

مدل و عدد سنگ‌ریزه گراف

فاطمه آقایی میبیدی و سعید علیخانی*

چکیده. موضوعات بسیاری در نظریه گراف وجود دارند که می‌توانند تحت عنوان «حرکت اشیاء حول یک گراف» قرار گیرند. برای مثال، در بهینه‌سازی شبکه، محموله‌ها با توجه به هزینه‌های تعلق گرفته به یال‌ها، از برخی رئوس (منابع) به برخی دیگر از رئوس (تقاضا) به نحوی منتقل می‌شوند که این کار به ارزان‌ترین حالت انجام شود. یک حرکت سنگ‌ریزه در گراف، شامل برداشتن دو سنگ‌ریزه از یک رأس گراف و سپس قرار دادن یک سنگ‌ریزه در رأس مجاور آن است. اگر یک توزیع (یا پیکربندی) از سنگ‌ریزه‌ها به ما اجازه دهد که با اعمال مکرر حرکات سنگ‌ریزه، حداقل یک سنگ‌ریزه را به هر رأس حرکت دهیم، آنگاه آن توزیع، یک سنگ‌ریزه از گراف نامیده می‌شود. از اساسی‌ترین سوالات این است که چه تعداد سنگ‌ریزه مورد نیاز است تا ضمانت کند که هر پیکربندی با این تعداد، می‌تواند یک سنگ‌ریزه را روی هر رأس هدف مشخص قرار دهد. به کمترین تعداد سنگ که این شرط را برآورده کند، عدد سنگ‌ریزه گراف می‌گویند. در این مقاله، پس از بررسی ریشه‌های نظریه اعداد مدل گراف سنگ‌ریزه که به نوبه خود موضوع پرباری است، عدد سنگ‌ریزه را برای گراف‌های خاص مطالعه کرده و همچنین یک رویکرد بهینه‌سازی در این موضوع، به نام توابع وزن را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱. مقدمه

موضوعاتی در نظریه گراف وجود دارند که تحت عنوان «حرکت اشیاء حول یک گراف» قصد انجام عملی را با صرفه‌ترین و بهینه‌ترین حالت دارند. برای مثال؛ در بهینه‌سازی شبکه، محموله‌ها با توجه به هزینه‌های تعلق گرفته به یال‌ها از برخی رئوس (منابع) به برخی دیگر از رئوس (تقاضا) به نحوی منتقل می‌شوند که این کار به ارزان‌ترین حالت انجام شود. در جریان شبکه با توجه به ظرفیت‌های موجود در هر یال و حفظ جریان در رئوس دیگر در طول مسیر، سعی می‌شود که مقدار ماده انتقال یافته از منبع (چشمه) به مقصد (چاه) را به حداکثر برساند. در نسخه‌های متفاوت بازی‌های تعقیب و گریز، پلیس‌ها و سارقان به نوبت در امتداد یال‌ها حرکت می‌کنند و پلیس سعی دارد که با فرود آمدن روی سارقان، آن‌ها را دستگیر کند. در این مورد سعی می‌شود تعداد پلیس‌ها، برای دستگیری همه سارقان به حداقل برسانند.

یک حرکت سنگ‌ریزه در گراف، شامل برداشتن دو سنگ‌ریزه از یک رأس گراف و سپس قرار دادن یک سنگ‌ریزه در رأس مجاور آن است. اگر یک توزیع (یا پیکربندی) از سنگ‌ریزه‌ها به ما اجازه دهد که با اعمال مکرر حرکات سنگ‌ریزه، حداقل یک سنگ‌ریزه را به هر رأس حرکت دهیم، آنگاه آن توزیع، یک سنگ‌ریزه از گراف نامیده می‌شود. از اساسی‌ترین سوالات این

عبارات و کلمات کلیدی: سنگ‌ریزه گراف، عدد سنگ‌ریزه، پیکربندی.

دبیرتخصصی رابط: علی‌رضا اشرفی

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۲۲

* نویسنده مسئول

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133617.1509>

است که چه تعداد سنگ‌ریزه مورد نیاز است تا ضمانت کند که هر پیکربندی با این تعداد، می‌تواند یک سنگ‌ریزه را روی هر رأس هدف مشخص قرار دهد. به کمترین تعداد سنگ‌ریزه که این شرط را برآورده کند، عدد سنگ‌ریزه گراف می‌گویند. در این مقاله، مدل گراف سنگ‌ریزه برای تبدیل یک مسئله نظریه اعداد به نظریه گراف مورد استفاده قرار می‌گیرد که به نوبه خود موضوع پرباری است. همچنین طیف وسیعی از نمونه‌ها را در این زمینه ارائه می‌کنیم و برای هر یک، برخی از نتایج اصلی را به اشتراک می‌گذاریم. بسیاری از این مسائل، برای افرادی در سطوح مختلف از مقطع کارشناسی (به عنوان مثال، [۴، ۵، ۶، ۱۳]) تا بالاتر و از پیشینه‌های مختلف از جبر و نظریه گراف تا احتمالات و بهینه‌سازی گسسته، قابل درک است. در ابتدا برخی مقدمات نظریه گراف را ذکر می‌نماییم. فرض کنید V یک مجموعه متناهی و E مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E را با $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم. گراف G را ساده گوئیم، هرگاه طوقه نداشته و بین هر دو رأس متمایز، حداکثر یک یال وجود داشته باشد. در گراف G دو رأس v و w را مجاور گوئیم، هرگاه یک یال بین آن‌ها وجود داشته باشد و دو یال متمایز را مجاور گوئیم، هرگاه حداقل یک رأس مشترک بین آن‌ها وجود داشته باشد. تعداد رأس‌های گراف G را مرتبه آن گراف نامیده و آن را با نماد $|V(G)|$ نشان می‌دهیم. همچنین تعداد یال‌های گراف G را اندازه گراف گفته و آن را با نماد $|E(G)|$ نشان می‌دهیم. گرافی را که بین هر دو رأس آن یک یال وجود داشته باشد، یعنی هر دو رأس آن مجاور باشند، گراف کامل می‌نامیم. معمولاً گراف کامل n رأسی را با K_n نشان می‌دهند. گراف K_n دارای $\binom{n}{2}$ یال است و دارای ماکزیمم تعداد یال‌های ممکن برای یک گراف ساده می‌باشد. منظور از یک قدم در گراف، دنباله‌ای از رئوس و یال‌ها مانند $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$ است که $e_i = v_{i-1}v_i$ برای $1 \leq i \leq n$ بوده و ممکن است v_i و یا e_i ها تکراری باشند. به قدم (راه) بدون رأس و یال تکراری مسیر گفته می‌شود. فاصله بین دو رأس u و v را با نماد $dist(u, v)$ نشان داده و برابر با کمترین تعداد یال‌های موجود بین دو این رأس است.

گراف مسیر P_n ، گرافی است که هر دو رأس متوالی در آن مجاورند و گراف دور C_n ، گرافی است که با اضافه کردن یک یال بین رئوس پایانی یک مسیر P_n به دست می‌آید. گراف H را زیرگراف G گوئیم، هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. در این حالت G را زیرگراف H می‌نامیم. زیرگراف H را زیرگراف فراگیر می‌گوئیم، هرگاه $V(H) = V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. در یک گراف درجه رأس v ، تعداد یال‌های متصل به رأس v است و آن را با نماد $deg(v)$ نشان می‌دهیم. اگر درجه رأسی صفر باشد، آن را رأس تنها می‌گوئیم و اگر درجه رأس یک باشد، رأس پایانی (برگ) نامیده می‌شود. کمترین درجه رئوس گراف G را با $\delta(G)$ و بیشترین درجه رئوس را با نماد $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم. گراف G را k -منتظم گوئیم، هرگاه $\delta(G) = \Delta(G) = k$. گراف ابرمکعب Q^d گرافی d -منتظم است که رئوس آن d تایی‌های مرتب بوده که مولفه‌های آن صفر و یک است، پس مرتبه آن 2^d است و دو رأس مجاورند، هرگاه دقیقاً در یک مولفه متفاوت باشند.

گراف G را همبند گوئیم، هرگاه بین هر دو رأس آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. گرافی که همبند نباشد را گراف ناهمبند می‌نامیم. برای هر رأس $v \in V(G)$ ، مجموعه $N(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$ را همسایگی باز رأس v و $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ را همسایگی بسته رأس v می‌نامیم. برای مجموعه‌ای از رئوس گراف G مانند S و هر $v \in S$ نیز خواهیم داشت:

$$N(S) = \bigcup N(v)$$

$$N[S] = N(S) \cup S.$$

خروج از مرکز رأس v را با $ecc(v)$ نشان داده و برابر با بزرگترین فاصله رأس v تا بقیه رئوس گراف است. همچنین قطر گراف G با نماد $diam(G)$ نشان داده و برابر با بیشترین خروج از مرکز رئوس گراف است. گراف همبند و بدون دور را درخت

می‌نامیم. گراف G که در آن درجه همه رئوس برابر با i است را گراف i -منتظم می‌نامیم. گراف دوبخشی، گرافی است که رئوس آن را بتوان به دو مجموعه مجزا مانند X و Y افراز کرد به طوری که هر یال از آن گراف، یک رأس از X را به یک رأس از Y وصل کند. به گرافی که از یک رأس به عنوان مرکز و $n-1$ یال متصل به مرکز تشکیل شده باشد، گراف ستاره می‌گوییم و آن را با S_n نشان می‌دهیم. گراف ستاره، حالت خاصی از درخت است و به صورت $K_{1,n-1}$ نیز نشان داده می‌شود، یعنی شامل دو بخش با 1 و $n-1$ رأس است. به یالی که حذف آن از گراف، موجب ناهمبندی گراف شود، را یال برشی می‌نامیم. منظور از یک همریختی گراف G به گراف H تابعی از $V(G)$ به $V(H)$ است که حافظ مجاورت است. عقب کشیدن در گراف، یک همریختی r از گراف G به زیرگرافی از آن مانند H است به طوری که برای هر رأس $v \in V(H)$ داشته باشیم $r(v) = v$. در بخش دوم این مقاله، به مطالعه ریشه‌های نظریه اعداد گراف سنگ‌ریزه می‌پردازیم و در بخش سوم مقاله، عدد سنگ‌ریزه را مطالعه و برای گراف‌های خاص مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین یک رویکرد بهینه سازی به نام توابع وزن را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۲. ریشه‌های نظریه اعداد

۱.۰۲. **زیردنباله مجموع-صفر.** تاریخچه گراف سنگ‌ریزه با اردوش و مسائل مجموع-صفر شروع می‌شود که مسائل ترکیبیاتی در زمینه گروه‌های آبلی متناهی است که تعیین می‌کنند یک مجموعه (یا دنباله) از عناصر باید چقدر بزرگ باشد که برخی از زیرمجموعه‌ها (یا زیردنباله‌ای) با محدودیت‌های تعیین شده دارای مجموع-صفر باشند. اکثر مطالب این بخش از دو مرجع [۹] و [۱۲] استفاده شده است.

