x)$  را چندجمله‌ای فاکتوریل (یا چندجمله‌ای فاکتوریل افزایشی)<sup>۴</sup> می‌نامند. برای تابع گاما می‌دانیم  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  که فوراً نتیجه می‌دهد  $p_n(x) = \Gamma(x+n)/\Gamma(x)$ . چندجمله‌ای  $p_n(x)$  را معمولاً با نمادگذاری پوچهامر<sup>۵</sup> به صورت  $\langle x \rangle_n$

<sup>4</sup>Rising factorial (ascending factorial, upper factorial) <sup>5</sup>Pochhammer

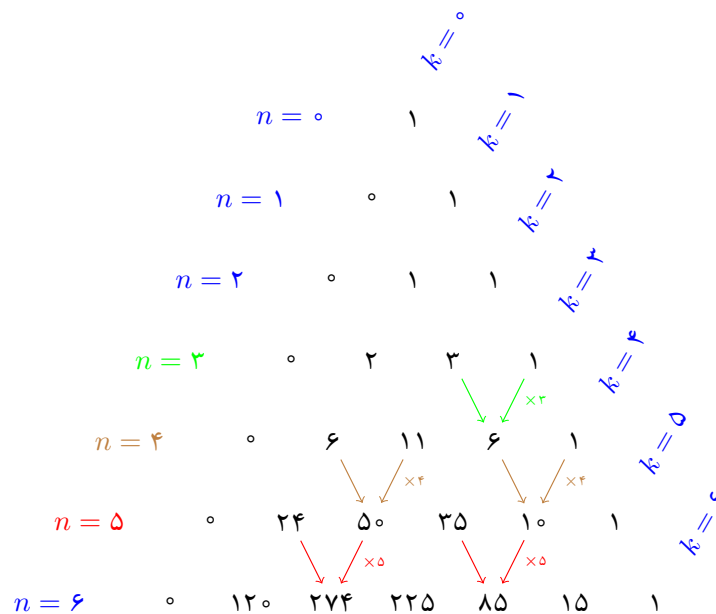
$(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$  نمایش می‌دهند و البته با این قرارداد که  $\langle x \rangle_0 = 1$ ، به ازای هر  $n \geq 0$  و هر  $0 \leq k \leq n$ ، ضریب  $x^k$  را در بسط چندجمله‌ای فاکتوریل  $\langle x \rangle_n$  با  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  نمایش می‌دهند و آن را یک عدد استرلینگ بدون علامت نوع ۱<sup>۶</sup> می‌نامند. بنابراین  $\langle x \rangle_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$  اکنون چون

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \langle x \rangle_{n+1} = (x+n)\langle x \rangle_n = x\langle x \rangle_n + n\langle x \rangle_n,$$

پس

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + n \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=0}^n n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

بنابراین برای  $1 \leq k \leq n$ ،  $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ، و به علاوه  $\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$ ، اما چون  $\langle x \rangle_1 = x$ ، پس  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$ ، بنابراین، به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ ،  $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$  و  $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ ، اکنون چون  $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ، پس اعداد استرلینگ بدون علامت نوع ۱، مثلی عددی به صورت شکل ۷ تشکیل می‌دهند. به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ ، به علاوه جمع اعداد روی سطر  $n$  در مثلث استرلینگ نوع ۱ برابر  $n!$  می‌باشد. برای اعداد استرلینگ بدون علامت نوع ۱، تعبیرهای ترکیباتی مختلفی نیز وجود دارد. به علاوه تا کنون خواص بسیار متفاوتی از آنها شناسایی شده است. برای مطالعه بیشتر در این موضوع می‌توانید [۱۱] را ببینید.



شکل ۷. مثلث استرلینگ نوع ۱

Figure 7: Triangle of the Stirling numbers of the first kind

<sup>6</sup>Unsigned Stirling numbers of the first kind

بد نیست یادآوری کنیم، اگر به ازای  $z \in \mathbb{C}$ ، تابع فاکتوریل تعمیم یافته را به صورت

$$(x|z)_n = x(x-z)(x-2z)\cdots(x-(n-1)z) \text{ و } (x|z)_0 = 1$$

تعریف کنیم، آنگاه  $(x|0)_n = x^n$ ،  $(x|1)_n = \langle x \rangle_n$ ، و  $(x|1)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ . چندجمله‌ای  $(x|1)_n$  را چندجمله‌ای فاکتوریل کاهش‌ی  $\gamma$  می‌نامند و با  $(x)_n$  نمایش می‌دهند. اعداد استرلینگ نوع ۱ که آنها را با نماد  $s(n, k)$  نمایش می‌دهند، ضرایب توانهای  $x$  در بسط  $(x)_n$  هستند. در واقع  $(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k$  و بعلاوه برای هر  $n$  طبیعی و  $1 \leq k \leq n$ ،  $s(n, k) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ .

علاوه بر تعریف جبری بیان شده برای اعداد استرلینگ نوع ۱، تعبیرهای ترکیباتی مختلفی نیز برای اعداد استرلینگ نوع ۱ وجود دارد. به‌عنوان مثال برای اعداد صحیح  $1 \leq k \leq n$ ، برابر است با تعداد راه‌های نشستن  $n$  شخص متمایز دقیقاً پشت  $k$  میز دایره‌ای که هیچکدام از میزها نباید خالی باشد. مثلاً چون موقع نشستن ۳ نفر دور ۲ میز که هیچکدام از میزها خالی نباشد، چون حتماً باید یک نفر پشت یک میز و ۲ نفر دیگر پشت یک میز دیگر قرار گیرند، پس حالت‌های ممکن عبارتند از:

$$\bullet (1)(23)$$

$$\bullet (2)(31)$$

$$\bullet (3)(21)$$

و بنابراین  $3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ . در مورد  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  نیز حالت‌های زیر رخ می‌دهند:

$$\bullet (14)(23), (13)(24), (12)(34)$$

$$\bullet (4)(123), (3)(124), (3)(142), (2)(134), (2)(143)$$

$$\bullet (1)(234), (1)(243)$$

و بنابراین  $11 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

## ۷. مثلث استرلینگ نوع دوم

برای اعداد استرلینگ نوع دوم  $^a$  ابتدا یک تعبیر ترکیباتی بیان کنیم و فرمول بازگشتی مرتبط با آنها را با همین تعبیر ترکیباتی معرفی می‌کنیم. تعداد راه‌هایی که یک مجموعه  $n$  عضوی را می‌توان به  $k$  تا از زیرمجموعه‌های ناتمی‌اش افزایش داد با نماد  $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$  نمایش می‌دهیم. مثلاً برای محاسبه  $\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$ ، از آنجایی که فقط ۷ افزایش‌تایی

$$\{1, 2\} \cup \{3, 4\}, \{1, 4\} \cup \{2, 3\}, \{1, 3\} \cup \{2, 4\}$$

$$\{1, 2, 3\} \cup \{4\}, \{1, 2, 4\} \cup \{3\}, \{1, 3, 4\} \cup \{2\}, \{2, 3, 4\} \cup \{1\}$$

برای مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  وجود دارد، پس  $\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = 7$ . توجه کنید که به‌وضوح  $\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$  و  $\begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1$ . اکنون فرض کنید تعداد افزایش‌های مختلف یک مجموعه  $n$  تایی، یعنی  $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ ‌ها را برای  $1 \leq k \leq n$  می‌دانیم. موقع شمردن تعداد افزایش‌های  $k$  تایی یک مجموعه  $n+1$  عضوی مثل  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ ، یکی از دو حالت زیر رخ خواهد داد.

