http://www.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه

شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷

جلد ۷، شماره ۳ (۱۴۰۱)، صص. ۵۷-۶۷

http://math-sci.ui.ac.ir

مطالعه پوشش گالوا روی رسته‌های به‌طور موضعی بی‌تاب-متناهی

راضیه واحد

چکیده. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک k-رسته به‌طور موضعی از محمل متناهی به‌همراه عمل گروه G باشد. نشان می‌دهیم تابعگون پوششی گالوا $P : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/G$ یک پوشش گالوا روی رسته‌های مدول‌های بی‌تاب القا می‌کند، که با استفاده از آن، نسخه‌ای از قضیه گابریل برای مدول‌های بی‌تاب ارائه می‌کنیم.

۱. مقدمه

نظریه نمایش جبرها، شاخه‌ای از علم ریاضی است که به‌مطالعه ساختارهای جبری، از طریق نمایش عناصر آن‌ها به‌صورت تبدیل‌های خطی فضاهای برداری، و مطالعه مدول‌ها روی این ساختارهای جبری می‌پردازد. در حقیقت، این نظریه مسائل جبر مجرد را به مسائل جبر خطی؛ که به‌خوبی شناخته شده‌اند؛ برمی‌گرداند.

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و آرتینی باشد. R-جبر Λ را آرتین نامند هرگاه به‌عنوان R-مدول با تولید متناهی باشد. یکی از مسائل مهم و با سابقه در نظریه نمایش جبرهای آرتین، رده‌بندی جبرهای از نوع نمایش متناهی است، یعنی جبرهایی که با تقریب یکریختی دارای تعداد متناهی مدول تجزیه ناپذیر هستند. یکی از ابزارهای مهم در این زمینه روش‌های پوششی و یا نظریه پوششی گالوا است.

روش‌های پوششی توسط کارهای بنگارتز [1] و گابریل [2] [۹]، گابریل [۱۲] و ریدمن [3] [۱۹] وارد شاخه نظریه نمایش جبرها شدند. ریدمن در [۱۹] پوشش‌های کیش‌های اوسلندر-ریتن را برای جبرهای از نوع متناهی معرفی کرد و در ادامه بنگارتز و گابریل در [۹] این مفهوم را توسعه دادند و توانستند روشی برای به‌دست آوردن کیش‌های اوسلندر-ریتن برای شمار زیادی از جبرها ارائه دهند. سپس گابریل در [۱۲] مفهوم پوشش گالوا را معرفی کرد و با استفاده از این مفهوم، روشی برای رده‌بندی تمام مدول‌های تجزیه‌ناپذیر روی جبرها با نمایش متناهی ارائه داد. گرین [4] و دلاپنا [5] و مارتینز-ویلا [6] نیز به‌مطالعه‌ی روش‌های پوششی توسعه یافته در مقاله‌های [۱۳] و [۱۷] پرداختند. این روش‌ها مساله برای مدول‌های روی جبر A را به یک رسته‌ی $\mathcal{C}$ تقلیل می‌دهند، که در این‌حالت مساله بسیار ساده‌تر می‌شود. یکی از نتایج مهم در این زمینه قضیه زیر است که توسط گابریل [۱۲] بیان و اثبات شده است.

عبارات و کلمات کلیدی: G-رسته، تابعگون پوششی گالوا، مدول بی‌تاب.

دبیرتخصصی رابط: جواد اسدالهی

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۰۴

. http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134972.1530

[1]Bongartz [2]Gabriel [3]Riedtmann [4]Green [5]De la pena [6]Martinez-Villa

قضیه ۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته‌ی به‌طور موضعی کران‌دار باشد و G یک گروه که روی $\mathcal{C}$ عمل می‌کند به‌طوری‌که عمل G روی $\text{ind-}\mathcal{C}$ آزاد باشد. آن‌گاه، $\mathcal{C}$ به‌طور موضعی از نمایش متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}/G$ به‌طور موضعی از نمایش متناهی باشد.

با توجه به آن‌چه گفته شد، با استفاده از نظریه پوششی، می‌توان بررسی نمود جبر آرتین مورد مطالعه از نوع متناهی است یا خیر و همچنین می‌توان مدول‌های تجزیه‌ناپذیر و با تولید متناهی این جبر را محاسبه نمود. این قضیه محک خوبی برای بررسی از نوع نمایش متناهی بودن جبرهای آرتین است و همچنین یک الگوریتم برای محاسبه مدول‌های تجزیه‌ناپذیر به‌دست می‌دهد. در ادامه دبر [7]، لنزینگ [8] و اسکرونسکی [9] در [۱۰] ثابت کردند که اگر $\mathcal{C}$ رسته‌ای به‌طور موضعی از محمل متناهی باشد و عمل G روی $\text{ind-}\mathcal{C}$ آزاد باشد آن‌گاه $\mathcal{C}/G$ به‌طور موضعی از محمل متناهی است و پوشش گالوا $P:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}/G$ یک دوسویی بین G –مدارهای کلاس‌های یک‌ریختی از اشیا تجزیه‌ناپذیر در $\text{mod-}\mathcal{C}$ و کلاس‌های یک‌ریختی از اشیا تجزیه‌ناپذیر در $\text{mod-}\mathcal{C}/G$ القا می‌کند. برای مطالعه‌ی بیشتر در این مبحث می‌توان به کارهای دابر–اسکرونسکی، آساشیبا [10] ، باتیستا [11] در مقاله‌های [۱۱]، [۳]، [۴]، [۵]، [۷]، و [۸] اشاره کرد.