قضیه ۱.۰۲. (اردوش-گینزبرگ-زیو، ۱۹۶۱) [۹] فرض کنید n عدد صحیح مثبت است. هر دنباله به طول $2n-1$ از عناصر \mathbb{Z}_n دارای زیردنباله‌ای به طول دقیقاً n با مجموع صفر به پیمانه n است.

این بهترین حالت ممکن است، کافی است دنباله‌ای از $n-1$ عنصر 0 و $n-1$ عنصر 1 را در نظر گرفت. توجه کنید که این دنباله، هیچ زیردنباله‌ای ناتهی با مجموع صفر ندارد.

به‌طورکلی‌تر، می‌توان انواع سؤالات را در مورد طول یک دنباله قبل از اینکه مجموع برخی از زیردنباله‌های ناتهی خاصیت مشخصی داشته باشند، پرسید. برای مثال اگر S دنباله‌ای به طول $|T|$ از یک گروه Γ باشد، آنگاه با توجه به اصل لانه‌کبوتری، یک زیردنباله مجموع-صفر ناتهی وجود دارد. می‌نیم طولی که زیردنباله مجموع صفر را ضمانت می‌کند، ثابت داونپورت^۲ از Γ می‌نامند. ثابت داونپورت برای گروه \mathbb{Z}_n برابر n است.

اردوش و لمکه^۳ حدس زدند که زیردنباله مجموع-صفر ناتهی T از $S = (s_1, \dots, s_n)$ با شرط $\sum_{t \in T} t \leq lcm(s_1, \dots, s_n, n)$ و یک شرط قوی‌تر $\sum_{t \in T} gcd(t, n) \leq n$ وجود دارد، که می‌توان به صورت $\sum_{t \in T} \frac{1}{|t|} \leq 1$ نوشت. $|g|$ مرتبه عضو g در گروه Γ (مثلاً \mathbb{Z}_n) را نشان می‌دهد. این مجموع اغلب به‌عنوان عدد تقاطع دنباله T نامیده می‌شود که نقشی حیاتی در نظریه تجزیه یا فاکتورسازی بازی می‌کند. کلیتمن^۴ و لمکه به این سوال قوی‌تر پاسخ مثبت دادند.

قضیه ۲.۰۲. (لمکه-کلیتمن، ۱۹۸۹) فرض کنید n عدد صحیح مثبت است. دنباله S را دنباله‌ای به طول n از \mathbb{Z}_n در نظر بگیرید. آنگاه زیر دنباله $T = (t_1, \dots, t_q)$ از S وجود دارد به طوری که

$$\sum_{t \in T} t \equiv 0, \quad \sum_{t \in T} \frac{1}{|t|} \leq 1.$$

¹Erdős-Ginzburg-Ziv ²Davenport constant ³Lemke ⁴Kleitman

که تعمیم آن برای گروه‌های دلخواه، گروه غیر آبلی Γ همچنان باز است.

حدس (لمکه-کلیتمن، ۱۹۸۹).

فرض کنید Γ یک گروه جمعی متناهی و S دنباله‌ای از Γ به طول $|\Gamma|$ است. آنگاه زیر دنباله $T = (t_1, \dots, t_q)$ از S وجود دارد به طوری که

$$\sum_{t \in T} t = \circ_{\Gamma}, \quad \sum_{t \in T} \frac{1}{|t|} \leq 1.$$

در بخش بعدی برهان قضیه لمکه-کلیتمن را می‌آوریم.

۲.۲. برهان چانگ^۵. اثبات اصلی قضیه لمکه-کلیتمن بر یک استدلال استقرایی مبتنی بر تعاملات ممکن بین عناصر تکیه داشت. لاگاریاس^۶ و ساکس^۷ یک رویکرد ساده برای مسئله اردوش-لمکه پیشنهاد کردند و چانگ اولین کسی بود که آن را به زبان ریاضی درآورد [۳]. هدف اصلی، ترکیب کردن عناصری با تجزیه اعداد اول مشابه است. فرض کنید $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_q^{a_q}$ تجزیه n به اعداد اول باشد. برای هر عضو $s_i \in S$ می‌نویسیم $s_i = p_1^{a_{i,1}} p_2^{a_{i,2}} \dots p_q^{a_{i,q}} R_i$ که در آن R_i نسبت به n اول است.

نماهای (b_1, \dots, b_q) را انتخاب کرده و T را زیردنباله‌ای از S شامل عناصری به شکل $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_q^{b_q} R$ (که ضرورتاً نسبت به n اول نیست) در نظر بگیرید. اگر $|T| \geq p_j$ برای یک j برقرار باشد، آنگاه زیردنباله T' از T به طول حداکثر p_j وجود دارد به طوری که ترکیب (مجموع) عناصر در T' به شکل $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_j^{b_j+1} \dots p_q^{b_q} R$ است. علاوه بر آن اگر هر $t \in T$ که در شرط زیر

$$\frac{1}{|t|} \leq p_1^{b_1-a_1} p_2^{b_2-a_2} \dots p_j^{b_j-a_j} \dots p_q^{b_q-a_q},$$

صدق کند، آنگاه

$$\sum_{t \in T'} \frac{1}{|t|} \leq p_1^{b_1-a_1} p_2^{b_2-a_2} \dots p_j^{b_j+1-a_j} \dots p_q^{b_q-a_q}.$$

سپس T' را مقدار منحصر بفرد $\sum_{t \in T'} t$ در نظر گرفته و $1/|T'|$ را با $\sum_{t \in T'} 1/|t|$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که این تعاریف به صورت بازگشتی اعمال می‌شوند، زیرا یک عنصر $t \in T'$ ممکن است خود یک مجموعه باشد، نه یک عدد. با اعمال تکراری و استراتژیک چنین گروه‌بندی‌هایی، می‌توان زیر دنباله‌ای مجموع-صفر از S را یافت که از شرط عدد تقاطع نیز تبعیت می‌کند. این دقیقاً همان روشی است که اثبات قضیه لمکه-کلیتمن توسط چانگ انجام می‌شود. از این نظر، اثبات او را می‌توان به عنوان یک بازی انتزاعی پازل در نظر گرفت. آن بازی، گراف سنگ‌ریزه است! تبدیل مسئله اردوش-لمکه به گراف سنگ‌ریزه بدیهی نیست. ماهیت اثبات به‌دین صورت است:

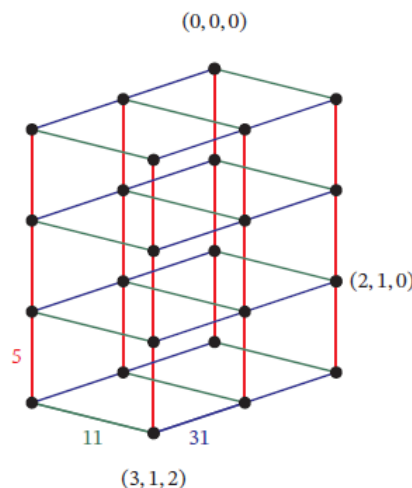
- (۱) ساختن شبکه مقسوم علیه $L(n)$,
- (۲) در نظر گرفتن اعداد داده شده روی شبکه $L(n)$ به عنوان سنگ‌ریزه‌هایی که عامل‌های مشترک با n دارند،
- (۳) مشاهده کردن این که هر سنگ‌ریزه از نسخه‌های موضعی دو شرط لازم پیروی کند،
- (۴) مدل‌سازی حرکات خاصی از سنگ‌ریزه‌ها در شبکه با «مراحل سنگ‌ریزه» (که بعداً تعریف می‌شود)،
- (۵) نشان دادن این که مراحل دو شرط موضعی که در بالا بیان شده را حفظ می‌کنند،

⁵Chung's proof ⁶Lagarias ⁷Saks

(۶) مشاهده کردن این که هر سنگریزه‌ای که به پایین (انتها) می‌رسد، نشان‌دهنده راه حلی برای مسئله اردوش-لمکه است،

(۷) نهایتاً، ثابت کردن این که همیشه می‌توان با توجه به هر پیکربندی n ، یک سنگریزه را از طریق مراحل سنگریزه به رأس می‌نیمال منتقل کرد.

تبدیل مفصلی توسط الج و هرلبرت^۸ داده شده است که مشابه برهان سنگریزه چانگ از حدس لمکه-کلیتمن برای گروه‌های آبلی است (در ابتدا توسط جرولدینگر حل شد).



شکل ۱. شبکه تقسیم وارونه $31^2 \times 11^1 \times 5^3 = n = 1321375$ با تعداد سنگریزه $p = 2984850$ که در جایگاه $(2, 1, 0)$ قرار داده شده است.

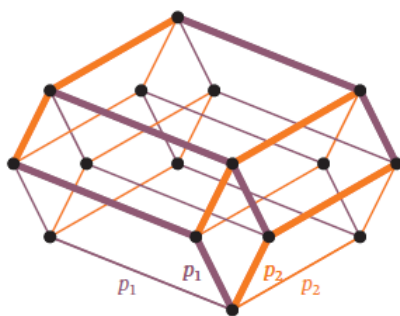
حرکت سنگریزه را با یک مثال خاص که در شکل ۱ نشان داده شده، توضیح می‌دهیم. به دنباله‌ای از پنج سنگریزه مانند $(1100, 1925, 1100, 3300, 1100) = T$ که در جایگاه $(2, 1, 0)$ قرار دارند، توجه کنید. از آنجایی که همه این اعداد مضارب $275 = 31^2 \times 11^1 \times 5^2$ هستند، می‌توان نمایش ساده‌تری از آنها به پیمان ۵ در نظر گرفت که در این صورت دنباله به صورت $(2, 2, 4, 2, 4)$ درمی‌آید. اکنون می‌توان یک زیر دنباله‌ی مجموع-صفر مانند $(4, 2, 4)$ یافت. اکنون با یک مرحله سنگریزه متناظر با زیر دنباله‌ی $(1100, 3300, 1100) = T'$ از یال قرمز پایین آمده و به عنوان ابرسنگریزه برچسب‌دار شده توسط دنباله T' در مکان $(3, 1, 0)$ قرار بگیریم. توجه داریم که شرایط زیر برقرارند:

$$\sum_{t \in T'} t = 5500 = 5^3 \times 11^1 \times 31^0 \times 2^2$$

$$\sum_{t \in T'} 1/|t| = 3(5^{-1} \times 11^0 \times 31^{-2}) \leq 5(5^{-1} \times 11^0 \times 31^{-2}) = 5^0 \times 11^0 \times 31^{-2}$$

این نشان‌دهنده‌ی آن است که چگونه مراحل سنگریزه مجموع‌ها را مدل‌سازی می‌کند. هر ابرسنگریزه‌ای که به انتها می‌رسد دارای مجموع صفر با حداکثر عدد تقاطع ۱ خواهد بود.

⁸Elledge and Hurlbert



شکل ۲. گسترش شبکه مقسوم علیه $L(p_1^a p_2^b)$ در Q^4 به عنوان جمع کننده. یال‌های ضخیم $L(n)$ را نشان می‌دهند. سپس یال‌های نازک را با حفظ مجاورت می‌توان به یال‌های ضخیم (هم رنگ) نگاشت کرد.

