ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۶، شماره ۲ (۱۴۰۰)، صص. ۸۵-۷۵
© ۱۴۰۰ دانشگاه اصفهان
http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

عملگرهای زیرفضا_آشوبناک و جمع مستقیم آن‌ها

منصوره موسی پور* و محمد شهریاری

چکیده. در این مقاله، چند شرط کافی برای زیرفضا_آشوبناک بودن یک عملگر بیان می‌کنیم. ویژگی‌های جمع مستقیم عملگرها از مباحث جالب توجه در نظریه عملگرها است. در این مقاله، نشان می‌دهیم که جمع مستقیم دو عملگر زیرفضا_آشوبناک، حداقل نسبت به دو زیر فضا، زیرفضا_آشوبناک است و این موضوع برای عملگرهای زیرفضا_ترایا و زیرفضا_ابردوری نیز درست است. همچنین به کمک قضیه‌های بیان شده، مثال‌های جالبی از این عملگرها می‌سازیم. به علاوه، ثابت می‌کنیم که اگر جمع مستقیم دو عملگر، زیر فضا_آشوبناک یا زیرفضا_ترایا باشد، هر کدام از آن دو عملگر به ترتیب زیرفضا_آشوبناک یا زیرفضا_ترایا هستند و این نتیجه را به جمع مستقیم تعداد متناهی از این عملگرها نیز تعمیم می‌دهیم.

۱. مقدمه

فرض کنیم X یک فضای باناخ مختلط [1] باشد. عملگر خطی و کراندار T روی X را عملگری ابردوری [2] می‌نامیم اگر $x \in X$ ی وجود داشته باشد که $orb(T,x)$ در X چگال باشد که

$$orb(T,x) = \{x, Tx, T^{۲}x, \dots\}.$$

مفهوم ابردوری بودن، مرتبط با مسئله معروف زیرفضای پایا [3] است و همین امر، موجب جذابیت این مفهوم شده است. منابع [۴] و [۳]، کتاب‌های مفیدی در زمینه عملگرهای ابردوری هستند. در این مقاله، فضای باناخ عملگرهای خطی و کراندار روی X را با $B(X)$ نشان می‌دهیم و اعضای آن را به‌طور اختصار، عملگر می‌نامیم.

در سال ۲۰۱۱ با تعریف عملگرهای زیرفضا_ابردوری، مفهوم عملگرهای ابردوری توسعه داده شد [۸].

فرض کنیم T عملگری روی X و M زیرفضای بسته و ناصفری از X باشد. عملگر T روی X را زیرفضا_ابردوری [4] نسبت به M یا M_ابردوری می‌نامیم اگر $x \in X$ ی وجود داشته باشد که $orb(T,x) \cap M$ در M چگال باشد. در این‌صورت x را یک بردار زیرفضا_ابردوری نسبت به M برای T می‌نامیم. عملگر T روی X را زیرفضا_ابردوری می‌نامیم اگر زیرفضای بسته و ناصفری همانند M از X وجود داشته باشد به‌طوری که T زیرفضا_ابردوری نسبت به M باشد.

همچنین در [۸] عملگرهای زیرفضا_ترایا [5] را نیز معرفی شده است.

عبارات و کلمات کلیدی: عملگرهای زیرفضا_آشوبناک، عملگرهای زیرفضا_ابردوری، عملگرهای زیرفضا_ترایا، جمع مستقیم.
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۹/۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۸
* نویسنده مسئول

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482

[1] complex Banach space [2] hypercyclic [3] invariant subspace [4] subspace- hypercyclic [5] subspace- transitive

عملگر T را روی X در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\mathbb{N}_0$ مجموعه اعداد صحیح نامنفی باشد. می‌گوییم T روی X زیرفضا_ترایا نسبت به زیرفضای بسته و ناصفر M از X یا M_ترایا است اگر برای هر دو زیرمجموعه باز $U \subseteq M$ و $V \subseteq M$ در توپولوژی نسبی، $n \in \mathbb{N}_0$ ی وجود داشته باشد به قسمی که $T^{-n}(U) \cap V$ شامل یک مجموعه ناتهی و باز نسبی از M باشد؛ که بنا به [۸، قضیه ۳.۳] این شرط معادل با این است که $n \in \mathbb{N}_0$ ی یافت شود به قسمی‌که $T^{-n}(U) \cap V$ ناتهی باشد و $T^n(M) \subseteq M$. یادآوری می‌کنیم که برای $x \in X$ داریم، $x \in T^{-n}(U)$ هرگاه $T^n x \in U$.