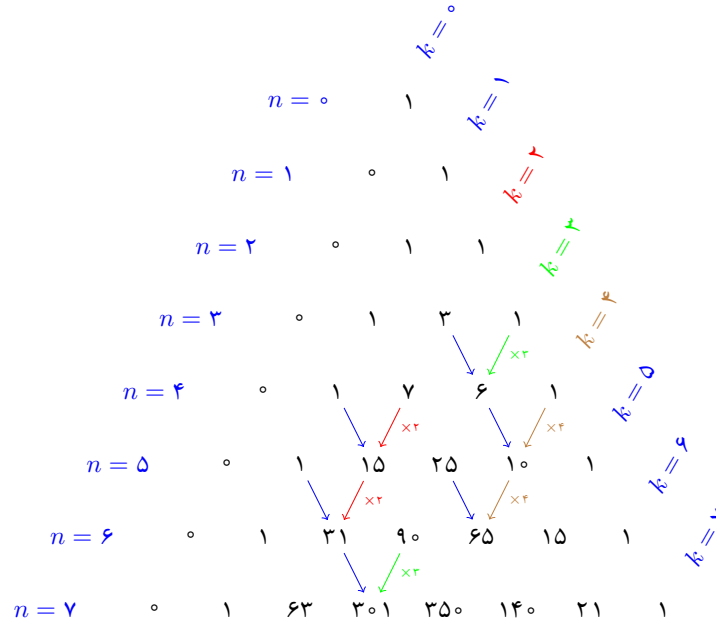
• یا یک افزایش  $k-1$  تایی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  داریم و زیرمجموعه  $\{n+1\}$  را به آن افزایش می‌افزاییم که

تبدیل به یک افزایش  $k$  تایی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  شود؛ و  $\begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix}$  تا از این افزایش‌ها موجود است.

<sup>7</sup>Falling factorial (descending factorial, lower factorial) <sup>8</sup>Stirling numbers of the second kind

• یا یک افراز  $k$  تایی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  داریم و  $n + 1$  را به هر یک از  $k$  تا زیرمجموعه آن افراز اضافه می‌کنیم تا تبدیل به یک افراز  $k$  تایی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n + 1\}$  شود؛ که مسلماً  $\{k\}^n$  تا از این افرازا موجود است.

بنابراین  $\{k\}^{n+1} = \{k\}^n + k\{k\}^n$ . پس اعداد استرلینگ نوع دوم، مثلثی عددی به شکل  $\Delta$  تشکیل خواهند داد (قطر  $k = 0$  با توجه به تعبیر جبری که در ادامه می‌آید در مثلث قرار گرفته است).



شکل ۸. مثلث استرلینگ نوع ۲

Figure 8: Triangle of the Stirling numbers of the second kind

جمع اعداد روی سطر  $n$  ام مثلث استرلینگ نوع ۲ را  $n$  امین عدد بل<sup>۹</sup> می‌نامند و با  $B(n)$  نمایش می‌دهند. پس

$$B(n) = \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} + \dots + \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}.$$

$B(n)$  برابر تعداد افرازهای یک مجموعه  $n$  عضوی، و یا به عبارت دیگر برابر تعداد رابطه‌های هم‌ارزی روی یک مجموعه  $n$  عضوی می‌باشد. تعبیر جبری اعداد استرلینگ نوع ۲، به نوعی برعکس تعبیر جبری اعداد استرلینگ نوع ۱ است. در واقع می‌توان نشان داد بسط  $x^n$  بر حسب چندجمله‌ای‌های  $(x)_1, (x)_2, \dots, (x)_n$  (که در بخش مثلث استرلینگ نوع ۱ آن‌ها را معرفی کردیم) به صورت  $x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k$  است.

یکی دیگر از جاهایی که اعداد استرلینگ نوع دوم و همچنین ضرایب بسط دوجمله‌ای ظاهر می‌شوند، در شمردن توابع روی مجموعه‌های متناهی است. در واقع اگر  $A$  و  $B$  به ترتیب دو مجموعه  $n$  و  $k$  عضوی باشند، برای  $k \leq n$  تعداد توابع

<sup>9</sup>Bell numbers (1, 1, 2, 5, 15, 52, ...)

یک به یک  $f: A \rightarrow B$  برابر است با  $k! \binom{n}{k}$ ، و برای  $k \geq n$  تعداد توابع پوشای  $f: A \rightarrow B$  برابر است با  $k! \binom{n}{k}$ . برای مطالعه بیشتر می‌توانید به مراجع [۱۱، ۱۲] مراجعه کنید.

### ۸. مثلث لا

در سال ۱۹۵۴ یک ریاضیدان اهل اسلونی به نام لا، اعداد لا  ${}^1$  را به عنوان تعداد افزایش‌های  $k$  تایی از یک کلمه  $n$  حرفی با حروف متمایز معرفی کرد. مثلاً چون  $n!$  افزایش‌های  $1$  تایی برای  $a_1 a_2 \dots a_n$  وجود دارد، لذا  $L(n, 1) = n!$ . افزایش‌های  $1$  تایی  $abc$  عبارتند از:

- $\{\{abc\}\}$  •
- $\{\{acb\}\}$  •
- $\{\{bac\}\}$  •
- $\{\{bca\}\}$  •
- $\{\{cab\}\}$  •
- $\{\{cba\}\}$  •

همچنین خواننده مشتاق می‌تواند بررسی کند که  $n(n-1)$  افزایش  $1-2$  تایی برای  $a_1 a_2 \dots a_n$  وجود دارد. مثلاً افزایش‌های دوتایی کلمه  $abc$  عبارتند از

$$\{\{a\}, \{bc\}\}, \{\{a\}, \{cb\}\}, \{\{b\}, \{ac\}\}, \{\{b\}, \{ca\}\}, \{\{c\}, \{ab\}\}, \{\{c\}, \{ba\}\}.$$

با استدلالی مشابه آنچه برای افزایش‌های  $k$  تایی یک مجموعه  $n$  عضوی در بخش اعداد استرلینگ نوع ۲ ارائه شد، می‌توان نشان داد  $L(n+1, k) = (n+k)L(n, k) + L(n, k-1)$ ، به علاوه روشن است که برای هر کلمه  $n$  تایی به صورت  $a_1 a_2 \dots a_n$  فقط یک افزایش  $n$  تایی  $\{\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}\}$  وجود دارد و بنابراین برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $L(n, n) = 1$ . اکنون از آنجایی که برای هر  $n$ ،  $L(n, n) = 1$ ، پس اعداد لا یک مثلث عددی به صورت شکل ۹ تشکیل می‌دهند. اعداد لا با لحاظ تعبیر جبری ارتباط نزدیکی با اعداد استرلینگ نوع ۱ و ۲ دارند. شش اتحاد زیر بیانگر این ارتباط جبری هستند:

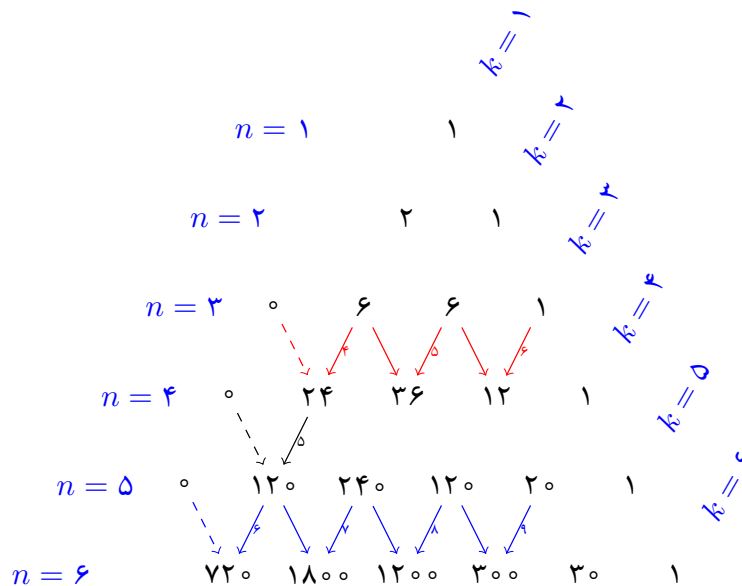
$$\begin{aligned} \langle x \rangle_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, & (x)_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k, \\ x^n &= \sum_{k=0}^n \{n\}_k (x)_k, & x^n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \{n\}_k \langle x \rangle_k, \\ \langle x \rangle_n &= \sum_{k=1}^n L(n, k) (x)_k, & (x)_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} L(n, k) \langle x \rangle_k. \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید اعداد لا ضرایب بسط چند جمله‌ای  $\langle x \rangle_n$  بر حسب چند جمله‌ای‌های  $(x)_1, (x)_2, \dots$  و  $(x)_n$  هستند. با توجه به اینکه  $\langle x \rangle_n = \sum_{k=1}^n L(n, k) (x)_k$  می‌توان نشان داد  $L(n, k) = \frac{n!}{(k-1)!}$  و به علاوه

$$L(n, k) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1} (n-k)!$$

به علت تشابه روابط مربوط به اعداد لا با اعداد استرلینگ، اعداد لا را اعداد استرلینگ نوع ۳ نیز می‌نامند. برای مطالعه بیشتر در این مورد می‌توانید مراجع [۱۱، ۱۳] را ببینید.

<sup>10</sup>Lah numbers (Stirling numbers of the third kind)



شکل ۹. مثلث اعداد لا

Figure 9: Triangle of Lah numbers

### ۹. مثلث اویلر

یک تعبیر ترکیبیاتی از اعداد اویلر<sup>۱۱</sup> به این صورت است که برای هر عدد طبیعی  $n$  و هر عدد صحیح  $0 \leq k \leq n-1$ ، عدد اویلر  $\langle n \rangle_k$  برابر است با تعداد جایگشت‌های  $n$  حرفی مختلف کلمه  $a_1 a_2 \dots a_n$  (مشمول بر حروف متمایز) که در آنها  $k$  جفت از اندیس‌های حروف، روند صعودی خود را حفظ کرده‌اند. به‌عنوان مثال در مورد کلمه ۱۲۳۴ تنها جایگشتی که هیچ جفتی از اعداد روند صعودی خود را ندارند ۴۳۲۱ است، پس  $\langle 4 \rangle_0 = 1$ . جایگشت‌هایی از ۱۲۳۴ که یک جفت از اعداد روند صعودی خود را دارند به‌صورت زیر است و بنابراین  $\langle 4 \rangle_1 = 11$ .

۳۲۱۴، ۲۱۴۳، ۴۲۱۳، ۳۱۴۲، ۱۴۳۲، ۴۱۳۲، ۴۳۱۲، ۳۲۴۱، ۲۴۳۱، ۴۲۳۱، ۳۴۲۱

جایگشت‌هایی از ۱۲۳۴ که دو جفت از اعداد روند صعودی خود را دارند به‌صورت زیر است، پس  $\langle 4 \rangle_2 = 11$ .

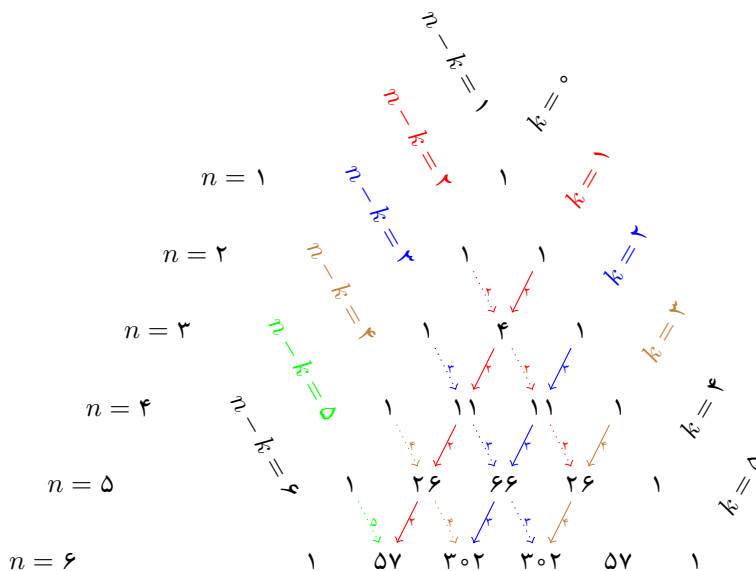
۴۱۲۳، ۳۴۱۲، ۳۱۲۴، ۲۴۱۳، ۲۳۴۱، ۲۳۱۴، ۲۱۳۴، ۱۳۴۲، ۱۳۲۴، ۱۲۴۳

در نهایت تنها جایگشتی از ۱۲۳۴ که سه جفت از اعداد روند صعودی خود را دارند ۱۲۳۴ است و بنابراین  $\langle 4 \rangle_3 = 1$ .