مرحله‌ی نهایی ۷، با کاهش دادن به حالت مربع آزاد به‌کار برده می‌شود. یعنی اگر $n = p_1^{a_1} \dots p_q^{a_q}$ باشد، با کاهش دادن برهان از $L(n)$ به $L(m)$ که در آن m هر حاصل‌ضربی از d عدد اول متمایز با خاصیت $d = \sum a_i$ است را اغلب به‌عنوان Q^d ، شبکه زیرمجموعه‌های $\{1, \dots, d\}$ می‌شناسند. می‌توان دید که $L(n)$ از حاصل‌ضرب q مسیر به طول‌های a_1, \dots, a_q به‌دست آمده در حالی‌که Q^d حاصل‌ضرب d مسیر به طول ۱ است. به دلیل این‌که $L(n)$ یک زیرشبکه‌ی Q^d است (شکل ۲) در واقع یک عقب‌کشیدن است: مراحل سنگ‌ریزه در $L(n)$ همان تصویر هم‌ریختی از تصاویر Q^d -هم‌ریختی از مراحل سنگ‌ریزه در Q^d هستند. سپس چانگ از ماهیت بازگشتی قوی‌تر Q^d برای حل آسان‌تر مسئله در آن‌جا استفاده می‌کند. ما تکنیک او را در بخش ۴.۳ توضیح خواهیم داد.

۳. گراف سنگ‌ریزه لاگاریاس-ساکس

گراف سنگ‌ریزه، یک مدل بهینه‌سازی از شبکه، برای انتقال منابعی است که در حمل و نقل مصرف می‌شوند، مانند الکتریسته، گرما یا سایر انرژی‌ها که در حین جابه‌جایی از یک مکان به مکان دیگری از بین می‌روند. مسئله اصلی در این مدل‌سازی این است که آیا سنگ‌ریزه‌های مجزا را می‌توان از یک مجموعه رئوس به دیگری انتقال داد درحالی‌که سنگ‌ریزه‌ها در این فرایند گم می‌شوند. در واقع دو سنگ‌ریزه در امتداد یک یال حرکت می‌کنند و فقط یکی از آنها به انتهای یال می‌رسد و گویی دیگری بر اثر تلفات از بین می‌رود.

یکی از اساسی‌ترین سوالات این است که چه تعداد سنگ‌ریزه مورد نیاز است تا ضمانت کند که هر پیکربندی با این تعداد، می‌تواند یک سنگ‌ریزه را روی هر رأس هدف مشخصی قرار دهد.

تابع $C : V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ در واقع یک پیکربندی از سنگ‌ریزه‌ها روی رئوس یک گراف همبند G است. $C(v)$ تعداد سنگ‌ریزه‌های قرار گرفته روی رأس v را نشان می‌دهد و $|C|$ نشانگر مقدار $\sum_v C(v)$ ، یعنی تعداد کل سنگ‌ریزه‌ها در پیکربندی است.

یک یال $\{u, v\} \in E(G)$ را که u دارای حداقل ۲ سنگ‌ریزه باشد، در نظر می‌گیریم. یک مرحله سنگ‌ریزه را با برداشتن ۲ سنگ‌ریزه از u و قرار دادن ۱ سنگ‌ریزه روی v تعریف می‌کنیم (برای انجام یک مرحله باید رأس دارای حداقل ۲ سنگ‌ریزه باشد). یعنی؛ اگر C یک پیکربندی اولیه روی گراف G باشد، آنگاه پیکربندی جدید C' به صورت زیر است:

$$C'(u) = C(u) - 2, \quad C'(v) = C(v) + 1,$$

و برای هر $x \in V - \{u, v\}$ داریم: $C'(x) = C(x)$.

برای رأس دلخواه r ، یک مرحله سنگ‌ریزه از u به v را r -حریصانه گوییم، هرگاه $dist(v, r) < dist(u, r)$ و آن را r -شبه‌حریصانه گوییم، هرگاه $dist(v, r) \leq dist(u, r)$.

اگر یک رأس هدف مانند r داشته باشیم به طوری که با دنباله‌ای از مراحل سنگ‌ریزه بتوانیم t سنگ‌ریزه را روی آن قرار دهیم، آنگاه C را t -تایی r -حل‌پذیر می‌نامند. برعکس اگر چنین مرحله‌ای وجود نداشته باشد، r -حل‌ناپذیر است. می‌نیم عدد صحیح مثبت m که پیکربندی به اندازه m روی رئوس G ، t -تایی r -حل‌پذیر باشد را با $\pi_t(G, r)$ نشان می‌دهیم. این ناوردا (ثابت) خوش‌تعریف است، زیرا اصل لانه کبوتری برای t به اندازه کافی بزرگ، وجود چنین رأسی شامل حداقل تعداد $\nu^{ecc(G, r)}$ سنگ‌ریزه را ضمانت می‌کند که به خودی خود r -حل‌پذیر است. عدد سنگ‌ریزه t -تایی G به صورت $\pi(G) = \max_{r \in V(G)} \pi_t(G, r)$ تعریف می‌شود. در صورتی که $t = 1$ باشد، $\pi(G)$ عدد سنگ‌ریزه گراف G است.

برای دو پیکربندی C و D داده شده، گوییم C یک پیکربندی D -حل‌پذیر است، هرگاه دنباله‌ای از مراحل سنگ‌ریزه وجود داشته باشد به طوری که C را به D تبدیل کند. توجه داشته باشید که یک پیکربندی t -تایی r -حل‌پذیر، مثال خاصی از D -حل‌پذیری است که در آن D یک پیکربندی است که روی رأس هدف r به تعداد t سنگ‌ریزه قرار داده است.

برای یافتن یک کران پایین برای $\pi(G, r)$ کافی است یک پیکربندی که روی هر رأس به جز رأس هدف r ، یک سنگ‌ریزه را قرار می‌دهد، در نظر گرفت. این نشان می‌دهد که همیشه $\pi(G, r) \geq n(G)$ ، و به این کران، اغلب کران رأسی گویند. گراف کامل n رأسی مثالی از حالت تساوی را نشان می‌دهد، یعنی $\pi(K_n, r) = n$ زیرا به کمک اصل لانه کبوتری اگر n سنگ‌ریزه را بین $n - 1$ رأس به غیر از رأس هدف توزیع کنیم، آنگاه یک رأس دارای حداقل ۲ سنگ‌ریزه می‌شود و از آنجایی که گراف کامل است و هر رأس با رأس هدف r مجاور است بنابراین با یک مرحله سنگ‌ریزه می‌توان ۱ سنگ‌ریزه روی r قرار داد. برای یافتن یک کران دیگر برای $\pi(G, r)$ بدیهی است که اضافه کردن یال به یک گراف، r -حل‌پذیری را مخدوش نمی‌کند، پس برای هر رأس هدف r داریم $\pi(G, r) \leq \pi(H, r)$ که در آن H یک زیرگراف فراگیر و همبند از G است. این کران را کران زیرگراف می‌نامند.

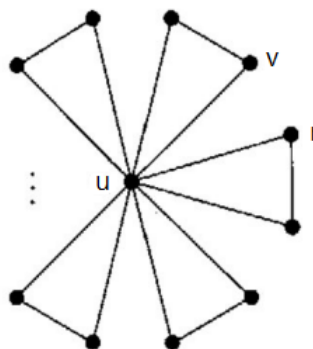


شکل ۳. دو پیکربندی r -حل‌ناپذیر روی گراف مسیر P_V

در این جا به کران دیگری که به نام کران فاصله است، اشاره می‌کنیم. به دو پیکربندی r -حل‌ناپذیر روی گراف مسیر P_V در شکل ۳ توجه کنید (اعداد برجسب رئوس، تعداد سنگ‌ریزه‌ها را در یک پیکربندی نشان می‌دهد). پیکربندی سمت راست، نشانگر این است که $\pi(P_V, r) \geq 19$. در حقیقت به سادگی دیده می‌شود که $\pi(P_V, r) = 19$. بیشترین مقدار عدد سنگ‌ریزه برای گراف مسیر زمانی است که رأس هدف، یک برگ (رأس پایانی) باشد که در این صورت $\pi(P_V, r) = 64$. به طور کلی پیکربندی که تعداد $\nu^{ecc(G, r)} - 1$ سنگ‌ریزه را بر روی دورترین رأس از r قرار می‌دهد گواه بر آن است که $\pi(G, r) \geq \nu^{ecc(G, r)}$. با توجه به کران رأسی داریم: $\pi(G) \geq \max\{|V(G)|, \nu^{diam(G)}\}$.

۱.۳. گراف‌های کلاس صفر. با توجه به قانون دو به یک سنگ‌ریزه، گراف‌هایی مانند Q^d که دارای $\pi(G) = n(G)$ هستند، را از کلاس صفر می‌نامیم. این اصطلاح از قضیه جالب پچر، اسنویلی و وکسمن^۹ آمده که اگر $diam(G) = 2$ باشد، آن‌گاه $\pi(G) \leq n + 1$ است. پس دو کلاس از گراف‌های با قطر ۲ وجود دارد، یکی کلاس صفر و دیگری کلاس یک است. اگر v رأس برشی باشد، یعنی، $G - v$ ناهمبند باشد، آن‌گاه $\pi(G) > n$. فرض کنیم G_1 و G_2 دو مؤلفه همبندی از $G - v$ بوده و برای $u_i \in G_i$ ، پیکربندی C را به صورت $C(u_1) = C(u_2) = 3$ و $C(v) = 0$ در سایر رئوس $C(w) = 1$ تعریف می‌کنیم که در این صورت C پیکربندی به اندازه n و u_1 حل‌ناپذیر است. می‌دانیم که می‌نیم رئوسی که با حذف آن‌ها گراف ناهمبند می‌شود، را همبندی رأسی آن گراف می‌نامند. بنابراین گراف‌های کلاس صفر، گراف‌های ۲-همبند هستند.

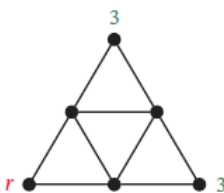
مثال ۱.۳. گراف دوستانه^{۱۰} F_n با قطر ۲ که از اتصال n نسخه از دور C_3 در یک نقطه مشترک به دست می‌آید (شکل ۴ را ببینید)، از کلاس یک است. زیرا $\pi(F_n) \leq 2n + 2$ و اگر r رأس هدف به جز رأس مرکزی u قرار دهیم و پیکربندی C را بدین صورت در نظر بگیریم که $C(u) = 0$ و $C(v) = 3$ و برای هر رأس دیگر $w \neq r$ داشته باشیم $C(w) = 1$ به یک پیکربندی r -حل‌ناپذیر می‌رسیم.