مدول‌های بی‌تاب توسط باس [12] [۶] معرفی شدند. مدول M را بی‌تاب نامند، هرگاه زیر مدولی از یک مدول تصویری باشد. سپس این کلاس از مدول‌ها توسط ریاضیدانان دیگر (در شاخه های مختلف جبر) مورد توجه قرار گرفت، برای نمونه مراجع [۱۴، ۱۶، ۲۶] را ببینید. مدول‌های بی‌تاب در حوزه نظریه نمایش جبرها به‌واسطه‌ی مفهوم بُعد نمایش یک جبر مورد توجه قرار گرفتند. بُعد نمایش جبرهای آرتین توسط اوسلندر [13] در سال ۱۹۷۱ معرفی شد [۱]. فرض کنید Λ یک جبر آرتین باشد. Λ–مدول با تولید متناهی M را مولد–هم‌مولد نامند هرگاه هر Λ–مدول تجزیه ناپذیر تصویری یا تزریقی جمع‌وندی از جمع مستقیم M باشد. بُعد نمایش Λ را با نماد $\operatorname{remdim}\Lambda$ نمایش می‌دهند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{repdim}\Lambda=\inf\{\operatorname{gl.dim}(\operatorname{End}_\Lambda(M))\mid M\ \text{مولد–هم‌مولد باشد}\}.$$

در بررسی‌های انجام شده توسط اوسلندر مشخص شد که جبر آرتین Λ از نوع نمایش متناهی است اگر و تنها اگر $\operatorname{repdim}\Lambda\leq 2$. سپس این سوال مطرح شد که آیا تمامی جبرها دارای بُعد نمایش متناهی هستند یا خیر؟ رینگل [14] [۲۱] با در نظر گرفتن کلاس مدول‌های بی‌تاب نشان داد که هر جبر آرتین بی‌تاب–متناهی، دارای بُعد نمایش حداکثر ۳ است. جبر آرتین Λ بی‌تاب–متناهی نامیده می‌شود، هرگاه تا حد یکریختی تعداد متناهی Λ–مدول باتولید متناهی تجزیه‌ناپذیر و بی‌تاب وجود داشته باشد. توجه شود که بسیاری از کلاس‌های مورد علاقه از جبرهای آرتین، بی‌تاب–متناهی هستند، برای جزئیات بیشتر [۲۳، ۶.۳] را ببینید. شاید بتوان گفت در حوزه نظریه نمایش جبرها، رینگل و ژانک [15] بیشترین توجه را به این مدول‌ها داشت، برای نمونه به مراجع [۲۰، ۲۲، ۲۳، ۲۴] مراجعه کنید.

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته به‌طور موضعی کران‌دار باشد. $\mathcal{C}$–مدول M را بی‌تاب نامیم، اگر M یک زیرمدول از یک $\mathcal{C}$–مدل تصویری باشد. به‌علاوه، رسته $\mathcal{C}$ را به‌طور موضعی بی‌تاب–متناهی گوئیم، هرگاه برای هر $x\in\mathcal{C}$، تا حد یکریختی تنها تعداد متناهی $\mathcal{C}$–مدول M با تولید متناهی تجزیه‌ناپذیر و بی‌تاب وجود داشته باشد که $M(x)\neq 0$. در این مقاله، قصد داریم پوشش گالوا روی رسته‌های بی‌تاب–متناهی را بررسی کنیم. به‌طور دقیق‌تر، نشان خواهیم داد که هرگاه $\mathcal{C}$ یک رسته به‌طور موضعی از محمل متناهی باشد و G یک گروه که به‌طور آزاد روی $\text{ind-}\mathcal{C}$ عمل می‌کند، آن‌گاه $\mathcal{C}$ به طور موضعی بی‌تاب متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}/G$ به‌طور موضعی بی‌تاب–متناهی باشد.

---
[7] Dowber [8] Lenzing [9] Skowronski [10] Asashiba [11] Bautista [12] Bass [13] Auslander [14] Ringel [15] Zhang

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134972.1530

۲. مفاهیم مقدماتی

در سرتاسر این مقاله k نشانگر یک میدان است. رسته $\mathcal{C}$ را k–رسته نامند هرگاه مجموعه ریخت‌ها، k–فضای برداری و ترکیب ریخت‌ها k–دوخطی باشند.

فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ یک k –رسته باشد. $\mathcal{C}$ را به‌طور موضعی از بعد متناهی گویند اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر شی $x \in \mathcal{C}$، جبر درون‌ریختی $\mathcal{C}(x,x)$ موضعی باشد.

(۲) برای هر دو شی $x,y \in \mathcal{C}$ که $x \neq y$، داشته باشیم $x \ncong y$.

(۳) برای هر دو شی $x,y \in \mathcal{C}$، $[\mathcal{C}(x,y):k] < \infty$ ، که در آن $[\mathcal{C}(x,y):k]$، k –بعد $\mathcal{C}(x,y)$ تعریف می‌شود.

(۴) برای هر شی $x \in \mathcal{C}$ مجموعه‌ی زیر متناهی باشد

$$\{y \in \mathcal{C} \quad s.t. \quad \mathcal{C}(x,y) \neq 0 \text{ یا } \mathcal{C}(y,x) \neq 0\}.$$

اگر k–رسته به‌طور موضعی از بعد متناهی $\mathcal{C}$ در شرط صدق کند، آن را به‌طور موضعی کران‌دار نامند.