در حالت کلی تنها جایگشتی که هیچ جفت از اندیس‌های حروف روند صعودی خود را ندارند  $a_n \dots a_2 a_1$  می‌باشد و لذا  $\langle n \rangle_0 = 1$ . همچنین تنها جایگشتی که همه جفت اندیس‌ها در آن روند صعودی دارند  $a_1 a_2 \dots a_n$  می‌باشد و لذا  $\langle n \rangle_{n-1} = 1$ . برای یافتن فرمول بازگشتی برای اعداد اویلر و تشکیل مثلث اویلر، از روی جایگشت‌های  $k-1$  و  $k$  جفت اندیس صعودی از  $a_1 a_2 \dots a_n$  با افزودن  $a_{n+1}$  می‌توان جایگشت‌های  $k$  جفت اندیس صعودی از  $a_1 a_2 \dots a_{n+1}$  را به‌دست آورد. در واقع با افزودن  $a_{n+1}$  به جایگشت‌های  $k-1$  جفت اندیس صعودی از  $a_1 a_2 \dots a_n$ ، تعداد  $n - (k-1) = n - k + 1$  جایگشت  $k$  جفت اندیس صعودی از  $a_1 a_2 \dots a_{n+1}$  به‌دست می‌آید. همچنین با افزودن  $a_{n+1}$  به جایگشت‌های  $k$  جفت

<sup>11</sup>Eulerian numbers

اندیس صعودی از  $a_1 a_2 \dots a_n$ ، تعداد  $k+1$  جایگشت با  $k$  جفت اندیس صعودی از  $a_1 a_2 \dots a_{n+1}$  به دست می‌آید. بنابراین  $\langle n+1 \rangle = (k+1)\langle n \rangle + (n+1-k)\langle n-1 \rangle$ . مثلث عددی اویلر را به تصویر کشیده است.



شکل ۱۰. مثلث اویلر

Figure 10: Euler triangle (triangle of Eulerian numbers)

برای اعداد اویلر نیز تعبیرهای مختلفی ارائه شده است. یکی از این تعبیرها، نوشتن توان‌های مختلف عدد طبیعی  $x$  بر حسب ضرایب بسط دو جمله‌ای است. برای عدد طبیعی  $x$ ،  $x = \binom{x}{1}$ ،  $x^2 = \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2}$ ،  $x^3 = \binom{x}{3} + 4\binom{x+1}{3} + \binom{x+2}{3}$  و به طور کلی  $x^n = \binom{n}{0}\binom{x}{n} + \binom{n}{1}\binom{x+1}{n} + \dots + \binom{n}{k}\binom{x+k}{n} + \dots + \binom{n}{n-1}\binom{x+n-1}{n}$ . برای هر عدد صحیح  $n \geq 1$  و هر  $0 \leq k \leq n-1$ ،  $\langle n \rangle_k$ ها را اعداد اویلر می‌نامند. به عنوان یک تمرین، خواننده مشتاق می‌تواند ثابت کند که جمع اعداد سطر  $n$ ام مثلث اویلر، مشابه مثلث استرلینگ نوع ۱، برابر  $n!$  است. برای مطالعه بیشتر در این مورد می‌توانید مراجع [۱۲، ۱۴] را ببینید.

### ۱۰. مثلث کاتالان

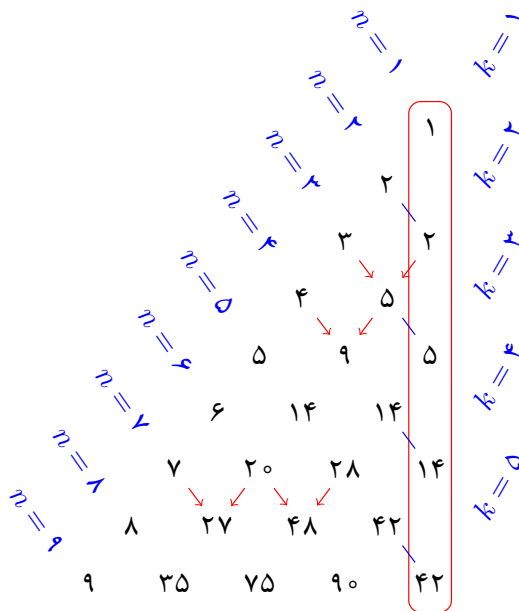
اعداد کاتالان<sup>۱۲</sup>، در قرن ۱۸ به شکل جداگانه ابتدا توسط اویلر و سپس توسط کاتالان معرفی شدند. با توجه به تعریف خود کاتالان، در ضرب یک دنباله از  $n$  متغیر غیر متمایز، که ضرب آنها خاصیت شرکت‌پذیری و جابجایی ندارد و بنابراین نیاز به پرانتزگذاری است، عدد کاتالان  $n$ ام برابر است با تعداد روش‌های پرانتزگذاری درست برای همه حالت‌های مختلف ضرب عناصر آن دنباله. با این تعریف به راحتی می‌توان دید  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  [۲، مثال ۱۲.۲۰۱]. این موضوع را می‌توان این‌گونه نیز بیان کرد که عدد کاتالان  $n$ ام معرف تعداد راه‌های پرانتزگذاری با  $n$  جفت پرانتز راست و چپ است. مثلاً چون چون تعداد راه‌های پرانتزگذاری با سه جفت پرانتز به صورت زیر است، پس  $C_3 = 5$ ،

$$()()(), ()(()), ((())), ((())), ((())())$$

<sup>12</sup>Catalan numbers

اگر به جای پرانتهای راست عدد ۱ و به جای پرانتهای چپ عدد ۱- را قرار دهیم، تعبیر دیگری از اعداد کاتالان را می‌توان بیان کرد. در واقع عدد کاتالان  $n$ ام برابر است با تعداد همه دنباله‌های  $a_1 a_2 \dots a_n$  که تا از  $a_i$ ها برابر ۱، و تا از  $a_i$ ها برابر ۱- است و مجموع جزئی دنباله به صورت  $a_1 + a_2 + \dots + a_j$  همواره نامنفی است [۱۲]، مثال ۴ بخش ۵.۷].

در سال ۱۹۹۶، تعمیمی از اعداد کاتالان ارائه شد: برای  $n \geq 1$  و  $1 \leq k \leq n$ ، تعداد دنباله‌های  $a_1 a_2 \dots a_{n+k}$  که تا از  $a_i$ ها برابر ۱، و تا از  $a_i$ ها برابر ۱- است و مجموع جزئی دنباله به صورت  $a_1 + a_2 + \dots + a_j$  همواره نامنفی است، را اگر با  $C_{n,k}$  نمایش دهیم، آنگاه برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $C_{n,1} = n$  و به علاوه برای  $1 < k < n+1$ ،  $C_{n+1,k} = C_{n+1,k-1} + C_{n,k}$  و بالاخره  $C_{n+1,n+1} = C_{n+1,n}$  [۱۵]. به علاوه به‌وضوح با توجه به تعبیر فوق از اعداد کاتالان،  $C_{n,n} = C_n$ . این روابط بازگشتی، مثلث عددی شکل ۱۱ را ایجاد می‌کنند که همان‌طور که مشخص است، اعداد کاتالان روی ستون آخر آن ظاهر می‌شوند. برای مطالعه بیشتر مراجع [۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷] را ببینید.