شکل ۴. گراف دوستانه با یک پیکربندی r حل‌ناپذیر

خواص دیگری از گراف‌های کلاس صفر وجود دارد. برای مثال، اگر $N_a[v]$ مجموعه‌ی رئوسی به فاصله حداکثر a از رأس v باشد، کرانستن^{۱۱} و همکارانش در [۴] نشان دادند که اگر G از کلاس صفر و رئوس u و v با این خاصیت که برای یک a و یک b داشته باشیم $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$ ، آن‌گاه $|N_a[u] \cup N_b[v]| \geq 2^{a+b+1}$. در غیر این صورت با تشکیل دادن یک پیکربندی که با قراردادن $2^{a+b+1} - 1$ سنگ‌ریزه روی v و نگذاشتن هیچ سنگ‌ریزه‌ای روی رئوس $N_a[u] \cup N_b[v]$ و همچنین قرار دادن ۱ سنگ‌ریزه روی رئوس باقی مانده به پیکربندی u حل‌ناپذیر و به اندازه‌ی n خواهیم رسید. آن‌ها با به‌کارگیری لم همسایگی نشان دادند که هر گراف کلاس صفر با تعداد رئوس $n \geq 4$ دارای حداقل $(5n - 11)/3$ یال است. تاکنون ثابت شده است که گراف چرخ، یک گراف کلاس صفر با کمترین یال است. گراف چرخ در واقع گراف دور با یک رأس مرکزی است که همه رئوس دور با آن مجاورند و دارای $2n - 2$ یال می‌باشد. آیا گرافی از کلاس صفر با تعداد کمتر یال وجود دارد؟

⁹Pachter, Snevily and Voxman ¹⁰friendship graph ¹¹Cranston



شکل ۵. گراف هرم با یک پیکربندی r حل‌ناپذیر

خانواده گراف‌های ۲-همبند با قطر ۲ و از کلاس ۱ توسط کلارک، هاجبرگ و هورلبرت^{۱۲} مشخص شد که ویژگی اصلی آنها، شامل هرم از کلاس ۱ هستند (شکل ۵ را ببینید). ویژگی مهم دیگر این است که هر رأسی که در هرم نیست به صورت هندسی در داخل یکی از مثلث‌های آن قرار دارد و رئوس از داخل مثلث‌های مختلف مجاور نیستند. از نظر احتمالاتی به نظر می‌رسد که تقریباً همه گراف‌ها قطر ۲ دارند. به احتمال این‌که برخی از دو رأس، همسایه مشترکی ندارند هم فکر کنید. حال توجه کنید که قرار گرفتن در این ساختار هرمی محدود چقدر غیر ممکن است: در بهترین حالت $O((1/8)^n)$ از همه گراف‌ها بدین صورت هستند، زیرا اگر یک هرم وجود داشته باشد هر یک از $n - 6$ رأس غیر هرمی دارای حداقل سه رأس غیر همسایه هستند. بنابراین تقریباً همه گراف‌ها از کلاس صفراند.

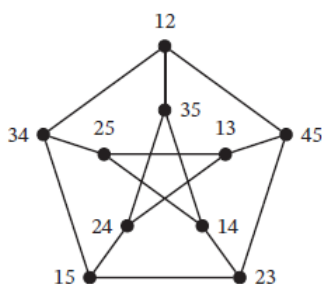
پستل^{۱۳} و همکارانش در [۱۴] نشان دادند که عدد سنگ‌ریزه گراف‌های با قطر ۳ حداکثر $3n/2 + 2$ است. در حالی که گراف‌های با قطر ۴ عدد سنگ‌ریزه حداکثر $(3/2)n + \Theta(1)$ دارند. تکنیک‌های مورد استفاده برای رسیدن به این نتایج شامل تخلیه کردن^{۱۴} است که تکنیک اصلی در اثبات قضیه چهار-رنگ است. گراف‌های با قطر بالاتر می‌توانند عددهای سنگ‌ریزه در محدوده‌ی نمایی داشته باشند (برای مثال $\pi(P_n) = 2^{n-1}$). به‌طورکلی پستل نشان داد که گراف با قطر d دارای عدد سنگ‌ریزه زیر است:

$$\frac{2^{\lceil \frac{d}{2} \rceil} - 1}{\lceil \frac{d}{2} \rceil} n + O(\sqrt{n \ln n}).$$

به‌عبارت دیگر عدد همبندی بزرگ (اطمینان از بسیاری از مسیرهای رسیدن به هدف) عددهای سنگ‌ریزه را کوچک نگه می‌دارد. سیگرینو^{۱۵} و همکارانش در [۷] نشان دادند که برای هر d یک عدد $k(d)$ وجود دارد به‌طوری‌که هر گراف با قطر d و همبندی حداقل $k(d)$ از کلاس صفر است. مدل گراف تصادفی اردوش-رنی، یال‌ها را به طور مستقل با احتمال p بین جفت رئوس قرار می‌دهد (شمارش در بالا برای مدل $p = 1/2$ است). هورلبرت^{۱۶} و کنتر^{۱۷} نشان دادند که $k(d) \leq 2^{2d+3}$ و از این نتیجه برای اثبات این‌که یک گراف تصادفی با یال احتمالی $(n \log n)^{1/d}/n$ از کلاس صفر است، استفاده کردند. این برهان از قضایای شناخته شده برای آستانه‌های همبندی حداقل k و قطر حداکثر d استفاده کرد. جالب است که این مقدار چقدر به آستانه همبندی $\log n/n$ نزدیک است، با این حال فضای زیادی برای بهبود در مرزهای بالا و پایین برای $k(d)$ وجود دارد.

یکی از کاربردهای خوب قضیه قطر-همبندی، در گراف‌های کنسر است که به دلیل اهمیت آن‌ها در بسیاری از زیرحوزه‌های نظریه گراف و ترکیبیات، از جمله رنگ‌آمیزی گراف، نشانیدن گراف، و نظریه مجموعه‌های اکستریمال و سایر موارد شناخته شده است. گراف کنسر $K(m, h)$ برای $m \geq 2h + 1$ به تعداد زیرمجموعه‌های h -عضوی از مجموعه $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$

¹²Clarke, Hochberg, and Hurlbert ¹³Postle ¹⁴discharging ¹⁵Czygrinow ¹⁶Hurlbert ¹⁷Kenter



شکل ۶. گراف پترسن $P = K(5, 2)$.

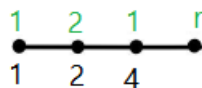
رأس دارد و یال‌ها هر دو زیرمجموعه مجزا را به هم متصل می‌کنند. $K(m, 1)$ همان گراف کامل K_m است و کوچکترین گراف کنسر برای $h \geq 2$ همان گراف معروف پترسن $P = K(5, 2)$ است (شکل ۶). خواننده می‌تواند اثبات کنند که گراف پترسن از کلاس صفر است، این یک معمایی لذت بخش است. (حداقل پنج اثبات متمایز وجود دارد که یکی از آنها از رده قطر-دو به دست آمده در بالا است؛ دو مورد دیگر در زیر نشان داده شده است). در [۸] ثابت شده است که گراف $K(m, 2)$ برای هر $m \geq 5$ از کلاس صفر است. علاوه بر آن با نتایج به دست آمده از قطر-همبندی ثابت کردند که برای هر ثابت $c > 0$ یک عدد صحیح h_0 وجود دارد به طوری که برای هر $h > h_0$ و $s \geq c(h/\log h)^{1/2}$ داریم $K(2h + s, h)$ از کلاس صفر است. با تمام این وجود نمی‌توان مطمئن بود که $K(m, t)$ برای هر $m \geq 2h + 1$ نیز از کلاس صفر است و این یک ایده هوشمندانه نیاز دارد و موضوعی است که می‌تواند از شرایط کافی بیشتری برای اثبات کلاس صفر استفاده کند.

۲.۳. توابع وزن: یک رویکرد بهینه‌سازی. در ادامه، فرصتی برای استفاده از توابع وزن به وجود می‌آید بدین صورت که می‌توان به سنگ‌ریزه‌هایی که روی رأس هدف قرار دارند، وزن ۱ را اختصاص داده و برای سنگ‌ریزه‌ای که در همسایگی رأس هدف است، وزن $1/2$ و به همین ترتیب برای سنگ‌ریزه‌ای که در رأس به فاصله d از هدف قرار دارد وزن $1/2^d$ را اختصاص داد و وزن کل پیکربندی را از مجموع وزن سنگ‌ریزه‌هایش به دست آورد (شکل ۷ را ببینید). برای مثال، اثبات این‌که یک پیکربندی در یک مسیر می‌تواند هدف را در یکی از نقاط پایانی خود حل کند، اگر و تنها اگر وزن آن حداقل یک باشد، دشوار نیست. با تغییر مقیاس برای این‌که همه وزن‌ها را عدد صحیح کنیم، می‌توانیم خصوصیات را بدین صورت در نظر بگیریم که یک پیکربندی در یک مسیر نمی‌تواند هدف را در یکی از نقاط پایانی خود حل کند، اگر و فقط اگر وزن آن کمتر از 2^{n-1} باشد، یعنی حداکثر $2^{n-1} - 1$. جالب است که این کران همان مجموع وزن‌هاست. برای توضیح بیشتر، مسیر P_n



شکل ۷. یک small پیکربندی از وزن $127/128$ روی گراف مسیر P_8 با رأس هدف r .

را به صورت $v_1 v_2 \dots v_n$ با n رأس در نظر می‌گیریم، آنگاه عدد سنگ‌ریزه آن برابر $\pi(P_n) = 2^{n-1}$ یعنی؛ هر پیکربندی با 2^{n-1} سنگ‌ریزه می‌تواند رأس v_1 را حل کند. اما در مورد پیکربندی‌های کوچکتر v_1 - حل‌پذیر نیز می‌توان به کمک تابع وزن w چیزهای بیشتری گفت. تابع w را به صورت $w(v_{n-i}) = 2^i$ روی گراف مسیر P_n تعریف کرده و توسیع آن به یک پیکربندی C روی گراف به کمک $w(C) = \sum_{v \in V} w(v)C(v)$ تعریف می‌کنیم. یک مرحله سنگ‌ریزه تنها می‌تواند وزن یک پیکربندی را حفظ کرده یا کاهش بدهد (شکل ۸) از آنجایی که وزن یک پیکربندی با یک سنگ‌ریزه روی رأس v_1 حداقل



شکل ۸. پیکربندی r -حل‌پذیر با وزن ۴ (اعداد بالای گراف تعداد سنگ‌ریزه‌های روی هر رأس را نشان می‌دهند) اگر یک مرحله r -حریصانه باشد وزن پیکربندی ثابت می‌ماند و در غیر این صورت کاهش می‌یابد.

2^{n-1} است. می‌بینیم که 2^{n-1} کران پایین برای هر پیکربندی v_1 -حل‌پذیر است. به عبارت دیگر هر پیکربندی v_1 -حل‌ناپذیر دارای وزن حداکثر $2^{n-1} - 1$ می‌باشد که برابر است با $\sum_{i=2}^n w(v_i)$.