۳. رسته تابعگون‌ها

برای هر k–رسته به‌طور موضعی کران‌دار $\mathcal{C}$، فرض کنید Mod–$\mathcal{C}$ بیانگر رسته تابعگون‌های پادورد و k–خطی از $\mathcal{C}$ به Mod–k باشد که رسته $\mathcal{C}$–مدول‌ها (راست) نیز نامیده می‌شود. برای هر شئ x از $\mathcal{C}$، با استفاده از لم یوندا به‌راحتی می‌توان نشان داد که $\mathcal{C}(-,x)$ یک شئ تصویری در رسته Mod–$\mathcal{C}$ است. به‌علاوه برای هر تابعگون F از Mod–$\mathcal{C}$، بروریختی $\coprod_i \mathcal{C}(-,x_i) \longrightarrow F \longrightarrow 0$ وجود دارد که x_i ها اعضایی از $\mathcal{C}$ هستند.

$\mathcal{C}$ –مدول F را با تولید متناهی گویند اگر همریختی پوشا $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathcal{C}(-,x_i) \xrightarrow{\alpha} F \longrightarrow 0$ موجود باشد که در آن x_i ها به $\mathcal{C}$ تعلق دارند. همچنین اگر $\ker \alpha$ با تولید متناهی باشد، در این‌صورت M را $\mathcal{C}$ –مدول با نمایش متناهی نامند. رسته‌ی همه‌ی $\mathcal{C}$ –مدول‌های با تولید متناهی را با mod–$\mathcal{C}$ نشان می‌دهیم.

$\mathcal{C}$–مدول F از محمل متناهی است، هرگاه تعداد متناهی $x \in \mathcal{C}$ وجود داشته باشد که $F(x) \neq 0$. این خاصیت را با نماد $|Supp - F| < \infty$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۱.۳. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک k –رسته‌ی به‌طور موضعی کران‌دار و F یک $\mathcal{C}$ –مدول با تولید متناهی باشد. آنگاه F به‌صورت خارج قسمت جمع مستقیم متناهی مدول‌های نمایش‌پذیر $\mathcal{C}(-,x)$ است که $\sum\limits_{y \in \mathcal{C}} [\mathcal{C}(x,y):k] < \infty$ ، بنابراین برای هر $\mathcal{C}$ –مدول با تولید متناهی F، $\sum\limits_{x \in \mathcal{C}} [F(x):k] < \infty$. پس هر $\mathcal{C}$ –مدول با تولید متناهی، از طول متناهی است. از طرف دیگر اگر F یک $\mathcal{C}$ –مدول با خاصیت $\sum\limits_{x \in \mathcal{C}} [F(x):k] < \infty$ باشد، آنگاه با توجه به [۹، ۲.۲]، F با تولید متناهی است. بنابراین اگر $\mathcal{C}$ –مدول F با تولید متناهی به‌همراه دنباله دقیق $\oplus_{i=1}^{n} \mathcal{C}(-,x_i) \xrightarrow{\alpha} F \longrightarrow 0$ باشد، آنگاه $\sum\limits_{x \in \mathcal{C}} [\ker\alpha(x):k] < \infty$. پس $\ker\alpha$ با تولید متناهی و لذا F با نمایش متناهی است. همچنین اگر F یک $\mathcal{C}$ –مدول با تولید متناهی با خاصیت $\sum\limits_{x \in \mathcal{C}} [F(x):k] < \infty$ باشد آنگاه F از محمل متناهی است.

k –رسته‌ی $\mathcal{C}$ را به‌طور موضعی با نمایش متناهی نامند، هرگاه برای هر شی $x \in \mathcal{C}$، تا حد یکریختی تعداد متناهی $\mathcal{C}$–مدول با تولید متناهی و تجزیه‌ناپذیر M وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M(x) \neq 0$. k –رسته‌ی به‌طور موضعی کران‌دار $\mathcal{C}$ به‌طور موضعی از محمل متناهی است، هرگاه برای هر $x \in \mathcal{C}$، زیر رسته‌ی پر از $\mathcal{C}$ شامل اشیا مانند M به‌طوری‌که M تجزیه‌ناپذیر، $|Supp - M| < \infty$ و $M(x) \neq 0$، متناهی باشد. با توجه به تبصره ۱.۳ هر $\mathcal{C}$ –مدول با تولید متناهی از

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134972.1530

محمل متناهی است. بنابراین هر k ـرسته‌ی به‌طور موضعی با نمایش متناهی، k ـرسته‌ی به‌طور موضعی از محمل متناهی نیز است. اما k ـرسته‌های به‌طور موضعی از محمل متناهی وجود دارند که به‌طور موضعی با نمایش نامتناهی نیستند، به‌عنوان مثال مقاله [۱۱] را ببینید.

برای اطلاعات بیشتر در زمینه نظریه رسته‌ها به مرجع [۱۸] مراجعه شود.

۴. نظریه پوششی گالوا

برای بیان نتایج، ابتدا به‌معرفی برخی مفاهیم از نظریه پوششی می‌پردازیم. برای جزییات بیشتر می‌توان به [۱۲، بخش ۳] و یا مرجع [۲] مراجعه کرد.

فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ یک k ـرسته‌ی به‌طور موضعی کران‌دار و G یک گروه باشد. $\mathcal{C}$ را رسته‌ی با عمل G یا G ـرسته نامند، هرگاه همریختی گروهی $A : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ وجود داشته باشد (که در آن $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ گروه خودریختی‌های k ـخطی از $\mathcal{C}$ است).

بدیهی است که هرگاه چنین همریختی وجود داشته باشد، گروه G به‌صورت زیر روی رسته‌ی $\mathcal{C}$ عمل می‌کند:

(۱) برای هر $a \in G$ و برای هر $x \in \mathcal{C}$ ، $a \cdot x := A(a)(x)$؛

(۲) برای هر $a \in G$ و برای هر $f \in \mathcal{C}$ ، $a \cdot f := A(a)(f)$.