عملگرهای زیرفضا_ترایا، زیرفضا_ابردوری نیز هستند اما عکس این مطلب، همواره برقرار نیست [۸]. از زمان معرفی این عملگرها، ریاضیدانان و محققان روی آن‌ها مطالعات زیادی را انجام داده‌اند. در سال ۲۰۱۶، بامرنی، کادتس و کلیکمان در [۲] به یکی از پرسش‌هایی که در [۸] مطرح شده بود پاسخ دادند و ثابت کردند که عملگرهای ابردوری، زیرفضا_ابردوری نیز هستند. جیمنز مونگوینا و دیگران در [۶] با ساختن مثال هایی به برخی از سوال‌های باز در زمینه عملگرهای زیرفضا_ابردوری پاسخ داده‌اند. همچنین رده‌های جدیدی از عملگرهای زیرفضا_ابردوری معرفی شده‌اند همانند عملگرهای زیرفضا_ابردوری چندتایی [6] [۱۰] و عملگرهای زیرفضا_سوپر دوری [7] [۱۲].

طالبی و موسی پور در [۱۱] دسته خاصی از عملگرهای زیرفضا_ترایا به نام عملگرهای زیرفضا_آشوبناک [8] را معرفی کردند که در واقع تعمیمی از عملگرهای آشوبناک است. در [۵] درباره ویژگی‌های عملگرهای آشوبناک و ارتباط عملگرهای ابردوری با آن‌ها مطالب جالبی آورده شده است.

فرض کنیم T عملگری روی X و M زیرفضای بسته و ناصفری از X باشد. عملگر T را زیرفضا_آشوبناک نسبت به M یا M_آشوبناک می‌گوییم اگر T زیرفضا_ترایا نسبت به M باشد و مجموعه چگالی از بردارهای متناوب [9] در M داشته باشد. توضیح اینکه بردار $x \in M$ را یک بردار متناوب برای T می‌نامیم اگر $p \in \mathbb{N}$ ی وجود داشته باشد که $T^p(x) = x$. عملگر T را زیر فضا_آشوبناک گوئیم هرگاه زیرفضای بسته و ناصفر M از X وجود داشته باشد به‌طوری‌که T زیرفضا _آشوبناک نسبت به M باشد. همچنین عملگر T را زیرفضا_آمیخته [10] نسبت به M یا M_آمیخته می‌نامیم اگر برای هر دو زیرمجموعه باز U و V در توپولوژی نسبی M، $N \in \mathbb{N}$ ی وجود داشته باشد به قسمی‌که برای هر $n > N$ داشته باشیم، $T^n(U) \cap V \neq \phi$.

بامرنی و کلیکمان در [۱] نشان دادند که اگر جمع مستقیم [11] دو عملگر، زیرفضا_ابردوری باشد، آن‌گاه هرکدام از آن‌ها نیز زیرفضا_ابردوری هستند و تحت شرایط خاصی، جمع دو عملگر زیرفضا_ترایا باز هم زیرفضا_ترایا است. همچنین آن‌ها در [۱] این سوال را مطرح کرده‌اند که اگر دو عملگر، زیرفضا_ابردوری باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت که جمع مستقیم آن‌ها زیرفضا_ابردوری است؟ به‌علاوه، سوال‌های زیر نیز در این‌باره قابل طرح هستند:

پرسش (۱) اگر جمع مستقیم دو عملگر، زیرفضا_ترایا باشد، آیا بدون در نظر گرفتن شرط دیگری، می‌توان نتیجه گرفت که هرکدام از آن‌ها زیرفضا_ترایا هستند؟

پرسش (۲) اگر دو عملگر، زیرفضا_ترایا باشند آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت که جمع مستقیم آن‌ها زیرفضا_ترایا است؟

پرسش (۳) اگر جمع مستقیم دو عملگر، زیرفضا_آشوبناک باشد، آیا هرکدام از آن‌ها زیرفضا_آشوبناک هستند؟

پرسش (۴) اگر دو عملگر، زیرفضا_آشوبناک باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت که جمع مستقیم آن‌ها زیرفضا_آشوبناک است؟

در بخش ۲، با استفاده از بردارهای متناوب و مقادیر ویژه [12]، چند شرط کافی برای زیرفضا_آشوبناك بودن یك عملگر بیان می‌شود. در بخش ۳، نتایجی راجع به جمع مستقیم عملگرهای زیرفضا_ترایا و زیرفضا_ابردوری بیان می‌شود و به پرسش‌های ۱ و ۲ پاسخ مثبت داده می‌شود.