شکل ۱۱. مثلث کاتالان

Figure 11: Catalan's triangle

### ۱۱. مثلث نارایانا

در سال ۱۹۵۵ یک آمارشناس کانادایی به نام نارایانا، دسته‌ای از اعداد را که امروزه به اعداد نارایانا<sup>۱۳</sup> مشهور هستند، مورد مطالعه قرار داد. اولین توجه به این دسته از اعداد، البته ظاهراً به سال ۱۹۱۵ برمی‌گردد ولی کشف ارتباط این اعداد با اعداد کاتالان و نیز ارائه تعبیر ترکیبیاتی از آنها توسط نارایانا باعث شد، این اعداد به نام نارایانا شناخته شوند.

<sup>13</sup>Narayana numbers

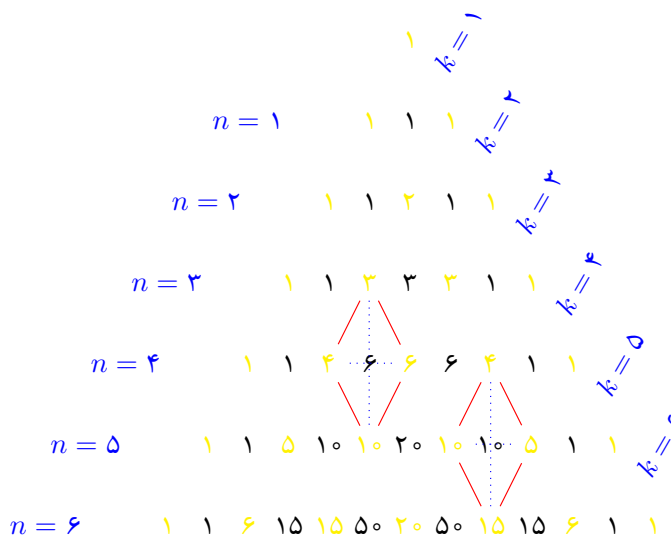
به ازای هر  $n \geq 1$  و هر  $1 \leq k \leq n$ ، عدد  $N_{n,k}$  برابر است با تعداد روش‌های پرانتز گذاری  $n$  جفت پرانتز به طوری که دقیقاً  $k$  دسته پرانتز جدا از هم تشکیل شود. به عنوان مثال  $N_{4,k}$  به ازای  $1 \leq k \leq 4$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} k = 1 & \quad ((( ))) \\ k = 2 & \quad ( )(( )), ( ( ) ( )), ( ( ) ( )), ( ( ( ) ( )), ( ( ( ) ( )), ( ( ( ) ( ) ) \\ k = 3 & \quad ( ) ( ( ( )), ( ) ( ( ) ( )), ( ( ) ( ) ( )), ( ( ( ) ( ) ( )), ( ( ) ( ) ( ) ( )), ( ( ) ( ) ( ) ( ) \\ k = 4 & \quad ( ) ( ) ( ) ( ) \end{aligned}$$

با توجه به این تعریف و همچنین در نظر گرفتن تعریف مشابه در اعداد کاتالان، به وضوح  $\sum_{k=1}^n N_{n,k} = C_n$ . به علاوه می‌توان نشان داد  $N_{n,k} = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$ ، که نتیجه می‌دهد

$$N_{n,k} = \left| \begin{array}{cc} \binom{n-1}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{array} \right|.$$

بنابراین  $N_{n,k} = \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} \binom{n}{k}$  این اتحاد فوراً منجر به تشکیل مثلث نارایانا به صورت شکل ۱۲ می‌شود.



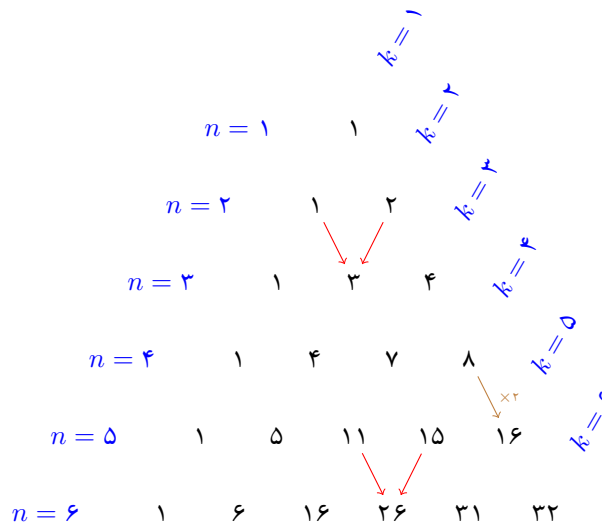
شکل ۱۲. مثلث نارایانا

Figure 12: Narayana triangle

در شکل ۱۲، اعداد زرد رنگ مثلث خیام را مشخص می‌کنند. اعداد مشکی با درمینان گرفتن از عناصر چهارگانه‌ای از مثلث خیام به دست می‌آیند که در شکل مشخص شده است. به راحتی می‌بینید جمع اعداد (مشکی) روی سطر  $n$  ام مثلث نارایانا، برابر با عدد کاتالان  $C_n$  است. برای مطالعه بیشتر به مراجع [۱۴، ۱۸، ۱۹] مراجعه کنید.

### ۱۲. مثلث برنولی

برای هر  $n \geq 0$  و هر  $0 \leq m \leq n$ ، جمع  $m$  عدد اول سطر  $n$  مثلث خیام را با  $B_{n,m}$  نمایش می‌دهند. اعداد  $B_{n,m}$  مثلثی عددی، مشهور به مثلث برنولی<sup>۱۴</sup> تشکیل می‌دهند، پس  $B_{n,m} = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k}$  و  $B_{n,n} = 2^n$ . به راحتی می‌توانید بررسی کنید که برای هر  $m < n + 1$ ،  $B_{n+1,m} = B_{n,m} + B_{n,m-1}$  و  $B_{n+1,n+1} = 2B_{n,n}$ . اعداد روی مثلث برنولی را با اعداد برنولی نباید اشتباه بگیرید. اعداد برنولی، اعدادی هستند که در بسط  $1^m + 2^m + \dots + n^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$  ظاهر می‌شوند و آنها را با  $B_i$  نمایش می‌دهند. با این بسط جمع‌هایی مثل  $1^9 + 2^9 + \dots + 1000^9$  به جمع  $10^9$  عدد تحویل شده و خیلی سریع قابل محاسبه هستند.