گراف G و یک زیردرخت T با رأس هدف r از آن را در نظر بگیرید. برای رأس دلخواه $v \in V(T)$ ، والد آن را با v^+ نشان می‌دهیم که همان T -همسایه‌های رأس v که یک قدم به r نزدیک‌تر هستند (همچنین v را فرزند v^+ می‌نامند). درخت T را یک استراتژی اساسی گویند هرگاه به یک تابع وزن ناصفر نامنفی w با این خصوصیات وابسته باشد که $w(r) = 0$ و برای هر رأس غیر مجاور با رأس هدف مانند $v \in V(T)$ داریم: $w(v^+) = 2w(v)$ (و $w(v) = 0$ برای هر رأس گراف G که در T قرار ندارد). حال پیکربندی \mathbf{T} را بدین صورت در نظر بگیرید که $\mathbf{T}(r) = 0$ و برای هر رأس دیگر زیردرخت، $\mathbf{T}(v) = 1$ و برای بقیه رئوس خارج از زیردرخت T سنگ‌ریزه‌ای قرار نمی‌دهد (برای هر رأس $v \in V \setminus V(T)$ داریم $\mathbf{T}(v) = 0$). با این نمایش می‌توان نتیجه فوق در مورد مسیر P_n را دوباره بدین صورت بیان کرد که C یک پیکربندی v_1 -حل‌ناپذیر است اگر فقط اگر $C(v_1) = 0$ و $w(C) \leq w(\mathbf{T})$ برای یک استراتژی $T = P_n$ وابسته به تابع وزن w باشد.

لم ۲.۳. (لم تابع وزن) فرض کنید T یک استراتژی با رأس هدف r از گراف G با تابع وزن w وابسته است. اگر C یک پیکربندی r -حل‌ناپذیر از سنگ‌ریزه‌ها روی $V(G)$ باشد آنگاه $w(C) \leq w(\mathbf{T})$.

با در نظر گرفتن r به عنوان رأس هدف داده شده در گراف G می‌توان هر درختی از G که r یک برگ آن است را در نظر گرفت و تابع w را با این ویژگی $w(v) = 0$ برای هر $v \notin T$ به کل گراف G توسعه داد که در این صورت لم تابع وزن برقرار می‌ماند. مجموعه همه نابرابری‌ها از استراتژی‌های اساسی، منجر به یک مسئله بهینه‌سازی صحیح ماکزیم $z_r = \sum_{v \in G} C(v)$ (اندازه C) روی این قیدها می‌شود. اگر z_r^* مقدار بهینه باشد، آنگاه هر پیکربندی r -حل‌ناپذیر به بزرگی حداکثر z_r^* است. به عبارت دیگر، $\pi(G, r) \leq z_r^* + 1$. این منجر به فرمول برنامه صحیح زیر از این گراف سنگ‌ریزه می‌شود که کران بالا دارد:

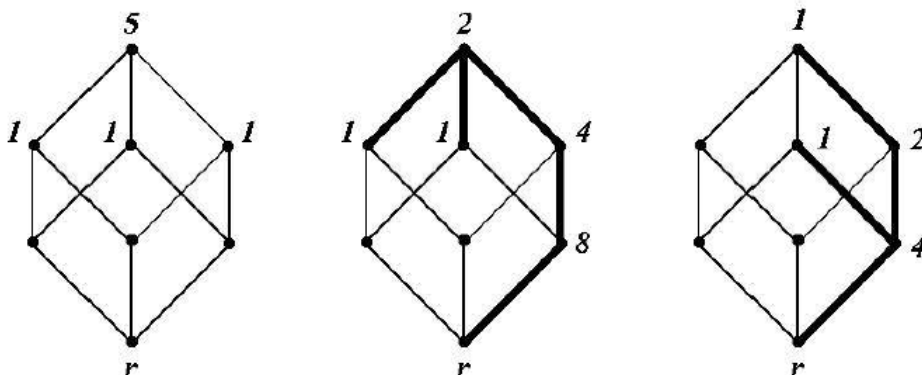
$$\max \ 1 + \sum_v C(v)$$

به طوری که برای هر استراتژی اساسی (T, w) داریم: $w(C) \leq w(\mathbf{T})$.

همان‌طور که ممکن است تصور کنید، رویکرد استراتژی‌های درختی دارای اشکالاتی است و برای هر گراف دلخواه جواب نمی‌دهد. البته، بهینه‌سازی صحیح معمولاً در اندازه ورودی نامایی است، اما اندازه ورودی (تعداد چنین درخت‌هایی) معمولاً نامایی (یا بدتر از آن!) در تعداد رئوس است. علاوه بر آن به پلی‌توپ^{۱۸} حل‌ناپذیر از یک گراف n -رأسی G با رأس هدف r به عنوان بدنه محدب همه پیکربندی‌های حل‌ناپذیر روی G (مشاهده پیکربندی‌ها به عنوان بردارهای نامنفی در \mathbb{R}^n) توجه کنید.

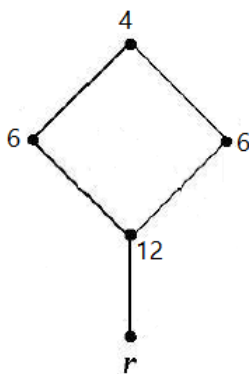
^{۱۸} پلی‌توپ در هندسه مقدماتی، یک شیء هندسی با کناره‌های صاف است که در هر تعداد کلی از ابعاد می‌تواند وجود داشته باشد. یک چندضلعی یک پلی‌توپ در دو بعد است، و یک چندوجهی یک پلی‌توپ در سه بعد است، و به همین ترتیب در ابعاد بالاتر.

لم تابع وزن نشان می‌دهد که پلی‌توپ ممکن در مسئله بهینه‌سازی خطی، حاوی پلی‌توپ حل‌ناپذیری است اما می‌تواند یک مهار بسیار سست باشد. کرانستن و همکارانش برای از بین بردن این سستی، محدودیت‌های اضافی را با کمک زیرگراف‌های غیردرختی به نام آب‌نبات‌چوبی (مسیری با یک دور متصل به رأس پایانی) ایجاد کردند. برای مثال استراتژی‌های درختی فقط $\pi(Q^3) \leq 9$ را نتیجه می‌دادند (شکل ۹) در حالی‌که اضافه کردن آب‌نبات‌چوبی نشان می‌دهد $\pi(Q^3) = 8$ (شکل ۱۰)



شکل ۹. پیکربندی حل‌پذیر که با هیچ استراتژی درختی مشخص نمی‌شود (سمت چپ)؛ یک استراتژی اساسی برای نشان دادن $\pi(Q^3) \leq 9$ (وسط)؛ و یک استراتژی غیر اساسی که همان نتیجه را می‌دهد (سمت راست).

اگرچه در عمل می‌توان با محدود کردن ورودی به مجموعه‌ای تصادفی از چندجمله‌ای زیردرخت‌های عرض اول r با عمق حداکثر $ecc_G(r) + 1$ موفقیت شگفت‌آور خوبی داشت سپس برای مثال، با بهینه‌سازی خطی و نابرابری $\pi(G, r) \leq [z_r^*] + 1$ متوقف شد. تقریب حاصل می‌تواند بسیار نزدیک و حتی دقیق باشد، به خصوص زمانی‌که قطر گراف زیاد نیست. و در بعضی



شکل ۱۰. زیرگراف غیر درختی

از موارد، روش توابع وزن ساده‌ترین برهان (یا بهترین کران بالا) از عدد سنگ‌ریزه گراف را پیشنهاد می‌دهد. مجموعه راهبردهای مورد استفاده در چنین اثباتی را گواهی z^0 می‌نامند. تغییر سیستم وزن‌دهی با کاهش وزن‌ها به بیش از نصف در حین عبور از

¹⁹breadth-first-subtrees ²⁰certificate

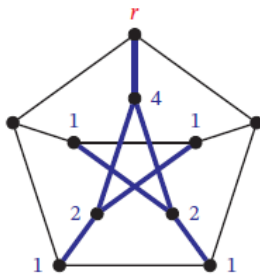
یال‌های درخت، با روند دور شدن از هدف، استراتژی‌های غیر اساسی^{۲۱} را به دست می‌آورد. با توجه به لم ۳.۳ اینها ترکیبات مخروطی (یعنی خطی غیرمنفی) از استراتژی‌های اساسی هستند و بنابراین در لم تابع وزن نیز صدق می‌کنند. بنابراین استراتژی‌های غیر اساسی نیازی به گنجاندن در محدودیت‌های بهینه‌سازی ندارند، اما می‌توانند در یک گواهی استفاده شوند. از نظر هندسی پلی‌توپ حل‌نشده، گواهی‌ها شامل حداکثر $n - 1$ استراتژی هستند. اگرچه در عمل اکثر گواهی‌ها دارای اندازه $\deg_G(r)$ هستند، زیرا اغلب دو استراتژی با استفاده از همسایه یکسان r می‌توانند با هم ترکیب شوند. از این رو، یافتن گواهی‌ها برای یک گراف خاص حتی می‌تواند با دست سریع‌تر از رایانه انجام شود، به خصوص زمانی که تقارن وجود داشته باشد، و یافتن آنها برای یک خانواده نامتناهی از گراف‌ها واقعاً یک فعالیت دستی است.

لم ۳.۳. اگر T یک استراتژی غیر اساسی برای گراف هدفدار (G, r) باشد آنگاه استراتژی‌های اساسی T_1, \dots, T_k و ثابت‌های نامنفی c_1, \dots, c_k وجود دارند به طوری که $T = \sum_{i=1}^k c_i T_i$.

از ترکیبات محدب (مخروطی) استراتژی‌ها برای یک α ، به منظور به دست آوردن نابرابری $|C| = \sum_{v \neq r} C(v) \leq \alpha$ برای پیکربندی‌های r -حل‌ناپذیر C استفاده می‌کنیم و از این رو حدس می‌زنیم که $\pi(G) \leq \lfloor \alpha \rfloor + 1$. رسم استراتژی‌ها از نوشتن جبری آنها ساده‌تر است. با نمایش استراتژی‌ها به کمک یک دنباله $\{m_v\}_v$ که $m = \min_v m_v$ می‌توان نتیجه گرفت که $m \sum_{v \neq r} C(v) \leq \sum_{v \neq r} m_v C(v) \leq m\alpha$ در بسیاری از مثال‌ها برای هر $v \neq r$ داریم $m_v = m$ که موجب مشاهده زیر می‌شود.

لم ۴.۳. لم پوشش یکنواخت [۱۰]: فرض کنید r یک رأس هدف در G بوده و \mathcal{T} یک مجموعه از r -استراتژی‌ها است. اگر m وجود داشته باشد به طوری که برای هر $v \neq r$ در G داشته باشیم $\sum_{T \in \mathcal{T}} T(v) = m$ آنگاه $\pi(G, r) = n(G)$.