در بخش ۴، به بررسی جمع مستقیم عملگرهای زیرفضا_آشوبناک پرداخته می‌شود و قضیه‌هایی در این‌باره بیان می‌گردد. به‌علاوه، نشان داده می‌شود که پاسخ پرسش‌های ۳ و ۴، مثبت است.

---

[6] multi subspace- hypercyclic [7] subspace- supercyclic [8] subspace- chaotic [9] periodic points [10] subspace-mixing [11] direct sum [12] eigenvalue

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482

۲. چند ویژگی و شرط کافی برای زیرفضا_آشوبناک بودن

در این بخش به بیان برخی از ویژگی‌های عملگرهای زیرفضا_آشوبناک می‌پردازیم و چند شرط کافی برای زیرفضا_آشوبناک بودن یک عملگر، بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۱. *فرض کنیم $T \in B(X)$ و M زیرفضایی بسته از X باشد. در این‌صورت:*

(الف) اگر عدد طبیعی p ی وجود داشته باشد به قسمی‌که T^p عملگری M_آشوبناک باشد، آن‌گاه T نیز M- آشوبناک است.

(ب) اگر T عملگری M_آشوبناک باشد، آن‌گاه T یک زیرفضای چگال از بردارهای متناوب در M دارد.

اثبات. با توجه به اینکه هر بردار متناوب برای T^p، برداری متناوب برای T است و تعریف عملگر زیرفضا_ترایا، قسمت (الف) به راحتی اثبات می‌شود.
برای اثبات قسمت (ب) ابتدا این نکته را یادآوری می‌کنیم که اگر T عملگری M- آشوبناک باشد، آن‌گاه یک مجموعه چگال از بردارهای متناوب در M دارد. بنابراین کافی است نشان دهیم بردارهای متناوب T در M، تشکیل یک زیرفضا می‌دهند. فرض کنیم x و y دو بردار متناوب برای T و عضو M باشند. پس m و n ی عضو $\mathbb{N}$ وجود دارند به‌طوری که

$$T^m x = x \quad \text{و} \quad T^n y = y.$$

اما M زیرفضای X است. پس برای هر اسکالر α و β داریم، $\alpha x + \beta y \in M$. از طرفی

$$T^{mn}(\alpha x + \beta y) = \alpha (T^m)^n (x) + \beta (T^n)^m (y) = \alpha x + \beta y.$$

پس $\alpha x + \beta y$ یک بردار متناوب برای T و عضو M است. بنابراین مجموعه بردارهای متناوب T در M، تشکیل یک زیرفضا از M را می‌دهند. □

یک شرط کافی برای زیرفضا_آشوبناک بودن یك عملگر با استفاده از بردارهای متناوب و وجود عملگرهایی با ویژگی‌های خاص، در قضیه بعدی ارائه می‌شود.

قضیه ۲.۲. *فرض کنیم $T \in B(X)$ و M زیرفضایی بسته از X و Y_0 زیرمجموعه‌ای چگال از X باشد. فرض کنیم T دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در M و واجد یکی از دو شرط زیر باشد:*

(الف) عملگرهای $S_{n_k} : Y_0 \to M$ موجود باشند به قسمی‌که:

(الف.۱) $S_{n_k} y \to 0$ برای هر $y \in Y_0$.

(الف.۲) $T^{n_k} S_{n_k} y \to y$ برای هر $y \in Y_0$.

(الف.۳) برای هر $y \in Y_0$، زیرمجموعه چگال X_y از M موجود باشد به قسمی که برای هر $x \in X_y$ داشته باشیم $T^{n_k} x \to 0$.

(ب) برای هر $y \in Y_0$، زیرمجموعه چگال X_y از M و عملگرهای $S_{y,n_k} : X_y \to M$ موجود باشند به قسمی‌که:

(ب.۱) $S_{y,n_k} x \to 0$ برای هر $x \in X_y$.