عمل G روی $\mathcal{C}$ آزاد است، اگر برای هر x از $\mathcal{C}$ و هر عضو غیر همانی در G ، $ax \neq x$.

تعریف ۱.۴. فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ ، k ـرسته‌های به‌طور موضعی کران‌دار و $\mathcal{C}$ یک G ـرسته باشد که G روی $\mathcal{C}$ به‌طور آزاد عمل می‌کند. تابعگون k ـخطی $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ را پوشش گالوا توسط گروه G گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر $a \in G$، $F \circ A(a) = F$؛

(۲) برای هر $x \in \mathcal{C}$، $F^{-1}(Fx) = Gx$ که در آن $Gx = \{ax \mid a \in G\}$؛

(۳) برای هر $x, y \in \mathcal{C}$، F یک‌ریختی‌های k ـمدولی زیر را القا کند:

$$F^{(1)}_{y,x} : \bigoplus_{a\in G} \mathcal{C}(ax, y) \to \mathcal{C}'(F(x), F(y));$$

$$F^{(2)}_{y,x} : \bigoplus_{a\in G} \mathcal{C}(x, ay) \to \mathcal{C}'(F(x), F(y));$$

(۴) $F : \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$ نگاشت پوشا باشد.

تبصره ۲.۴. به‌ازای هر دو شی x و y در $\mathcal{C}$ ، یک‌ریختی $\bigoplus_{a\in G} \mathcal{C}(ax, y) \cong \bigoplus_{a\in G} \mathcal{C}(x, ay)$ وجود دارد که نمودار

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{a\in G} \mathcal{C}(ax, y) & \xrightarrow{F^{(1)}_{y,x}} & \mathcal{C}'(F(x), F(y)) \\
\Big\| \wr & & \Big\| \\
\bigoplus_{a\in G} \mathcal{C}(x, ay) & \xrightarrow{F^{(2)}_{y,x}} & \mathcal{C}'(F(x), F(y))
\end{array}$$

را جابه‌جایی می کند، برای جزییات بیشتر به [۳، گزاره ۱.۶] مراجعه کنید. بنابراین، یکریختی بودن هر یک از نگاشت‌های $F^{(1)}_{y,x}$ یا $F^{(2)}_{y,x}$ ، یکریختی بودن دیگری را نتیجه می‌دهد.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134972.1530

فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک G ـرسته و عمل G روی $\mathcal{C}$ آزاد باشد. در این‌صورت رسته مدار $\mathcal{C}/G$ از $\mathcal{C}$ توسط G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱) کلاس اشیا شامل همه‌ی مدارها $Gx = \{ax \mid a \in G\}$، برای هر شی x در $\mathcal{C}$.

(۲) برای هر دو شی u و v در $\mathcal{C}/G$،

$$\mathcal{C}/G(u,v) = \{(f_{y,x})_{x\in u, y\in v} \in \Pi_{x\in u, y\in v}\mathcal{C}(x,y) \mid af_{yx} = f_{ay,ax} \ \ \forall a \in G\ \}$$

(۳) برای هر دو ریخت ترکیب‌پذیر $u \xrightarrow{f} v \xrightarrow{g} w$ در $\mathcal{C}/G$ ، داریم $gf := (\sum_{y\in v} g_{z,y}f_{y,x})_{x\in u, z\in w}$.

اکنون تابعگون کانونی $P : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/G$ را داریم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱) برای هر x در $\mathcal{C}$ ، $P(x) = Gx$.

(۲) برای هر $x, y \in \mathcal{C}$ و هر $f \in \mathcal{C}(x,y)$ ، $P(f) = (\delta_{a,b}af)_{(a,b)\in G\times G}$.

بنا بر [۱۲، گزاره ۱.۳]، هرگاه رسته‌ی $\mathcal{C}$ به‌طور موضعی از بعد متناهی باشد آن‌گاه رسته مدار $\mathcal{C}/G$ به‌طور موضعی از بعد متناهی است و $P : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/G$ پوشش گالوا توسط G است.

فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ یک G ـرسته باشد. آن‌گاه عمل G روی $\mathcal{C}$ یک G ـعمل روی $\text{Mod–}\mathcal{C}$ القا می‌کند. به‌طور دقیق‌تر برای هر $a \in G$، می‌توانیم خودریختی k ـخطی $\overline{A}(a) : \text{Mod–}\mathcal{C} \longrightarrow \text{Mod–}\mathcal{C}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

برای هر X در $\text{Mod–}\mathcal{C}$، $\overline{A}(a)(X) = X \circ A(a^{-1})$. همچنین برای راحتی در نمادگذاری به‌جای $\overline{A}(a)(X)$ از نماد ${}^aX$ و برای هر ریخت $\eta : X \longrightarrow Y$ در $\text{Mod–}\mathcal{C}$ به‌جای $\overline{A}(a)(\eta)$ از نماد ${}^a\eta$ استفاده می‌کنیم. پس با توجه به این تعریف برای هر $x \in \mathcal{C}$، $ {}^a\mathcal{C}(-,x) = \mathcal{C}(a^{-1}(-),x) \cong \mathcal{C}(-,ax)$.

فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک G ـرسته و عمل G روی $\mathcal{C}$ آزاد باشد. تابعگون کانونی $P : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/G$ تابعگون $P_. : \text{Mod–}(\mathcal{C}/G) \longrightarrow \text{Mod–}\mathcal{C}$ را با ضابطه‌ی $P_.(X) = X \circ P$ برای هر X در $\text{Mod–}(\mathcal{C}/G)$ القا می‌کند که تابعگون بالابرنده روی P نامیده می‌شود. این تابعگون، دارای تابعگون الحاقی چپ است که با P_λ نمایش داده می‌شود و به آن تابعگون پایین رونده گویند. در واقع $P_\lambda : \text{Mod–}\mathcal{C} \longrightarrow \text{Mod–}(\mathcal{C}/G)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنیم X در $\text{Mod–}\mathcal{C}$ باشد. در این‌صورت برای هر u در $\mathcal{C}/G$ ، $P_\lambda(X)(u) := \oplus_{x\in u}X(x)$ و برای هر ریخت $f : u \to v$ در $\mathcal{C}/G$، جایی‌که $f = (f_{y,x})_{x\in u, y\in v}$، $P_\lambda(X)(f)$ با استفاده از نمودار جابه‌جایی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{ccc}
(P_\lambda X)(v) & \xrightarrow{(P_\lambda X)(f)} & (P_\lambda X)(u) \\
\| & & \| \\
\oplus_{y\in v}X(y) & \xrightarrow{(X(f_{y,x}))_{x,y}} & \oplus_{x\in u}X(x).
\end{array}$$

به‌علاوه، اگر $\tau : X \longrightarrow X'$ یک ریخت در $\text{Mod–}\mathcal{C}$ باشد، برای هر شی u در $\mathcal{C}/G$، $(P_\lambda\tau)_u$ توسط نمودار جابه‌جایی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{ccc}
(P_\lambda X)(u) & \xrightarrow{(P_\lambda\tau)_u} & (P_\lambda X')(u) \\
\| & & \| \\
\oplus_{x\in u}X(x) & \xrightarrow{\oplus_{x\in u}\tau_x} & \oplus_{x\in u}X'(x).
\end{array}$$

با توجه به [۱۲، لم ۳.۲]، برای هر $\mathcal{C}$ ـمدول X یک‌ریختی کانونی $P_.P_\lambda(X) \cong \oplus_{a\in G}{}^aX$ وجود دارد.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134972.1530

۵. پوشش گالوا روی مدول‌های بی‌تاب

در این بخش رفتار پوشش گالوا روی رسته‌های به‌طور موضعی بی‌تاب–متناهی را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که خاصیت به‌طور موضعی بی‌تاب–متناهی تحت تابعگون پوشش گالوا حفظ می‌شود. در سرتاسر این بخش $\mathcal{C}$ نشان‌گر یک k –رسته‌ی به‌طور موضعی کران‌دار به‌همراه عمل گروه G است.

تبصره ۱.۵. باتوجه به‌تعریف $P_\cdot$، به‌راحتی دیده می‌شود که این تابعگون دقیق و حافظ اشیا تصویری است؛ یعنی، اگر Q یک $\mathcal{C}/G$–مدول تصویری باشد، آن‌گاه $P_\cdot(Q)$ یک $\mathcal{C}$–مدول تصویری است. به‌علاوه، با استفاده مستقیم از تعریف، دیده می‌شود که P_λ نیز یک تابعگون دقیق است. همچنین، زوج الحاقی $(P_\lambda, P_\cdot)$ به‌همراه دقیق بودن $P_\cdot$ ایجاب می‌کند که P_λ اشیا تصویری را حفظ کند.

همان‌گونه که در مقدمه ذکر شد، دبر، لنزینگ و اسکرونسکی [۱۰] نتیجه گابریل را برای رسته‌های به‌طور موضعی از محمل متناهی تعمیم دادند، در حقیقت آن‌ها قضیه زیر را اثبات کردند:

قضیه ۲.۵. [۱۰] فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک k –رسته‌ی به‌طور موضعی از محمل متناهی به‌همراه عمل گروه G باشد به‌طوری که عمل G روی $\text{ind-}\mathcal{C}$ آزاد است. در این‌صورت $\mathcal{C}/G$ به‌طور موضعی از محمل متناهی است و تابعگون پایین‌رونده $P_\lambda : \text{mod-}\mathcal{C} \longrightarrow \text{mod-}(\mathcal{C}/G)$ چگال است.

فرض کنیم $\mathcal{D}$ یک k–رسته به‌طور موضعی کراندار باشد. $\mathcal{D}$–مدول، به‌ترتیب $\mathcal{D}$–مدول با تولید متناهی، M را بی‌تاب گوییم، هرگاه $\mathcal{D}$–مدول تصویری، به‌ترتیب $\mathcal{D}$–مدول باتولید متناهی و تصویری، P وجود داشته باشد که M در آن نشانده شود. کلاس تمامی $\mathcal{D}$–مدول‌های بی‌تاب، به ترتیب $\mathcal{D}$–مدول‌های باتولید متناهی و بی‌تاب را با $\mathfrak{L}(\mathcal{D})$، به‌ترتیب با $\mathcal{L}(\mathcal{D})$، نمایش می‌دهیم. رسته $\mathcal{D}$ را به‌طور موضعی بی‌تاب–متناهی گوئیم، هرگاه برای هر $x \in \mathcal{D}$، تا حد یکریختی تنها تعداد متناهی $\mathcal{D}$–مدول M با تولید متناهی تجزیه‌ناپذیر و بی‌تاب وجود داشته باشد که $M(x) \neq 0$.
فرض کنیم $\text{ind-}\mathcal{C}$ زیررسته پُر از $\text{mod-}\mathcal{C}$ باشد که اشیا آن تشکیل مجموعه کامل از نماینده‌های رده‌های هم‌ارزی از مدول‌های تجزیه‌ناپذیر از $\text{mod-}\mathcal{C}$ را می‌دهند که تحت عمل القا شده توسط G بسته است.