شکل ۱۳. مثلث برنولی

Figure 13: Bernoulli's triangle

### ۱۳. مثلث ضرایب چند جمله‌ای‌های چیشف

در آنالیز عددی به ندرت حوزه‌ای از تحلیل عددی وجود دارد که چند جمله‌ای‌های چیشف در آن ظاهر نشوند. اگر در بسط توانهای اتحاد دموآر، همه توان‌های زوج  $\sin \theta$  را بر حسب  $\cos \theta$  بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 (\cos \theta + i \sin \theta)^0 &= 1 \\
 (\cos \theta + i \sin \theta)^1 &= (1 \cos \theta) + i(1) \sin \theta \\
 (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= (-1 + 2 \cos^2 \theta) + i(2 \cos \theta) \sin \theta \\
 (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= (-3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta) + i(-1 + 4 \cos^2 \theta) \sin \theta \\
 (\cos \theta + i \sin \theta)^4 &= (1 - 8 \cos^2 \theta + 8 \cos^4 \theta) + i(-4 \cos \theta + 8 \cos^3 \theta) \sin \theta
 \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Bernoulli's triangle

اکنون اگر قرار دهیم  $T_0(x) = 1$  و برای  $n \geq 1$  قرار دهیم

$$(1) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = T_n(\cos \theta) + iU_{n-1}(\cos \theta) \sin \theta$$

آنگاه  $T_n(x)$  ها را چندجمله‌ای‌های چیبیشف نوع اول<sup>۱۵</sup> و  $U_n(x)$  ها را چندجمله‌ای‌های چیبیشف نوع دوم<sup>۱۶</sup> می‌نامند. با این توصیف داریم:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 & U_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x & U_1(x) &= 2x \\ T_2(x) &= -1 + 2x^2 & U_2(x) &= -1 + 4x^2 \\ T_3(x) &= -3x + 4x^3 & U_3(x) &= -4x + 8x^3 \\ T_4(x) &= 1 - 8x^2 + 8x^4 & U_4(x) &= -8x + 16x^3 \end{aligned}$$

توجه دارید که برای هر  $n$  زوج، چندجمله‌ای‌های  $T_n(x)$  و  $U_n(x)$  از درجه  $n$  و زوج هستند و برای  $n$  های فرد، این چندجمله‌ای‌ها از درجه  $n$  و فرد هستند. به‌علاوه همان‌طور که الگوی بالا نشان می‌دهد، به راحتی می‌توان نشان داد ضریب جمله درجه  $n$  در  $T_n(x)$  و  $U_n(x)$  مثبت و ضرایب سایر جملات یکی در میان منفی و مثبت هستند. حال اگر بنویسیم

$$\begin{aligned} T_n(x) &= a_{n,n}x^n - a_{n,n-2}x^{n-2} + \dots + (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,n-2\lfloor n/2 \rfloor} x^{n-2\lfloor n/2 \rfloor} \\ U_{n-1}(x) &= a_{n,n-1}x^{n-1} - a_{n,n-3}x^{n-3} + \dots + (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{n,n-1-2\lfloor (n-1)/2 \rfloor} x^{n-1-2\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \end{aligned}$$

آنگاه چنانچه در معادله ۲ به جای  $\cos \theta$  از  $x$  و به جای  $\sin \theta$  از  $y$  استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$(2) \quad \begin{aligned} (x + iy)^n &= T_n(x) + iyU_{n-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k a_{n,n-2k} x^{n-2k} + iy \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k a_{n,n-1-2k} x^{n-1-2k}, \end{aligned}$$

و از آنجایی که  $y^2 = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$ ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + iyU_n(x) &= (x + iy)^{n+1} \\ &= (x + iy)^n (x + iy) \\ &= (T_n(x) + iyU_{n-1}(x)) (x + iy) \\ &= (xT_n(x) - (1 - x^2)U_{n-1}(x)) + iy(T_n(x) + xU_{n-1}(x)). \end{aligned}$$

پس

$$(3) \quad T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1 - x^2)U_{n-1}(x),$$

و

$$(4) \quad U_n(x) = T_n(x) + xU_{n-1}(x).$$

<sup>15</sup>Chebyshev polynomials of the first kind <sup>16</sup>Chebyshev polynomials of the second kind

اکنون از آنجایی که برای  $n$  های فرد  $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$  و برای  $n$  های زوج  $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$ ، با باز کردن ۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k a_{n,n-2k} x^{n+1-2k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k a_{n,n-1-2k} x^{n-1-2k} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k a_{n,n-1-2k} x^{n+1-2k} \\ &= (\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor (n-1)/2 \rfloor) (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,0} x \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k (a_{n,n-2k} + a_{n,n-1-2k}) x^{n+1-2k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k a_{n,n-1-2k} x^{n-1-2k} \\ &= (a_{n,n} + a_{n,n-1}) x^{n+1} + (\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor (n-1)/2 \rfloor) (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,0} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k (a_{n,n-2k} + a_{n,n-1-2k}) x^{n+1-2k} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k a_{n,n-1-2k} x^{n-1-2k} \\ &= (a_{n,n} + a_{n,n-1}) x^{n+1} + (\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor (n-1)/2 \rfloor) (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,0} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1} (-1)^{k+1} (a_{n,n-2-2k} + a_{n,n-3-2k}) x^{n-1-2k} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^{k+1} a_{n,n-1-2k} x^{n-1-2k} \\ &= (a_{n,n} + a_{n,n-1}) x^{n+1} + (\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor (n-1)/2 \rfloor) (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,0} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1} (-1)^{k+1} (a_{n,n-1-2k} + a_{n,n-2-2k} + a_{n,n-3-2k}) x^{n-1-2k} \\ &\quad + (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1} a_{n,n-1-2(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)} x^{n-1-2(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)}. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به اینکه  $T_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (-1)^k a_{n+1,n+1-2k} x^{n+1-2k}$  نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} a_{n+1,n+1} &= a_{n,n} + a_{n,n-1}, & 0 \leq n, \\ a_{n+1,0} &= a_{n,0}, & \text{فرد } 0 \leq n, \\ a_{n+1,1} &= a_{n,0} + a_{n,1}, & \text{زوج } 2 \leq n, \\ a_{n+1,n+1-2k} &= a_{n,n+1-2k} + a_{n,n-2k} + a_{n,n-1-2k}, & 1 \leq k, 2 \leq n. \end{aligned}$$

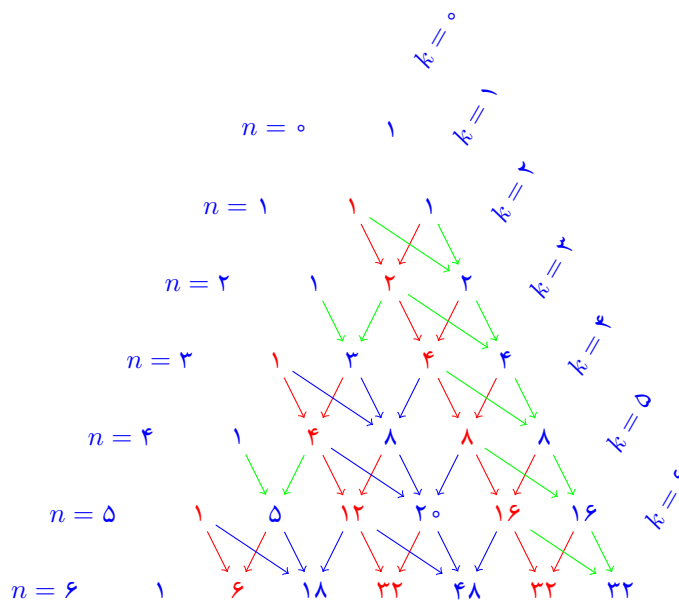
حال با بسط دادن ۴ داریم

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k a_{n,n-2k} x^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k a_{n,n-1-2k} x^{n-2k} \\ &= (\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor (n-1)/2 \rfloor) (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,0} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k (a_{n,n-2k} + a_{n,n-1-2k}) x^{n-2k}, \end{aligned}$$