(ب.۲) $T^{n_k} S_{n_k} x \to x$ برای هر $x \in X_y$.

(ب.۳) $T^{n_k} y \to 0$ برای هر $y \in Y_0$.

در این‌صورت T عملگری M_آشوبناک است.

اثبات. فرض کنیم T شرایط قسمت (الف) را داشته باشد. فرض کنیم U و V دو مجموعه باز در توپولوژی نسبی M باشند. بنا به فرض $\overline{Y_0} = M$. پس y ی وجود دارد به قسمی که $y \in U \cap Y_0$. تعریف می کنیم $u_k := S_{n_k} y$. با توجه به (الف.۱) داریم، $u_k \to 0$. بنا به (الف.۳) ، متناظر با این y، مجموعه چگال X_y از M را می‌توان یافت. پس $x \in V \cap X_y$ ی وجود دارد. از (الف.۳) نتیجه می‌شود

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482

که $T^{n_k}x \to \circ$. از طرفی

$$x + u_k \to x. \quad (۱)$$

همچنین از (الف.۲) نتیجه می‌شود که

$$T^{n_k}(x + u_k) = T^{n_k}(x) + T^{n_k}S_{n_k}y \to \circ + y = y. \quad (۲)$$

پس بنا به (۱) و (۲)، $k_\circ$ ی وجود دارد که

$$x + u_{k_\circ} \in V \text{ و } T^{n_{k_\circ}}(x + u_k) \in U. \quad (۳)$$

بنابراین از (۳) نتیجه می‌شود $T^{-n_{k_\circ}}(U) \cap V \neq \phi$. حال چون $T^{n_{k_\circ}}(M) \subseteq M$، بنا به [۸]، قضیه ۳.۳] نتیجه می‌شود که T عملگری Mـ ترایا است. اکنون بنا به فرض، T دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در M است. پس T عملگری Mـ آشوبناک است.

حال در نظر می‌گیریم که T در شرایط قسمت (ب) صدق کند. فرض کنیم U و V دو مجموعه باز در توپولوژی نسبی M باشند. با توجه به چگال بودن $Y_\circ$ در M، بردار $y \in V \cap Y_\circ$ وجود دارد. با توجه به فرض می‌توان زیرمجموعه چگال X_y از M را متناظر با y به دست آمده، یافت. با توجه به اینکه $\overline{X_y} = M$، پس $x \in U \cap X_y$ ی وجود دارد. قرار می‌دهیم، $w_k := S_{y,n_k}x$. بنابراین با توجه به (ب.۱) و (ب.۲) داریم،

$$w_k \to \circ \text{ و } T^{n_k}(w_k) = T^{n_k}S_{y,n_k}x \to x. \quad (۴)$$

پس با توجه به (۴) $y + w_k \to y$ و با توجه به (ب.۳) داریم،

$$T^{n_k}(y + w_k) = T^{n_k}(y) + T^{n_k}S_{y,n_k}x \to \circ + x = x.$$

اکنون مشابه با قسمت قبل، $k_۱$ ی وجود دارد که $T^{-n_{k_۱}}(U) \cap V \neq \phi$. حال چون $T^{n_{k_۱}}(M) \subseteq M$، بنا به [۸]، قضیه ۳.۳] نتیجه می‌شود که T عملگری Mـ ترایا است. اکنون بنا به فرض، T دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در M است. پس T عملگری Mـ آشوبناک است. □

به کمک مقدارهای ویژه، می‌توانیم شرطی کافی برای زیرفضا_آشوبناک بودن یك عملگر بیان کنیم که در قضیه بعدی قابل مشاهده است. قبل از بیان قضیه نیاز داریم تا نکته‌ای را یادآوری کنیم. فرض کنیم T عملگری روی فضای X باشد و فرض کنیم $\mathbb{Q}$ نشان دهنده مجموعه اعداد گویا باشد. اگر مجموعه بردارهای متناوب T را با $Per(T)$ نشان دهیم، آن‌گاه همان‌طور که در [۴، قضیه ۲.۳۳] نشان داده شده است،

$$Per(T) = \text{span}\{x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i}x \text{ که } \alpha \in \mathbb{Q} \text{ی وجود دارد به‌طوری}\}.$$

بنابراین داریم،

$$Per(T) \cap M = \text{span}\{x \in M : Tx = e^{\alpha\pi i}x \text{ که } \alpha \in \mathbb{Q} \text{ی وجود دارد به‌طوری}\}.$$

اکنون به بیان قضیه می‌پردازیم.