گزاره ۳.۵. فرض کنیم G یک گروه باشد که به‌طور آزاد روی $\text{ind-}\mathcal{C}$ عمل می‌کند. اگر $\mathcal{C}/G$ یک رسته به‌طور موضعی بی‌تاب–متناهی باشد، آن‌گاه $\mathcal{C}$ نیز چنین است.

اثبات. برای شئ x از رسته $\mathcal{C}$، فرض کنید $X_1, \dots, X_n$، تا حد یکریختی، تمامی $\mathcal{C}/G$–مدول‌های با تولید متناهی، تجزیه ناپذیر و بی‌تاب باشند که $X_i(Px) \neq 0$. برای هر $1 \leq i \leq n$، جمعوند تجزیه‌ناپذیر M_i از $P_\cdot(X_i)$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم G_i زیرمجموعه‌ای متناهی از G باشد که برای هر $a \in G_i$، $M_i(a^{-1}x) \neq 0$.
ادعا می‌کنیم که برای هر $\mathcal{C}$–مدول تجزیه‌ناپذیر M که عضوی از $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ نیز است و $M(x) \neq 0$، $0 \leq j \leq n$ به‌همراه $a \in G_j$ وجود دارد که $M \cong {}^aM_j$. ابتدا تجزیه زیر را از $\mathcal{C}/G$–مدول‌های تجزیه‌ناپذیر در نظر می‌گیریم:

$$P_\lambda M \cong Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m.$$

با اعمال تابعگون $P_\cdot$ یکریختی‌های زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\bigoplus_{a \in G} {}^aM \cong P_\cdot P_\lambda M \cong P_\cdot Y_1 \oplus \cdots P_\cdot Y_m.$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134972.1530

طبق [۲۵، قضیه ۱]، برای $\circ \leq j \leq m$ یکریختی $P_{\cdot}Y_j \cong \bigoplus_{a\in H} {}^aM$ وجود دارد که H یک زیرمجموعه متناهی از G است. با توجه به انتخاب ما، این نتیجه می‌دهد که Y_j با یکی از $X_{i(j)}$ها یکریخت است. در نتیجه، به ازای $a \in G$ داریم، $M \cong {}^aM_{i(j)}$. پس ادعا اثبات شده و بنابراین رسته $\mathcal{C}$ به‌طور موضعی بی‌تاب‌ـمتناهی است. □

گزاره ۴.۵. فرض کنیم G یک گروه باشد که به‌طور آزاد روی $\text{ind–}\mathcal{C}$ عمل می‌کند. در این‌صورت، تابعگون‌های القاشده‌ی زیر وجود دارند:

$$P_\lambda : \mathcal{L}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}/G) \quad \text{و} \quad P_{\cdot} : \mathfrak{L}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{C}/G).$$

اثبات. فرض کنید M یک $\mathcal{C}$ـمدول بیتاب باشد. در این‌صورت $\mathcal{C}$ـمدول با تولید متناهی و تصویری Q به‌همراه دنباله دقیق $Q \longrightarrow M \longrightarrow \circ$ وجود دارد. تابعگون P_λ را روی دنباله فوق اثر می‌دهیم. بنا بر تبصره ۱.۵، P_λ دقیق و حافظ مدول‌های تصویری است. پس دنباله‌ی $P_\lambda(Q) \longrightarrow P_\lambda(M) \longrightarrow \circ$ دقیق است، که در آن $P_\lambda(Q)$ یک $\mathcal{C}/G$ـمدول با تولید متناهی و تصویری است. پس وجود تابعگون $P_\lambda : \mathcal{L}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}/G)$ را نتیجه می‌گیریم. با روندی مشابه به استدلال فوق وجود تابعگون $P_{\cdot} : \mathfrak{L}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{C}/G)$ را می‌توان به‌دست آورد. □

تابعگون پادورد $^* : \text{Mod–}\mathcal{C} \longrightarrow \text{Mod–}\mathcal{C}^{op}$ را در نظر بگیرید که برای هر $\mathcal{C}$ـمدول M و هر عضو x هر $\mathcal{C}$، $M^*(x) := \text{Mod–}\mathcal{C}(M, \mathcal{C}(-,x))$. بنا بر [۵، گزاره ۳.۴] تابعگون زیر را روی مدول‌های با تولید متناهی داریم: $^* : \text{mod–}\mathcal{C} \longrightarrow \text{mod–}\mathcal{C}^{op}$

لم ۵.۵. (i) اگر $\mathcal{C}$ـمدول باتولید متناهی M بی‌تاب نیز باشد، آنگاه تبدیل طبیعی $\phi : M \longrightarrow M^{**}$ تکریختی است.

(ii) $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \text{mod–}\mathcal{C} \cap \mathfrak{L}(\mathcal{L})$.

اثبات. (i) ابتدا توجه کنید که با استفاده از لم یوندا به راحتی دیده می‌شود که برای هر شی x از $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}(x,-)^* \cong \mathcal{C}(-,x),\ \ \mathcal{C}(-,x)^* \cong \mathcal{C}(x,-)$. پس برای هر شی x از رسته $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}(-,x)^{**} \cong \mathcal{C}(-,x)$. اکنون بنا بر تعریف، دنباله دقیق $P \longrightarrow M \longrightarrow \circ$ وجود دارد که P یک $\mathcal{C}$ـمدول با تولید متناهی و تصویری است. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $P = \oplus_{i=1}^{n}\mathcal{C}(-,x_i)$. بنابراین $P^{**} \cong P$ و نمودار جابجایی زیر نتیجه می‌دهد که ϕ تکریختی است:

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ & & M^{**} & \longrightarrow & P^{**}. \end{array}$$