که با توجه به اینکه  $U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k a_{n+1,n-2k} x^{n-2k}$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a_{n+1,0} &= a_{n,0}, & \text{زوج } 0 \leq n, \\ a_{n+1,n-2k} &= a_{n,n-2k} + a_{n,n-1-2k}, & 1 \leq k, 1 \leq n. \end{aligned}$$

اکنون اگر ضرایب چند جمله‌ای‌های  $T_n(x)$  و  $U_{n-1}(x)$  به ازای  $1 \leq n$  را بر حسب توان‌های  $x$  و بدون علامت بر حسب روابط اخیر بنویسیم، مثلی عددی به شکل ۱۴ خواهیم داشت:



شکل ۱۴. مثلث چیشف

Figure 14: Triangle of the coefficients of Chebyshev Polynomials

اگر عناصر روی قطر  $k = 0$  را برابر ۱ در نظر بگیریم و چند صفر نیز به صورت شکل ۱۵ داشته باشیم، روابط بین عناصر مثلث چیشف به صورت زیر هستند:

$$a_{n,k} = \begin{cases} a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} & \text{فرد } n-k, k > 0 \\ a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} + a_{n-1,k+1} & \text{زوج } n-k, k > 0. \end{cases}$$

خوانندگان محترم می‌توانند با توجه به شکل ۱۶ که در ادامه آمده است، رابطه بازگشتی دیگری نیز برای اعداد مثلث چیشف بنویسند.

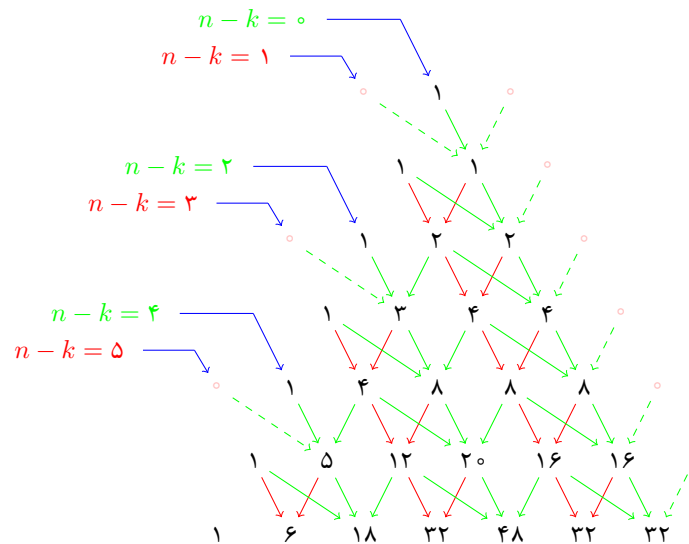
مثلث شامل ضرایب چندجمله‌ای‌های چیشف ۱۷ به صورت‌های مختلفی معرفی شده است. اولین بار [۲۱] این مثلث را به صورتیکه در اینجا معرفی شد، به تصویر کشیده است. در عین حال جزئیات اثبات روابط که در اینجا ذکر شد و روابطی که در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ آمده‌اند جدید هستند. یک شکل دیگر از مثلث شامل ضرایب چندجمله‌ای‌های چیشف را می‌توانید در [۲۰] ببینید.

#### ۱۴. مثلث بل

اعداد بل را در بخش ۷ که مربوط به اعداد استرلینگ نوع ۲ بود، معرفی کردیم. به ازای هر  $n \geq 0$ ، عدد بل  $n$ ام برابر است با تعداد افزای‌های یک مجموعه  $n$  عضوی. برای  $n \geq 1$  گفتیم جمع اعداد روی سطرها مثلث استرلینگ نوع

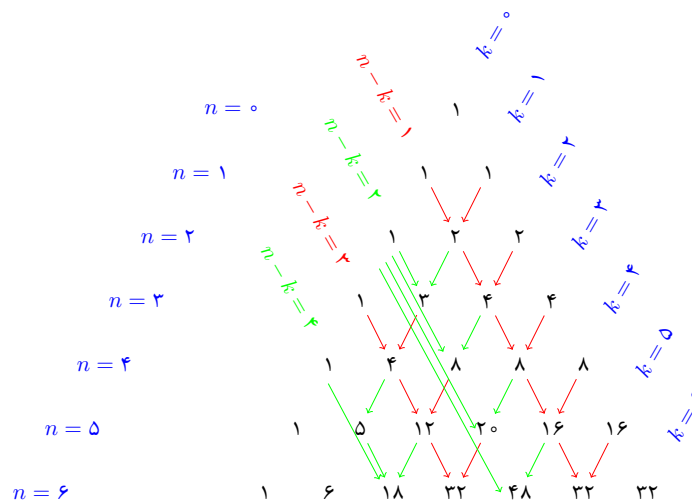
<sup>17</sup>triangle of coefficients of Chebyshev polynomials

۲، اعداد پل را می‌دهد. بنابراین اعداد پل عبارتند از  $۰, ۱, ۲, ۵, ۱۵, ۵۲, ۲۰۳, \dots$ . پل در سال ۱۹۳۴، هنگام مطالعه بر چندجمله‌ای‌های پل به این اعداد برخورد کرد، ولی قبل از او، افراد دیگری نیز روی این اعداد کارهایی انجام داده بودند، که به نظر می‌رسد اولین بار دوبینسکی در سال ۱۸۷۷ از آنها نام برده باشد [۲۲].



شکل ۱۵. مثلث چیشف

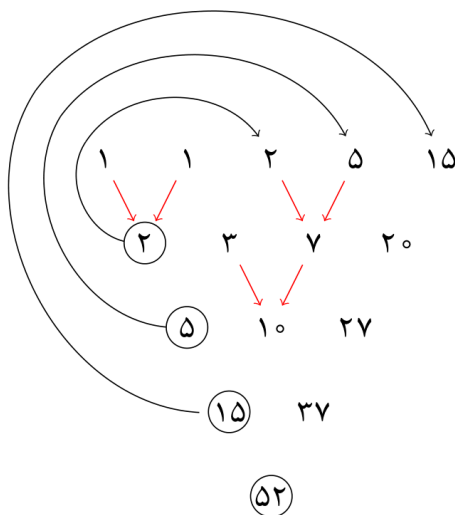
Figure 15: Triangle of the coefficients of Chebyshev Polynomials



شکل ۱۶. مثلث چیشف

Figure 16: Triangle of the coefficients of Chebyshev Polynomials

مثث بل<sup>۱۸</sup>، برای ساخت عدد بل  $n$ ام از روی اعداد بل ماقبلش به کار می‌رود. شکل ۱۷ نشان می‌دهد چگونه از روی اعداد ۱، ۱، عدد بل بعدی، یعنی ۲ ساخته می‌شود و سپس با انتقال عدد ۲ به سطر اول، عدد بل بعدی، یعنی ۵ ساخته می‌شود و با ادامه فرایند همه اعداد بل در سطر اول ظاهر خواهند شد.