قضیه ۳.۲. *فرض کنیم $T \in B(X)$ و M زیرفضای بسته‌ای از X باشد. فرض کنیم*

$$X_\circ = span\{x \in M : Tx = \lambda x \text{ و } |\lambda| < ۱ \text{ که } \lambda \in \mathbb{C} \text{ ی وجود دارد به‌طوری}\},$$

$$Y_\circ = span\{x \in M : Tx = \lambda x \text{ و } |\lambda| > ۱ \text{ که } \lambda \in \mathbb{C} \text{ ی وجود دارد به‌طوری}\},$$

$$Z_\circ = span\{x \in M : Tx = e^{\lambda\pi i}x \text{ که } \lambda \in \mathbb{Q} \text{ ی وجود دارد به‌طوری}\}.$$

اگر $X_\circ$ و $Y_\circ$ و $Z_\circ$ در M چگال باشند و دنباله صعودی $\{n_k\}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $T^{n_k}(M) \subseteq M$، آن‌گاه T عملگری Mـ آشوبناک است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482

اثبات. با توجه به آنچه که گفته شد، اعضای $Z_\circ$ بردارهای متناوب T در M هستند. حال چون $Z_\circ$ در M چگال است، پس T مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در M دارد.

اکنون نشان می‌دهیم که T عملگری زیرفضا‌ـترایا نسبت به M است. فرض کنیم $U \subseteq M$ و $V \subseteq M$ دو مجموعه باز باشند. چون $X_\circ$ و $Y_\circ$ در M چگال هستند پس x و y ی عضو M وجود دارند به قسمی که $x \in X_\circ \cap V$ و $y \in Y_\circ \cap U$. بنابراین اسکالرهای α_k و β_k که $1 \leq k \leq n$ و بردارهای $x_k \in X_\circ$ و $y_k \in Y_\circ$ که $1 \leq k \leq n$، وجود دارند به قسمی که

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \quad \text{و} \quad y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k.$$

بنابراین برای هر $1 \leq k \leq n$ می‌توانیم اسکالرهای t_k و μ_k پیدا کنیم به قسمی که $|t_k| < 1$ و $Tx_k = t_k x_k$ و $|\mu_k| > 1$ و $Ty_k = \mu_k y_k$. بنابراین اگر قرار دهیم

$$u_m = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{1}{{\mu_k}^m} y_k,$$

آن‌گاه وقتی $m \to \infty$ داریم، $u_m \to 0$ و در نتیجه

$$x + u_m \to x. \tag{5}$$

همچنین وقتی $m \to \infty$ داریم،

$$T^m(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k {t_k}^m x_k \to 0.$$

همچنین

$$\begin{aligned} T^m(x+u_m) &= T^m(x) + T^m(u_m) \\ &= T^m(x) + \sum_{k=1}^{n} T^m \left(\beta_k \frac{1}{{\mu_k}^m} y_k \right) \\ &= T^m(x) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k \\ &= T^m(x) + y \to y. \end{aligned}$$

بنابراین

$$T^m(x+u_m) \to y. \tag{6}$$

از رابطه‌های (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که عدد طبیعی N ی وجود دارد به‌طوری که برای هر $m \geq N$ داریم،

$$x + u_m \in V \quad \text{و} \quad T^m(x+u_m) \in U.$$

پس برای هر $m \geq N$ داریم، $T^{-m}(U) \cap V \neq \phi$. از طرفی چون $\{n_k\}$ صعودی است، پس $k_\circ$ ی وجود دارد که $n_{k_\circ} > N$. بنابراین

$$T^{-n_{k_\circ}}(U) \cap V \neq \phi.$$

همچنین $T^{n_{k_\circ}}(M) \subseteq M$. در نتیجه T، عملگری زیرفضا‌ـترایا نسبت به M است.