برای مثال این را در گراف پترسن P در شکل ۱۱ نشان می‌دهیم. درخت T_{35} نشان داده شده به رنگ آبی (با برجسب



شکل ۱۱. یک درخت محدودیت در گراف پترسن P

گذاری شکل ۶) متناظر با نابرابری زیر است

$$4C(v_{35}) + 2C(v_{14}) + 2C(v_{24}) + C(v_{23}) + C(v_{25}) + C(v_{13}) + C(v_{15}) \leq 12.$$

با استفاده از تقارن، دو درخت دیگر T_{34} و T_{45} به دست می‌آید که محدودیت‌های مشابهی را تولید می‌کنند و مجموع هر سه آنها به صورت زیر است

$$4C(v_{34}) + 4C(v_{35}) + 4C(v_{45}) + 4C(v_{14}) + 4C(v_{24})$$

^{۲۱} یک استراتژی غیر اساسی با نابرابری $2w(v) \geq w(v^+)$ به جای برابری در استراتژی اساسی، به دست می‌آید.

$$(۱.۳) \quad +4C(v_{۲۳}) + 4C(v_{۲۵}) + 4C(v_{۱۳}) + 4C(v_{۱۵}) \leq ۳۶$$

بنابراین $|C| \leq ۹$ ، و در نتیجه $\pi(P, v_{۱۲}) \leq ۱۰$ که با ترکیب آن با کران پایینی π ، با وجود ۱۰ رأس در گراف نشان می‌دهد (با تقارن، همه رئوس یکسان به نظر می‌رسند) که گراف پترسن از کلاس صفر است.

در زیربخش بعدی عدد سنگ‌ریزه گراف دور را به کمک استراتژی‌های درختی می‌یابیم. توان‌های یک گراف دور، مثال خوبی از کاربرد استراتژی‌های درختی برای یافتن کران بالای عدد سنگ‌ریزه در خانواده‌ای نامتناهی از گراف‌هاست [۱۰]. برای یک گراف G می‌توانیم k -امین توان G را بدین صورت که با اضافه کردن یال uv برای هر جفت از رئوس که در $dist_G(u, v) \leq k$ صدق می‌کند، تعریف کرده و آن را با $G^{(k)}$ نشان دهیم. نمای سنگ‌ریزه G را با $e_\pi(G)$ نشان داده و آن را می‌نیم عدد k برای این‌که گراف $G^{(k)}$ از کلاس صفر باشد، تعریف می‌کنیم. برای مثال، برای هر G روی n رأس داریم: $G^{(diam(G))} = K_n$ ، و بنابراین $e_\pi(G) \leq diam(G)$. از آنجایی‌که گراف‌های کلاس صفر باید دارای خاصیت $2^{diam(G)} \leq n(G)$ باشند، نیاز داریم به این‌که $diam(G^{(e_\pi(G))}) \leq \log n(G)$ باشد. در نتیجه کران پایینی برای دورهای n -رأسی را فراهم می‌کند

$$\frac{n/2}{\log n} \leq e_\pi(C_n) \leq \frac{n/2}{\log n - \log \log n},$$

که در آن کران بالایی از گواهی استراتژی‌های به دقت ساخته شده می‌آید.

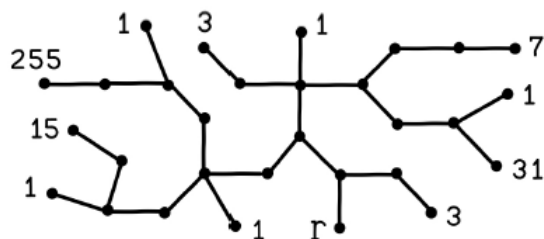
مسئله زیر یک سوال جالب از [۱۰] در مورد تقریب سنگ‌ریزه گراف با توابع وزن است. فرض کنید $T = T(G, r)$ مجموعه‌ای از تمام r -استراتژی‌های درختی در یک گراف G است. آیا راه‌حل بهینه‌سازی خطی $z_r^*(T)$ یک تقریب قابل قبولی از $\pi(G, r)$ را نتیجه می‌دهد؟ یعنی؛ آیا یک ثابت c وجود دارد به طوری‌که $z_r^*(T) \leq c\pi(G, r)$ ؟ آیا $c = 2$ ؟ دیدگاه‌های بهینه‌سازی سنگ‌ریزه کردن گراف یک حوزه فعال تحقیق است. برای مثال، کنتر^{۲۲} و همکاران [۱۱] رویکردهای بهینه‌سازی مخصوص حاصل‌ضرب‌های گراف را ارائه می‌دهند. به‌طورکلی، توصیف جنبه‌های واقعی پلی‌توپ‌های حل‌نشده این رویکردها نیز غیرقابل تصور باقی می‌ماند.

۳.۳. عدد سنگ‌ریزه درخت‌ها. یک دنباله از مسیرها $\mathcal{P} = (P^1, \dots, P^h)$ را افزاز r -مسیر ماکزیمم از یک درخت هدفدار (ریشه‌دار) (T, r) می‌گویند، هرگاه \mathcal{P} افزازی از $E(T)$ را تشکیل دهد به طوری‌که رأس r یک برگ از P^1 است و برای هر $1 \leq i \leq h$ ، گراف $T_i = \cup_{j=1}^i P^j$ یک درخت بوده و P^i یک مسیر به طول ماکزیمم در بین تمامی مسیرهای $T - T_{i-1}$ با یک رأس انتهایی روی درخت T_{i-1} است. تابع $f(T, r) = \sum_{i=1}^h 2^{l_i} - h + 1$ را که در آن (l_1, \dots, l_h) دنباله طول‌های یک افزاز r -مسیر ماکزیمم \mathcal{P} از درخت هدفدار (T, r) است را تعریف می‌کنیم.

قضیه ۵.۳. عدد سنگ‌ریزه درخت هدفدار (T, r) برابر است با $\pi(T, r) = f(T, r)$.

شکل ۱۲، یک افزاز r -مسیر ماکزیمم با اندازه $f(T, r) - 1$ که حل‌ناپذیر است را نمایش می‌دهد. برای هر مسیر P^i ، تعداد $2^{l_i} - 1$ سنگ‌ریزه روی رأس پایانی که در T_{i-1} نیست، قرار داده شده است برای مثال؛ P^1 ماکزیمم مسیر به طول ۸ با یک رأس پایانی r و یک رأس پایانی با ۲۵۵ سنگ‌ریزه است، P^2 مسیر ماکزیمم به طول ۵ با یک رأس پایانی است که دارای ۳۱ سنگ‌ریزه بوده و هیچ یال مشترکی با T_1 ندارد، الی آخر.

²²kenter



شکل ۱۲. پیکربندی r -حل‌ناپذیر روی یک درخت

نتیجه ۶.۳. اگر دنباله طول‌های یک افزاز مسیر ماکزیمم از درخت T باشد، آنگاه

$$\pi(T) = \sum_{i=1}^m 2^{l_i} - m + 1.$$

اثبات. از آنجایی که تابع نمایی، محدب است پس $\pi(T, r) = \sum_{i=1}^h 2^{l_i} - h + 1$ توسط یک افزاز r -مسیر ماکزیمم به حداکثر مقدار خود می‌رسد و باتوجه به فرمول $\pi(T) = \max_{r \in V(T)} \pi(T, r)$ نتیجه از قضیه قبل حاصل می‌شود. □

قضیه ۷.۳. یک الگوریتم زمان-خطی برای محاسبه عدد سنگ‌ریزه درخت وجود دارد. مخصوصاً اگر r برگی از طولانی‌ترین مسیر در T باشد، آنگاه $\pi(T, r) = \pi(T)$ (هر مسیر با بیشترین طول که r برگی از آن است را می‌توان انتخاب کرد).

با توجه به کران بالایی زیرگراف برای هر گراف دلخواه n رأسی ($\pi(G) \leq \pi(H)$) و با در نظر گرفتن قضیه فوق مبنی بر اینکه زیردرخت فراگیر P_n در بین درخت‌های با n رأس بیشترین عدد سنگ‌ریزه را به خود اختصاص می‌دهد می‌توان نتیجه گرفت که در بین گراف‌هایی با n رأس، بیشترین عدد سنگ‌ریزه برابر است با $\pi(P_n) = 2^{n-1}$.

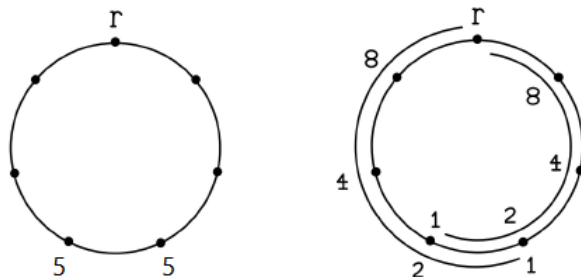
مثال ۸.۳. عدد سنگ‌ریزه گراف ستاره $K_{1,n-1}$ برابر است با $\pi(S_n) = n + 1$ و عدد سنگ‌ریزه کرونای دو گراف P_n و K_1 برابر است با $\pi(P_n \circ K_1) = 2^{n+1} + n - 2$.

موز در [۱۳] عدد سنگ‌ریزه t -تایی گراف ستاره $K_{1,n-1}$ را به صورت $\pi_t(S_n) = 4t + n - 3$ به دست آورد. چنانگ برای حالت کلی درخت‌ها، قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۹.۳. [۳] اگر l_1, \dots, l_m طول مسیرهای یک افزاز r -مسیر ماکزیمم از درخت T باشند آنگاه $\pi_t(T, r) = t 2^{l_1} + \sum_{i=2}^m 2^{l_i} - m + 1$.

می‌توان بزرگ‌ترین پیکربندی t -تایی r -حل‌ناپذیر را فرض کرد به طوری که همه سنگ‌ریزه‌هایش را روی برگ‌های (رئوس پایانی) غیر از r قرار می‌دهد. در واقع پیکربندی C_T را این‌گونه تعریف می‌کنیم که به تعداد $t 2^{l_1} - 1$ سنگ‌ریزه را روی برگ P^1 و $2^{l_i} - 1$ سنگ‌ریزه را روی برگ هر P^i باقی‌مانده قرار می‌دهد. بنابراین هیچ‌کدام از مسیرهای P^i ($i > 1$) سنگ‌ریزه کافی برای رسیدن به رأس پایانی دیگر خود ندارند و P^1 نمی‌تواند t سنگ‌ریزه را به وسیله خودش روی r قرار دهد. اثبات چنانگ از استقراء روی n و t استفاده کرد که شامل زیردرخت‌های تشکیل شده توسط مؤلفه‌های $T - r$ است. سایر برهان‌ها از مراحل استقرایی مشابه (موز)، وزن کل [۲]، یا لم تابع وزن [۱۰] و همچنین تعمیم فرمولی که شامل هزینه‌های سنگ‌ریزه

روی هر یال می‌شود، تشکیل شده است. بوند^{۲۳} و همکاران در [۲]، الگوریتم خطی برای ساختن افزای مسیر ماکزیمم برای هر درخت ارائه دادند.



شکل ۱۳. دور هدف‌دار با یک پیکربندی ماکزیمم r -حل‌ناپذیر (سمت چپ) و دو استراتژی اساسی (سمت راست).