شکل ۱۷. مثث بل

Figure 17: Bell triangle

این روش محاسبه اعداد بل البته منسوب به پیرس (و به صورت جداگانه منسوب به اتکین) است و به همین دلیل گاهی اوقات مثث بل را مثث پیرس یا آرایه اتکین نیز می‌نامند [۲۳، ۲۴].

به جز فرمول  $B(n) = \sum_{k=1}^n \{n \atop k\}$  که در زیر بخش ۷ معرفی شد، و نیز روش استفاده از مثث بل، فرمول‌های دیگری مثل  $B(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$  و  $B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k)$  نیز برای محاسبه اعداد بل ارائه شده است. برای مطالعه بیشتر مراجع [۱۲، ۱۶، ۲۵] را ببینید.

### ۱۵. نکته پایانی

در مقاله حاضر برخی از مشهورترین مثث‌های عددی، مشابه مثث خیام، را کوتاه معرفی و بررسی کردیم. از مثث‌های عددی که شامل اعداد صحیح منفی و یا شامل اعداد گویا بودند، یادی نکردیم و فقط به مثث‌های عددی مشهوری که مشتمل بر اعداد طبیعی بودند و تا حدودی مشابه مثث خیام ساخته می‌شدند، توجه داشتیم. به علاوه سعی کردیم به تعبیرهای مختلف جبری و ترکیبیاتی آنها نیز تا حدودی توجه داشته باشیم. محاسبات مربوط به مثث چیشف و مثث چیشف تا حدودی جدید هستند. شکل‌های مربوط به مثث بل و مثث کاتالان را به صورت جدیدی رسم کرده‌ایم تا مشابهت‌شان به مثث خیام بیشتر شود. با توجه محدودیت حجمی یک مقاله، نمی‌شد به بررسی خواص این مثث‌ها پرداخته شود و شاید بررسی خواص هر یک از این مثث‌های عددی، نیازمند یک مقاله جداگانه باشد. برای مطالعه بیشتر می‌توانید به مراجع [۱، ۲، ۴، ۱۲، ۱۴] مراجعه کنید.

<sup>18</sup>Bell triangle (Peirce triangle, Aitken's array)

## مراجع

- [۱] س. م. ا. خاتمی، زیبایی‌های مثلث خیام-پاسکال، ریاضی و جامعه، ۵ no. ۲ (۱۳۹۹) ۷۵-۹۲.
- [۲] م. میرزاویری، شمردنی‌ها را بشمار، آهنگ قلم، ۱۳۹۰.
- [۳] ع. ثابتیان، مثلث خیام-پاسکال و گونه‌ای تعمیم آن، رشد آموزش ریاضی، ۴۲ (۱۳۷۴) ۵۴-۵۷.
- [۴] ج. بهبودیان، م. بیات، و ح. تیموری فعال، مثلث عددی خیام-پاسکال و مثلث‌های شبیه آن، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۵.
- [5] J. L. Coolidge, The story of the binomial theorem, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949) 147-157.
- [6] R. Rashed, *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra*, (Translated from the 1984 French original by A. F. W. Armstrong), **156**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [7] N. A. Draim and M. Bicknell, Sums of  $n$ -th powers of roots of a given quadratic equation, *Fibonacci Quart.*, **4** (1966) 170-178.
- [8] M. Senn, *(1,2)-Pascal triangle - OeisWiki*, 2016.
- [9] H. Belbachir, A. Mehdaoui and L. Szalay, Diagonal sums in Pascal pyramid, *J. Combin. Theory Ser. A*, **165** (2019) 106-116.
- [10] G. E. Andrews, Euler's "exemplum memorabile inductionis fallacis" and  $q$ -trinomial coefficients, *J. Amer. Math. Soc.*, **3** (1990) 653-669.
- [11] T. Mansour and M. Schork, *Commutation relations, normal ordering, and Stirling numbers*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [12] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik. *Concrete mathematics. A foundation for computer science*, Second edition. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994.
- [13] S. Daboul, J. Mangaldan, M. Z. Spivey and P. J. Taylor, The Lah numbers and the  $n$ th derivative of  $e^{1/x}$ , *Math. Mag.*, **86** (2013) 39-47.
- [14] T. Kyle Petersen, *Eulerian numbers*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser/Springer, New York, 2015.
- [15] D. F. Bailey, Counting Arrangements of 1's and -1's, *Math. Mag.*, **69** (1996) 128-131.
- [16] H. S. Wilf, *generatingfunctionology*, Third edition. A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2006.
- [17] W. Epllett, A note about the catalan triangle, *Discrete Math.*, **25** (1979) 289-291.
- [18] N. Dershowitz and S. Zaks, Ordered trees and noncrossing partitions, *Discrete math.*, **62** (1986) 215-218.
- [19] E. Miller and V. Reiner, *Geometric combinatorics*, AMS, 2007.
- [20] W. Lang, *Triangle of coefficients of Chebyshev's  $T(n, x)$  polynomials (powers of  $x$  in increasing order)*, OeisWiki, 2013.
- [21] A. Macdougall, A Pascal-like Triangle for Coefficients of Chebyshev Polynomials, *The Mathematical Gazette*, **83** (1999) 276-280.
- [22] G. Dobinski, Summirung der reihe  $\sum \frac{n^m}{m!}$  für  $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , *Grunert's Archiv*, **61** (1877) 333-336.
- [23] C. S. Peirce, On the algebra of logic, *Amer. J. Math.*, **3** (1880) 15-57.
- [24] A. C. Aitken, A problem in combinations, *Edinburgh Mathematical Notes*, **28** (1933) xviii-xxiii.
- [25] J. H. Conway and R. K. Guy. *The book of numbers*, Copernicus, New York, 1996.

سید محمد امین خاتمی

بیرجند، دانشگاه صنعتی بیرجند، گروه علوم کامپیوتر

khatami@birjandut.ac.ir

سید محمد امین خاتمی، استادیار منطق ریاضی گروه علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی بیرجند است. نظریه مدل منطق پیوسته و منطق فازی، نظریه مجموعه‌ها، ترکیبیات، آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی از علایق پژوهشی آقای خاتمی هستند.



محمدی هادی مصلحی

تهران، دانشگاه پیام نور تهران، گروه ریاضی

mh\_moslehi@pnu.ac.ir

محمد هادی مصلحی، دانش آموخته سال ۹۴ دکتری هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی) از دانشگاه بیرجند تحت نظارت دکتر حاجی محمد محمدی نژاد می‌باشد. سیستم های دینامیکی، معادلات دیفراسیل، انشعاب و آشوب، مدلسازی ریاضی و محاسبات عددی از علایق پژوهشی آقای مصلحی هستند.