بنابراین T عملگری زیرفضا‌ـترایا نسبت به M است که مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در M دارد. در نتیجه T عملگری زیرفضا‌ـآشوبناک نسبت به M است. □

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482

۳. جمع مستقیم عملگرهای زیرفضا ـ ترایا و جمع مستقیم عملگرهای زیرفضا ـ ابردوری

ابتدا نشان می‌دهیم که جمع مستقیم یک عملگر زیرفضا ـ ابردوری با یک عملگر دلخواه، باز هم زیرفضا ـ ابردوری است. در ادامه مقاله، Y نشان دهنده یك فضای باناخ مختلط دلخواه است. برای دو فضای باناخ مختلط X و Y، جمع مستقیم این دو فضا را با $X \oplus Y$ نشان می‌دهیم و به صورت $X \oplus Y = \{x \oplus y : x \in X \text{ و } y \in Y\}$ تعریف می‌کنیم که در آن $\|x \oplus y\|^2_{X\oplus Y} = \|x\|^2_X + \|y\|^2_Y$. به علاوه اگر $S \in B(X)$، $T \in B(Y)$، $x \in X$ و $y \in Y$، آن‌گاه $(S \oplus T)(x \oplus y) = Sx \oplus Ty$.

قضیه ۱.۳. *فرض کنیم $S \in B(X)$ عملگری زیرفضا ـ ابردوری نسبت به زیرفضای بسته و ناصفر M از X و $T \in B(Y)$ عملگری دلخواه باشد. در این‌صورت $S \oplus T$ عملگری زیرفضا ـ ابردوری است.*

اثبات. فرض کنیم x یک بردار زیرفضا ـ ابردوری نسبت به M برای T باشد. در نتیجه $x \oplus 0$ یک بردار زیرفضا ـ ابردوری برای $S \oplus T$ نسبت به زیرفضای $M \oplus \{0\}$ است. در نتیجه $S \oplus T$ عملگری زیرفضا ـ ابردوری است. □

با استفاده از قضیه ۱.۳، می‌توانیم نتیجه زیر را بیان کنیم.

نتیجه ۲.۳. *جمع مستقیم دو عملگر زیرفضا ـ ابردوری حداقل نسبت به دو زیرفضای مختلف، زیرفضا ـ ابردوری است.*

اثبات. فرض کنیم $S \in B(X)$ عملگری زیرفضا ـ ابردوری نسبت به زیرفضای بسته و ناصفر M از X و $T \in B(Y)$ عملگری زیرفضا ـ ابردوری نسبت به زیرفضای بسته و ناصفر N از Y باشد. فرض کنیم x یک بردار زیرفضا ـ ابردوری برای S نسبت به M و y یک بردار زیرفضا ـ ابردوری برای T نسبت به N باشد. در این صورت به آسانی دیده می‌شود که $x \oplus 0$ یک بردار زیرفضا ـ ابردوری برای $S \oplus T$ نسبت به زیرفضای $M \oplus \{0\}$ است و $\{0\} \oplus y$ یک بردار زیرفضا ـ ابردوری برای $S \oplus T$ نسبت به زیرفضای $\{0\} \oplus N$ است. □

به عنوان کاربردی از نتیجه ۲.۳، فرض کنیم $S = 3B$ باشد که B عملگر انتقال به عقب روی l^2 است که برای هر $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^2$ به صورت $B(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots)$ تعریف می شود. همان‌طور که در [8] ثابت شده است، S نسبت به زیرفضای

$$M = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^2 : a_{2n} = 0, n = 0, 1, 2, \ldots \text{ برای }\},$$

زیرفضا ـ ترایا و در نتیجه زیرفضا ـ ابردوری است. در [8، مثال ۳.۸] نشان داده شده است که اگر $m \in \mathbb{N}$، آن‌گاه عملگر $T = 2B$ نسبت به زیرفضای

$$N = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^2 : a_n = 0, n < m \text{ برای }\},$$

زیرفضا ـ ابردوری است. پس می‌توانیم بگوییم که

$$S \oplus T : 3B \oplus 2B : l^2 \oplus l^2 \to l^2 \oplus l^2,$$

زیرفضا ـ ابردوری نسبت به $M \oplus \{0\}$ و $\{0\} \oplus N$ است.

در قضیه بعد، نتیجه به دست آمده توسط بامرنی و کیلیکمان در [1] را گسترش می‌دهیم و نشان می‌دهیم که اگر جمع مستقیم دو عملگر، زیرفضا ـ ترایا باشد، بدون در نظر گرفتن هیچ شرط اضافه‌ای، هرکدام از آن‌ها نیز زیرفضا ـ ترایا هستند.