قضیه ۱۰.۳. عدد سنگ‌ریزه دورها به صورت زیر است:

$$\pi(C_{2^k}) = 2^k, \quad \pi(C_{2^{k+1}}) = 2 \lfloor 2^{k+1}/3 \rfloor + 1 = \lceil (2^{k+2} - 1)/3 \rceil.$$

اثبات. برای هر دو نتیجه، از دو استراتژی اساسی (یک مسیر در هر جهت) استفاده می‌کنیم. برای دورهای زوج، مسیرهای به طول k در رأس روبه‌روی هدف r هم‌پوشانی می‌کنند و این موجب می‌شود که $2^k = \pi(C_{2^k}) \leq \frac{2(2^k - 1)}{2} + 1$ که با توجه به کران رأسی داریم: $\pi(C_{2^k}) = 2^k$. برای دورهای فرد با $k \geq 3$ ، مسیرها به طول $k + 3$ نتیجه مطلوب زیر را به وجود می‌آورند:

$$\pi(C_{2^{k+1}}) \leq \lfloor \frac{2(2^{k+3} - 1)}{2^2 + 2^3} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{2^{k+2} - 1}{3} \rfloor + 1 = \lceil \frac{2^{k+2} - 1}{3} \rceil$$

□

و برای $k \leq 2$ ، مسیرهای به طول $k + 1$ کفایت می‌کنند.

۴.۳. حدس گراهام: سنگ‌ریزه روی حاصل‌ضرب گراف‌ها. یادآوری می‌کنیم که گراف از مجموعه‌های رئوس و یال‌ها (زوج نامرتب از رئوس) تشکیل شده، تعداد رئوس یک گراف G را با $n(G)$ نشان می‌دهیم. گراف‌های مورد نظر در این جا همبند هستند. نماد $\log(\cdot)$ برای لگاریتم در مبنای ۲ استفاده می‌شود.

گراف Q^d ، گرافی با رئوسی است که نشانگر d -تایی‌های مرتب از مجموعه دوتایی $\{0, 1\}$ می‌باشند و رأس‌هایی که دقیقاً در یک مولفه متفاوتند، با هم مجاور هستند. اغلب Q^d به عنوان ابرمکعب d -بعدی شناخته می‌شود. لازم به ذکر است که این ابرمکعب را می‌توان استقرایی و براساس ضرب دکارتی گراف‌ها به صورت $Q^d = Q^{d-1} \times Q^1$ تعریف کرد. بخشی از کار چانگ در برهان قضیه لمکه-کلیتمن اثبات قضیه زیر است.

قضیه ۱۱.۳. $\pi(Q^d) = 2^d$.

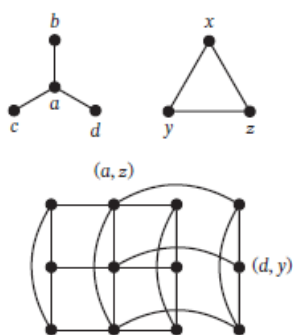
²³Bunde

کران‌های قبلی، $n(Q^d) = 2^d = 2^{\text{diam}(G)}$ یکی می‌شوند. چانگ برای ارائه یک راه‌حل جایگزین مسئله اردوش-لمکه، موارد بیشتری را نشان داد. عدد صحیح مثبت n با تجزیه $n = p_1^{a_1} \cdots p_q^{a_q}$ در نظر گرفته و $d = \sum_{i=1}^q a_i$ را تعریف کنید. قانون مراحل سنگ‌ریزه را طوری تغییر دهید به طوری که در a_i از ابعاد Q^d به تعداد p_i تا سنگ‌ریزه (در عوض ۲ تا) باید از یک رأس جدا شوند تا یک سنگ‌ریزه در آن ابعاد حرکت کنند. چانگ نشان داد که در این مورد عدد سنگ‌ریزه Q^d با این مراحل تعمیم یافته برابر n است و بنابراین قضیه‌ی لمکه-کلیمن برقرار است.

برهان چانگ برای اثبات $\pi(Q^d) = 2^d$ بر پایه استقراء است. اما برای به کارگیری استقراء نیاز داریم به اثبات این که Q^d دارای خاصیت ۲-سنگ‌ریزه ($2PP$) است: ۲ سنگ‌ریزه می‌تواند روی هر رأس هدف G از هر پیکربندی C با اندازه‌ی حداقل $1 + 2\pi(G) - s(C)$ قرار گیرند که در آن $s(C) = |supp(C)|$ و $supp(C)$ مجموعه رئوسی است که حداقل یک سنگ‌ریزه داشته باشد.

به عنوان یک نمونه مثال از تکنیک اثبات چانگ، ما دوباره با تقلید از سه حالت او، ثابت می‌کنیم که گراف پترسن P از کلاس صفر است. مشاهده می‌شود که P به دو تا دور A و B به طول ۵ با یک جورسازی بینشان افزاز می‌شود. با توجه به این تقارن فرض کنید که $r \in A$. یک پیکربندی C به اندازه 10° در نظر بگیرید. اگر A شامل حداقل ۵ سنگ‌ریزه باشد آنگاه کار تمام است، زیرا $\pi(A) = 5$ ، پس چنین فرضی نمی‌کنیم. رأس r' همسایه r در B در نظر بگیرید اگر r' حاوی یک سنگ‌ریزه باشد، پنج سنگ‌ریزه دیگر در B می‌توانند سنگ‌ریزه دوم را روی r' بگذارند، و سپس r را حل کنند، بنابراین خلاف آن را در نظر بگیرید. اگر A دقیقاً شامل چهار (متناظراً؛ سه) سنگ‌ریزه باشد، آنگاه شش (متناظراً؛ هفت) سنگ‌ریزه در B می‌توانند حداقل یک (متناظراً؛ دو) سنگ‌ریزه را به سمت A جابه‌جا کنند، بنابراین از حاصل پنج سنگ‌ریزه r حل می‌شود. اگر A شامل حداکثر دو سنگ‌ریزه باشد آنگاه B حداقل هشت سنگ‌ریزه دارد که از بین آنها می‌توانیم دو سنگ‌ریزه را روی r' ، سپس یکی را روی r قرار دهیم.

از آنجایی که چانگ باید به صورت استقرایی ثابت کند که مکعب دارای عدد سنگ‌ریزه n و $2PP$ است، او باید $2PP$ را در سه حالت تقسیم‌بندی شده مشابه ثابت کند.



شکل ۱۴. گراف $G = S_4$ (سمت چپ)، گراف $H = K_3$ (سمت راست) و $G \square H = S_4 \square K_3$ (پایین).

طبق معمول، می‌توان به دنبال اثبات ساده‌تر یا مستقیم‌تر از نتیجه چانگ بود. در این مورد مشاهده می‌شود که Q^d حاصل ضرب d -بعدی از یال‌هاست. ضرب دکارتی دو گراف G و H را با $G \square H$ نمایش می‌دهند. رئوس این گراف به صورت زوج مرتب‌های (u, v) است که $u \in V(G)$ و $v \in V(H)$ ، و دو رأس (u_1, v_1) و (u_2, v_2) مجاورند هرگاه $u_1 = u_2$ و $v_1 v_2$ یالی از H یا اینکه $v_1 = v_2$ و $u_1 u_2$ یالی از G باشد (نماد \square از تساوی $C_4 = K_2 \square K_2$ ناشی شده است). برای مثال در شکل ۱۴ حاصل ضرب دکارتی گراف ستاره ۴-رأسی G و مثلث H نشان داده شده است. می‌توان دید که $Q^d = Q^2 \square Q^{d-1}$.

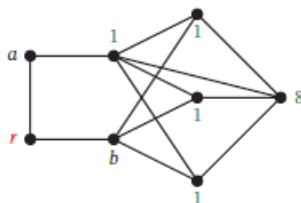
بنابراین یک برهان ساده استقرایی از رابطه $\pi(Q^d) \leq \pi(Q^2)\pi(Q^{d-1})$ به وجود می‌آید، زیرا $\pi(Q^2) = 2$ است. این موجب حدس گراهام شد که هدف نهایی است.

حدس گراهام^{۲۴} [۳] برای هر گراف G و H داریم:

$$\pi(G \square H) \leq \pi(G)\pi(H).$$

کار عمده‌ای برای تأیید حدس گراهام در موارد وسیعی انجام شده است، از جمله آن زمانی که G حاصل ضرب گراف‌های کامل و H دارای خاصیت $2PP$ است [۳]، زمانی که G و H حاصل ضرب گراف‌های درخت باشند [۱۳]، زمانی که G و H حاصل ضرب‌هایی از دورها باشند (هرسکوویسی^{۲۵})، زمانی که دو گراف G و H گراف‌های دوبخشی کامل با حداقل ۱۵ رأس در هر بخش هستند (فنگ و کیم^{۲۶})، زمانی که G حاصل ضرب درخت و H دارای خاصیت $2PP$ می‌باشند (هرسکوویسی) و موارد بیشتر دیگر.

همگی برهان‌ها از این خاصیت که یکی از گراف‌ها دارای خاصیت $2PP$ است، استفاده می‌کنند (منظور از حاصل ضرب‌ها، حاصل ضرب یک گراف با خودش است و خود گراف به تنهایی یک حاصل ضرب بدیهی است). این منجر به بررسی‌هایی می‌شود که آیا همه گراف‌ها دارای $2PP$ شامل حاصل ضرب‌هایی از گراف‌های کامل و درخت‌ها [۳] در میان دیگر گراف‌ها هستند یا خیر. لمکه گرافی با کمترین تعداد رئوس که خاصیت $2PP$ را ندارد، یافت [۲]. آن برای نشان دادن این که گراف لمکه L در شکل ۱۵ از کلاس صفر است، کافی نیست. اگرچه که پیکربندی C نشان داده شده دارای اندازه $12 = 1 + s(C) - 2\pi(L)$ است با این حال دو سنگ‌ریزه را نمی‌توان به سمت هدف حرکت داد. درواقع اگر وزن یک رأس v را به صورت $w(v) = 2^{-\text{dist}(v,r)}$ و متناظراً وزن یک پیکربندی C را به صورت $w(C) = \sum_{v \in G} w(v)C(v)$ تعریف کنید آن‌گاه، از آن جایی که وزن پیکربندی C برابر ۲ است، یک $2-r$ تایی r -حل‌پذیر σ نمی‌تواند از کم کردن هر وزنی حاصل شود. بنابراین باید هر سنگ‌ریزه در σ استفاده شود و در هر مرحله که به هدف نزدیکتر می‌شود σ حریص‌تر می‌شود اما این سه سنگ‌ریزه را به b و فقط یکی را به a منتقل می‌کند و در نتیجه فقط یک سنگ‌ریزه روی r قرار می‌گیرد. هر گراف بدون $2PP$ به عنوان یک گراف لمکه شناخته می‌شود (برخلاف گراف لمکه)، و این‌ها به تنهایی مورد مطالعه قرار می‌گیرند (به عنوان مثال، [۶] را ببینید). درواقع ۲۲ گراف لمکه با می‌نیم ۸ رأس وجود دارد که هریک زیرگرافی از گراف با ۱۷ یال است و منحصرأً یکی دارای می‌نیم ۱۲ یال است (نه $L!$) علاوه بر این، تعدادی خانواده نامتناهی از گراف‌های لمکه شناخته شده‌اند.