(ii) بدیهی است که $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{L}(\mathcal{C}) \cap \text{mod–}\mathcal{C}$. برعکس فرض کنیم $M \in \mathfrak{L}(\mathcal{C}) \cap \text{mod–}\mathcal{C}$. از آنجایی که M با تولید متناهی است، M^* نیز با تولید متناهی است. پس دنباله دقیق $\circ \longrightarrow M^* \longrightarrow Q$ را داریم که Q یک $\mathcal{C}^{op}$ـمدول با تولید متناهی و تصویری است. تابعگون * را روی دنباله فوق اثر می‌دهیم و دنباله دقیق $Q^* \longrightarrow M^{**} \longrightarrow \circ$ را به‌دست می‌آوریم. با ترکیب تکریختی فوق و ϕ تکریختی $Q^* \longrightarrow M \longrightarrow \circ$ را به‌دست می‌آوریم که نتیجه می‌دهد $M \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. □

قضیه ۶.۵. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک k ـرسته‌ی به‌طور موضعی از محمل متناهی و G یک گروه باشد که به‌طور آزاد روی $\text{ind–}\mathcal{C}$ عمل می‌کند. آن‌گاه، تابعگون $P_\lambda : \mathcal{L}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}/G)$ یک پوشش گالوا توسط گروه G است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134972.1530

اثبات. فرض کنیم M و N، $\mathcal{C}$–مدول‌های با تولید متناهی و بی‌تاب باشند. آن‌گاه، برای هر $a \in G$، ${}^aN$ نیز $\mathcal{C}$–مدول با تولید متناهی و بی‌تاب است و یکریختی کانونی زیر وجود دارد:

$$\mathcal{L}(\mathcal{C})(M, \bigoplus_{a\in G} {}^aN) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{a\in G} \mathcal{L}(\mathcal{C})(M, {}^aN).$$

به‌علاوه، زوج الحاقی $(P_\lambda, P_.)$ به همراه گزاره ۴.۵، یگریختی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}/G)(P_\lambda(M), P_\lambda(N)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{L}(\mathcal{C})(M, P_. P_\lambda(N)).$$

نمودار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{a\in G} \mathcal{L}(\mathcal{C})(M, {}^aN) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{L}(\mathcal{C})(M, \bigoplus_{a\in G} {}^aN) \\ \downarrow {\scriptstyle P^{(۲)}_{.M,N}} & & \downarrow {\scriptstyle \wr} \\ \mathcal{L}(\mathcal{C}/G)(P_\lambda(M), P_\lambda(N)) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{L}(\mathcal{C})(M, P_. P_\lambda(N)). \end{array}$$

جابجایی بودن نمودار در اثبات [۳، قضیه ۳.۴]، جابجایی بودن نمودار فوق را نتیجه می‌دهد که نشان دهنده k–یکریختی بودن نگاشت

$$P^{(۲)}_{.M,N} : \bigoplus_{a\in G} \mathcal{L}(\mathcal{C})(M, {}^aN) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}/G)(P_\lambda(M), P_\lambda(N))$$

است.

حال فرض کنیم $\mathcal{C}$ به‌طور موضعی از محمل متناهی باشد. بنابر قضیه ۲.۵، $P_\lambda : \text{mod–}\mathcal{C} \longrightarrow \text{mod–}\mathcal{C}/G$ یک پوشش گالوا توسط G است. در حقیقت در [۱۰] اثبات شده است که اگر $Y \in \text{mod–}\mathcal{C}/G$، آن‌گاه $Y \cong P_\lambda(X_Y)$ که X_Y یک جمع‌وند خاص از $P_.Y$ است. بنابراین، اگر Y از ابتدا بی‌تاب در نظر گرفته شود، $P_.Y$ و لذا X_Y نیز بی‌تاب خواهد بود. بنا بر لم ۵.۵، $X_Y \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ و در نتیجه $P_\lambda : \mathcal{L}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}/G)$، یک پوشش گالوا توسط گروه G است. □

اکنون قضیه زیر را داریم که می‌توان آن‌را نسخه‌ای از قضیه گابریل برای مدول‌های بی‌تاب–متناهی در نظر گرفت.

قضیه ۷.۵. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک k –رسته‌ی به‌طور موضعی از محمل متناهی و G یک گروه باشد که به‌طور آزاد روی $\text{ind–}\mathcal{C}$ عمل می‌کند. آن‌گاه،

(i) تابعگون پایین‌رونده P_λ پوشش گالولی $P_\lambda : \text{ind–}\mathcal{L}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{ind–}\mathcal{L}(\mathcal{C}/G)$ را القا می‌کند، به‌ویژه $\text{ind–}\mathcal{L}(\mathcal{C}/G) \cong \text{ind–}\mathcal{L}(\mathcal{C})/G$.

(ii) $\mathcal{C}$ به‌طور موضعی بی‌تاب–متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}/G$ به‌طور موضعی بی‌تاب–متناهی باشد.

اثبات. (i) از آن‌جایی که طبق قضیه ۶.۵، P_λ یک پوشش گالوا است، P_λ اشیا تجزیه‌پذیر را به اشیا تجزیه‌پذیر می‌برد، [۷، لم ۶.۲] را ببینید. این مطلب به‌همراه [۱۲، لم ۵.۳] نتیجه می‌دهد که $M \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $P_\lambda M$ در $\mathcal{L}(\mathcal{C}/G)$ تجزیه‌ناپذیر باشد. حال، حکم با استفاده از قضیه ۶.۵ به‌دست می‌آید.

(ii) از قسمت قبل و گزاره ۳.۵ نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۸.۵. فرض کنیم Λ یک جبر آرتین به‌طور موضعی از محمل متناهی باشد و G زیرگروه متناهی از $Aut(\Lambda)$ باشد که روی $\text{ind-}\Lambda$ به‌صورت آزاد عمل می‌کند. آن‌گاه، Λ بی‌تاب‌-متناهی است اگر و تنها اگر جبر گروهی ΛG بی‌تاب‌-متناهی باشد.