قضیه ۳.۳. *فرض کنیم $S \in B(X)$ و $T \in B(Y)$ و M و N به ترتیب زیرفضاهای بسته و ناصفری از X و Y باشند. اگر $S \oplus T$ عملگری $M \oplus N$ ـ ترایا باشد، آن‌گاه S عملگری M ـ ترایا و T عملگری N ـ ترایا است.*
به ویژه، اگر $T \oplus T$ عملگری $M \oplus M$ ـ ترایا باشد، آن‌گاه T نیز عملگری M ـ ترایا است.

اثبات. فرض کنیم $U_1, U_2 \subseteq M$ مجموعه‌هایی باز در توپولوژی نسبی M و $V_1, V_2 \subseteq N$ مجموعه‌هایی باز در توپولوژی نسبی N باشند. بنا به فرض $n \in N_0$ ی وجود دارد به‌طوری‌که $(S \oplus T)^{-n}(U_1 \oplus V_1) \cap (U_2 \oplus V_2)$ شامل یک مجموعه باز و ناتهی در توپولوژی نسبی $M \oplus N$ است. بنابراین مجموعه‌های ناتهی باز نسبی $W_1 \subseteq M$ و $W_2 \subseteq N$ وجود دارند به قسمی که

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482

$$W_1 \oplus W_2 \subseteq (S \oplus T)^{-n}(U_1 \oplus V_1) \cap (U_2 \oplus V_2)$$
$$\subseteq (S^{-n}(U_1) \cap U_2) \oplus (T^{-n}(V_1) \cap V_2)$$

بنابراین $S^{-n}(U_1) \cap U_2$ شامل یک مجموعه باز و ناتهی W_1 و $T^{-n}(V_1) \cap V_2$ شامل یک مجموعه باز و ناتهی W_2 است. پس S عملگری Mـ ترایا و T عملگری Nـ ترایا است. □

قضیه ۳.۳ نشان می‌دهد که پاسخ پرسش (۱)، مثبت است.

اکنون فرض کنیم p عدد صحیح مثبتی باشد. بنا به تعریف واضح است که اگر T^p، عملگری Mـ ترایا باشد، آن‌گاه T نیز عملگری Mـ ترایا است. بنابراین نتیجه بعدی را داریم.

نتیجه ۴.۳. *فرض کنیم $S \in B(X)$ و $T \in B(Y)$ و M و N به ترتیب زیرفضاهای بسته و ناصفری از X و Y باشند. اگر عدد صحیح مثبت p ی وجود داشته باشد به قسمی که $(S \oplus T)^p$ عملگری $N \oplus M$ـ ترایا باشد، در این‌صورت S عملگری Mـ ترایا و T عملگری Nـ ترایا است.*

در [۱، قضیه ۳.۲] نشان داده شده است که اگر S عملگری M- ترایا و T عملگری Nـ ترایا باشد و یکی از S یا T، به ترتیب عملگری Mـ آمیخته یا Nـ آمیخته باشد، آن‌گاه $S \oplus T$ عملگری $M \oplus N$ـ ترایا است.

در قضیه بعدی با نشان دادن این موضوع که جمع مستقیم یک عملگر زیرفضا_ترایا با عملگری دلخواه، عملگری زیرفضا_ترایا است، زمینه را برای پاسخ مثبت دادن به پرسش (۴) فراهم می‌کنیم.

قضیه ۵.۳. *فرض کنیم $S \in B(X)$ و M زیرفضایی بسته و ناصفر از X باشد. اگر S عملگری Mـ ترایا و $T \in B(Y)$ عملگری دلخواه باشد، آن‌گاه $S \oplus T$ عملگری زیرفضا_ترایا است.*