شکل ۱۵. گراف لمکه L با یک پیکربندی $2-r$ تایی r -حل‌ناپذیر C .

²⁴Graham's conjecture ²⁵Herscovici ²⁶Feng and Kim

یکی از نتایجی که از ضرورت شرط $2PP$ خودداری می‌کند توسط سیگرینو و هورلبرت بیان می‌شود که اگر G و H گراف‌هایی با حداکثر n رأس و مینیمم درجه δ از رئوس در G یا H باشد به طوری که $\delta \geq 2^{(12n/\delta)+15}$ ، آنگاه $G \square H$ از کلاس صفر است. از این رو داریم: $\pi(G \square H) = n(G \square H) = n(G)n(H) \leq \pi(G)\pi(H)$.

ضرورتاً این بیان می‌کند که حدس گراهام برای گراف‌هایی از مینیمم درجه‌ی حداقل $cn/\log n$ به ازای یک c برقرار است. تراکم چنین گراف‌هایی است که حاصل ضرب آنها موجب برقراری قضیه قطر-همبندی می‌شود. با این حال کاربردهای مکرر این قضیه در نهایت از بین می‌روند، زیرا درجات به‌طور جمعی رشد کرده درحالی‌که تعداد رئوس به‌طور ضربی رشد می‌کنند. در این استدلال می‌بینیم که صحت حدس گراهام دلالت دارد بر این‌که گراف‌های کلاس صفر تحت حاصل ضرب دکارتی بسته هستند. بنابراین تأیید حدس برای گراف‌های کلاس صفر نتیجه بسیار جالبی خواهد بود. متأسفانه به‌علت کمبود شرایط کافی برای قرار گرفتن در کلاس صفر، دستاوردهای کمی در این راستا حاصل شده است.

روش دیگری که از $2PP$ اجتناب می‌کند توسط هر سکویسی ارائه شده است. یک گراف G دارای ویژگی مسیر است، اگر برای هر n ، داشته باشیم: $\pi(G \square P_n) \leq \pi(G)\pi(P_n)$. هر گراف بدون ویژگی مسیر، یک مثال نقض برای حدس گراهام است. بنابراین به نظر می‌رسد که این مثال ساده مکان خوبی برای شروع است. پس می‌توان حدس گراهام را با اثبات این‌که برای گراف‌های با ویژگی مسیر صادق است، اثبات کرد. این استدلال امیدوارکننده است.

از طرفی بیشتر برهان‌ها از $2PP$ استفاده می‌کنند. بنابراین به نظر می‌رسد، تعجب کنید که آیا ممکن است حدس گراهام برای $L^2 = L \square L$ با شکست مواجه می‌شود، زیرا L از کلاس صفر بوده و باید $\pi(L^2) = 64$ داشته باشیم. اما آیا این برقرار است؟ پاول اردوش در [۱۰] برای حل این مسئله ۶۴ دلار پیشنهاد می‌کند.

شواهدی به نفع حدس گراهام، درخصوص این‌که نباید به $2PP$ مرتبط باشد توسط جاثو و بین^{۲۷} ارائه شده است. اسنویلی و فاستور^{۲۸} یک خانواده‌ای نامتناهی از گراف‌های $\{L_i\}_{i \geq 1}$ تعریف کرده و ثابت کردند که همه آنها لمکه هستند. وانگ^{۲۹} دنباله دیگر $\{L'_i\}_{i \geq 1}$ از گراف‌های لمکه معرفی کرد. آنها نشان دادند که برای هر $L_i \subseteq G \subseteq L'_i$ ، اگر H یک گراف کامل یا درخت باشد آنگاه $\pi(G \square H) \leq \pi(G)\pi(H)$.

علاوه بر آن پلنمانی^{۳۰} برای هر G که از کلاس صفر نیست، نشان داده است که اگر $n \geq 2(\pi(G) - 1)/(\pi(G) - n(G))$ ، آنگاه $\pi(G \square K_n) \leq \pi(G)\pi(K_n)$. او یک نتیجه مشابه برای گراف‌های دوبخشی کامل و به اندازه کافی بزرگ نیز ثابت کرده است.

کار بر روی تقریب حدس گراهام آغاز شده است، همان‌طور که آسپلون و همکاران [۱] ثابت کردند $\pi(G \square H) \leq 2\pi(G)\pi(H)$ همیشه برقرار است. آنها نتیجه قوی‌تری را نشان دادند: $\pi(G \square H) \leq (\pi(G) + n(G))\pi(H)$. این یک کران بهتری برای گراف‌های کلاس صفر نیست اما بدین معنی است که هرگاه $n(G) \leq \epsilon\pi(G)$ باشد آنگاه

$$\pi(G \square H) \leq (1 + \epsilon)\pi(G)\pi(H),$$

به طور مثال برای گراف‌هایی با ویژگی $diam(G) \geq \log(n/\epsilon)$ برقرار است. آیا می‌توان تقریب بهتری برای همه گراف‌ها یافت؟

ورژن دیگری از مسئله تغییر دادن ضرب گراف است. نویسندگان مقاله [۱] چندین مورد را در نظر می‌گیرند، از جمله ضرب قوی $G \boxtimes H$ که به گراف $G \square H$ ، یال بین دو رأس (u_1, v_1) و (u_2, v_2) که $u_1 u_2$ یالی از G و $v_1 v_2$ یالی از H بوده را اضافه می‌کنند (مشاهده می‌شود که نماد \boxtimes از تساوی $K_2 \boxtimes K_2 = K_4$ ناشی شده است). از آنجایی که $G \square H \subseteq G \boxtimes H$

²⁷Gao and Yin ²⁸Snevily and Foster ²⁹Wang ³⁰Pleanmani

داریم: $\pi(G \boxtimes H) \leq \pi(G \square H)$. آنها با توجه به نابرابری از نوع گراهام برای هر G و H ، نابرابری زیر را ثابت کردند

$$\pi(G \boxtimes H) \leq \frac{3}{4}(\pi(G) + 1)(\pi(H) + 1).$$

مراجع

- [1] J. Asplund, G. Hurlbert and F. Kenter, Pebbling on graph products and other binary graph constructions, *Australas. J. Combin.*, **71** (2018) 246–260.
- [2] D. P. Bunde, E. W. Chambers, D. Cranston, K. Milans and D. B. West, Pebbling and optimal pebbling in graphs, *J. Graph Theory*, **57** (2008) 215–238.
- [3] Fan R. K. Chung, Pebbling in hypercubes, *SIAM J. Discrete Math.*, **2** (1989) 467–472.
- [4] D. W. Cranston, L. Postle, Ch. Xue and C. Yerger, Modified linear programming and class 0 bounds for graph pebbling, *J. Comb. Optim.*, **34** (2017) 114–132.
- [5] B. Crull, T. Cundiff, P. Feltman, G. H. Hurlbert, L. Pudwell, Z. Szaniszlo and Z. Tuza, The cover pebbling number of graphs, *Discrete Math.*, **296** (2005) 15–23.
- [6] Ch. A. Cusack, M. Powers and A. Bekmetjev, Doppelgangers and Lemke graphs, *Discrete Math.*, **341** (2018) 2686–2693.
- [7] A. Czygrinow, G. Hurlbert, H. A. Kierstead and W. T. Trotter, A note on graph pebbling, *Graphs Combin.*, **18** (2002) 219–225.
- [8] G. Hurlbert, General graph pebbling, *Discrete Appl. Math.*, **161** (2013) 1221–1231.
- [9] G. Hurlbert, *Graph pebbling, Handbook of Graph Theory*, 2nd ed., Chapman and Hall/CRC, Kalamazoo, MI, 2014 1428–1449.
- [10] G. Hurlbert, The weight function lemma for graph pebbling, *J. Comb. Optim.*, **34** (2017) 343–361.
- [11] F. Kenter, D. Skipper and D. Wilson, Computing bounds on product graph pebbling numbers, *Theoret. Comput. Sci.*, **803** (2020) 160–177.
- [12] G. Hurlbert and F. Kenter, Graph Pebbling: A Blend of Graph Theory, Number Theory and Optimization, *Notices AMS*, **68** (2021) 1900–1913.
- [13] D. Moews, Pebbling graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **55** (1992) 244–252.
- [14] L. Postle, N. Streib and C. Yerger, Pebbling graphs of diameter three and four, *J. Graph Theory*, **72** (2013) 398–417.

فاطمه آقایی میبیدی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد
aghaefatemeh29@gmail.com

فاطمه آقایی میبیدی دانشجوی دکتری ریاضی گرایش جبر و ترکیبیات دانشگاه یزد و تحت راهنمایی آقای دکتر سعید علیخانی است. دوره ارشد ایشان در گرایش هندسه-توپولوژی دانشگاه یزد بوده است و روی دینامیک بیلیارد کار کرده‌اند.



سعید علیخانی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد
alikhani@yazd.ac.ir

سعید علیخانی استاد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد است. تحقیقاتش در حوزه نظریه گراف و ترکیبیات جبری می‌باشد. معرفی چندجمله‌ای احاطه‌گر گراف به عنوان یک چندجمله‌ای جدید وابسته به گراف‌ها، در رساله دکتری ایشان از فعالیتهای اصلی و تاثیرگذاری بوده است که مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفته است. تاکنون ۵ پژوهشگر پسادکتری (از بنیاد نخبگان، صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور و داخلی دانشگاه) و ۱۰ دانشجوی دکتری تحت نظارت و راهنمایی ایشان، دانش‌آموخته شده‌اند. ایشان در هیات تحریریه بیش از ۱۰ نشریه علمی بین‌المللی عضویت و فعالیت دارند.



Graph pebbling number and model

Fatemeh Aghaei Meybodi and Saeed Alikhani *

Abstract: There are many topics in graph theory that can be called “moving objects around a graph”. For example; In network optimization, shipments are transferred from some vertices (resources) to other vertices (demand) according to the costs allocated to the edges, so that this can be done in the cheapest way. A pebble motion in a graph involves removing two pebbles from the vertex of a graph and then placing a pebble at the adjacent vertex. If a distribution (or configuration) of pebbles allows us to move at least one pebble to each vertex by repeatedly applying pebble movements, then that distribution is called a pebble of the graph. One of the most basic questions is how many pebbles are needed to ensure that any configuration with this number can target a pebble at any particular target. The smallest number of stones that meet this condition is called the graph pebble number. In this paper, after examining the roots of the number theory of the pebble graph model, which in turn is a productive subject, we will study the pebble number for specific graphs and also consider an optimization approach to this subject called weight functions.

Keywords: graph pebbling; pebble number; configuration.

Fatemeh Aghaei Meybodi

Faculty of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd.

Email: aghaeefatemeh29@gmail.com

Saeed Alikhani

Faculty of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd.

Email: alikhani@yazd.ac.ir

Communicated by Alireza Ashrafi.

Article Type: Research Paper.

Received: 10/05/2022, Accepted: 13/03/2023.

* Corresponding Author.