اثبات. توجه کنید که اگر Λ را به‌عنوان یک رسته با تنها یک شی در نظر بگیریم، آن‌گاه بنا بر [۳، مثال ۱۲.۲]، $\text{mod-}\Lambda/G$ هم ارز با $\text{mod-}\Lambda G$ است و بنابراین حکم از قضیه ۷.۵ نتیجه می‌شود. □

مراجع

[1] M. Auslander, *The representation dimension of artin algebras*, Queen Mary College Mathematics Notes, 1971, Republished in Selected works of Maurice Auslander. Amer. Math. Soc., Providence 1999.

[2] H. Asashiba, Categories and Representation Theory, *American Mathematical Society*, (2022).

[3] H. Asashiba, A generalization of Gabriel's Galois covering functors and derived equivalences, *J. Algebra*, **334** (2011) 109–149.

[4] H. Asashiba, Gluing derived equivalences together, *Adv. Math.* , **235** (2013) 134–160.

[5] H. Asashiba, B. Hafezi and R. Vahed, Gorenstein versions of covering techniques for linear categories and their applications, *J. Algebra*, **507** (2018) 320–361.

[6] H. BASS, Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960) 466–488.

[7] R. Bautista and S. Liu, Covering theory for linear categories with application to derived categories, *J. Algebra* , **408** (2014) 173–225.

[8] R. Bautista and S. Liu, The bounded derived categories of an algebra with radical squared zero, *J. Algebra*, **482** (2017) 303–345.

[9] K. Bongartz and P. Gabriel, Covering spaces in representation theory, *Invent. Math.*, **65** (1982) 331–378.

[10] P. Dowbor, H. Lenzing and A. Skowroǹski, *Galois coverings of algebras by locally support-finite categories,* Proc. Ottawa Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1986 91-93.

[11] P. Dowbor and A. Skowroǹski, Galois coverings of representation-infinite algebras, *Comment. Math. Helv.*, **62** (1987) 311–337.

[12] P. Gabriel, *The universal cover of a representation-finite algebra,* in: Lecture Notes in Math., **903**, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981 68–105.

[13] E. L. Green, Graphs with relations, coverings and group-graded algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **279** (1983) 297–310.

[14] T. Kato, Torsionless modules, *Tôhoku Math. Journ.*, **20** (1968) 234–243.

[15] H. Krause, Krull–Schmidt categories and projective covers, *Expo. Math.*, **33** (2015) 535–549.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134972.1530

[16] R. Luo and Z. Huang, When are torsionless modules projective? *J. Algebra*, **320** (2008) 2156–2164.

[17] R. Martínez-Villa and J. A. de la Peña, The universal cover of a quiver with relations, *J. Pure Appl. Algebra*, **30** (1983) 277–292.

[18] E. Riehl, Category Theory in Context, Dover Publications, 2017.

[19] C. Riedtmann, Algebren, Darstellungskocher, Uberlagerungen und zuruck, *Comment. Math. Helv.*, **55** (1980) 199–224.

[20] C. M. Ringel, Simple reflexive modules over finite-dimensional algebras, *J. Algebra App.*, **20** (2021) 11 pp.

[21] C. M. Ringel, The torsionless modules of an artin algebra, Selected Topics WS 2007/8. http://www.math.uni-bielefeld.de/ringel/opus/torsionless.pdf.

[22] C. M. Ringel and P. Zhang, Representations of quivers over the algebra of dual numbers, *J. Algebra*, **475** (2017) 327–360.

[23] C. M. Ringel and P. Zhang, Gorenstein-projective and semi-Gorenstein-projective modules, *Algebra Number Theory*, **14** (2020) 1–36.

[24] C. M. Ringel and P. Zhang, Gorenstein-projective and semi-Gorenstein-projective modules.II, *J. Pure Appl. Algebra*, **224** (2020) 23 pp.

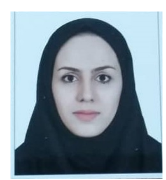
[25] R. B. Warfield, A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **22** (1969) 460–465.

[26] J. M. Zelmanowitz, Endomorphism rings of torsionless modules, *J. Algebra*, **5** (1967) 325–341.

راضیه واحد

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر خوانسار، دانشگاه خوانسار، اصفهان، ایران.

vahed@ipm.ir، r.vahed@khc.ui.ac.ir



راضیه واحد، عضو هیات علمی دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار دانشگاه اصفهان، دانش آموخته کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضی محض دانشگاه شهرکرد و دکترای ریاضی گرایش جبر دانشگاه اصفهان است. علایق پژوهشی وی نظریه نمایش جبرهای آرتین، نظریه رسته‌ها و جبر هومولوژیک است.

On Galois covering of locally torsionless-finite categories

Razieh Vahed

Abstract: Let $\mathcal{C}$ be a locally support-finite k-category with a G-action. It is proved that a Galois covering functor $P : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/G$ induces a Galois covering of categories of their torsionless modules. Using this result, we provide a version of Gabriel's theorem for categories of torsionless modules.

Keywords: $\mathcal{C}$-categories, Galois coverings, torsionless modules.

Razieh Vahed

Department of Mathematics, Khansar Campus, University of Isfahan, Iran.

Email: vahed@ipm.ir, r.vahed@khc.ui.ac.ir

Communicated by Javad Asadollahi.

Article Type: Research Paper.

Received: 01/09/2022, Accepted: 24/01/2023.

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134972.1530