اثبات. ادعا می‌کنیم که $S \oplus T$ عملگری $M \oplus \{0\}$ـ ترایا است. برای اثبات این ادعا، فرض کنیم $U \subseteq M$ و $V \subseteq M$ دو مجموعه باز در توپولوژی نسبی باشند. بنا به فرض، S نسبت به M زیرفضا_ترایا است. پس $n \in \mathbb{N}_0$ ی وجود دارد که

$$S^{-n}(U) \cap V \neq \phi \quad \text{و} \quad S^n(M) \subseteq M. \tag{۷}$$

از سوی دیگر:

$$(S \oplus T)^{-n}(U \oplus \{0\}) \cap (V \oplus \{0\})$$
$$= (S^{-n}(U) \oplus T^{-n}(\{0\})) \cap (V \oplus \{0\})$$
$$= (S^{-n}(U) \cap V) \oplus (T^{-n}(\{0\}) \cap \{0\}).$$

به وضوح $(S^{-n}(U) \cap V) \oplus (T^{-n}(\{0\}) \cap \{0\})$ ناتهی است و با توجه به (۷)،

$$(S \oplus T)^n(M \oplus \{0\}) = S^n(M) \oplus T^n(\{0\}) \subseteq M \oplus \{0\}.$$

پس $S \oplus T$ عملگری $M \oplus \{0\}$ـ ترایا است. □

مثال ۶.۳. همان‌طور که بیان شد، $S = 3B$ روی l^2 نسبت به زیرفضای

$$M = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^2 : a_{2n} = 0, n = 0, 1, 2, \dots \text{برای}\}$$

زیرفضا_ترایا است. پس برای هر عملگر دلخواه $T \in B(Y)$، عملگر $S \oplus T$ زیرفضا_ترایا است.

اثبات نتیجه بعدی شبیه به اثبات نتیجه ۲.۳ است و از بیان اثبات آن صرفنظر می‌گردد.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482

نتیجه ۷.۳. *فرض کنیم $S \in B(X)$ و $T \in B(Y)$ عملگرهایی زیرفضا_ ترایا باشند. در این صورت $S \oplus T$ حداقل نسبت به دو زیرفضا، زیرفضا_ ترایا است.*

نتیجه ۷.۳ نشان می‌دهد که پاسخ پرسش (۲)، مثبت است. به علاوه، نتیجه ۷.۳ برای هر تعداد متناهی از بردارهای زیرفضا_ترایا قابل تعمیم است. یعنی اگر T_1 و T_2 و $\cdots$ و T_n عملگرهایی زیرفضا_ترایا باشند، $T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n$ حداقل نسبت به n زیرفضا، زیرفضا_ترایا است.

۴. جمع مستقیم عملگرهای زیرفضا_آشوبناک

در این بخش به بررسی جمع مستقیم عملگرهای زیرفضا_آشوبناک می‌پردازیم و قضیه‌ها و نتیجه‌هایی در این‌باره بیان می‌کنیم. به ویژه، نشان می‌دهیم پاسخ پرسش (۳) و پرسش (۴) که در بخش ۱ بیان شد، مثبت است.

قضیه ۱.۴. *فرض کنیم $S \in B(X)$ و $T \in B(Y)$ و M و N به ترتیب زیرفضاهای بسته و ناصفری از X و Y باشند. اگر: $S \oplus T$: $X \oplus Y \to X \oplus Y$ عملگری $N \oplus M$_ آشوبناک باشد، آن‌گاه S عملگری M_ آشوبناک و T عملگری N_ آشوبناک است. به‌ویژه، اگر $T \oplus T$ عملگری $M \oplus M$_ آشوبناک باشد، آن‌گاه T نیز M_ آشوبناک است.*

اثبات. بنا به فرض $S \oplus T$ عملگری $N \oplus M$_آشوبناک است و در نتیجه بنا به تعریف $N \oplus M$_ترایا نیز می‌باشد. پس بنا به قضیه ۳.۳، S عملگری M_ ترایا و T عملگری N_ ترایا است. از طرف دیگر، بنا به تعریف عملگرهای زیرفضا_آشوبناک، $S \oplus T$ زیرمجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در $N \oplus M$ دارد. اگر این زیرمجموعه را $A \oplus B$ بنامیم، نشان می‌دهیم A در M و B در N چگال است. فرض کنیم $a \in M$ و $b \in N$. بنابراین $x_n \in A$ و $y_n \in B$ ی وجود دارد که:

$$||(x_n \oplus y_n) - (a \oplus b)||^2_{M \oplus N} < \varepsilon.$$

از این رو:

$$||(x_n - a) \oplus (y_n - b)||^2_{M \oplus N} < \varepsilon. \tag{8}$$

بنا به (۸) می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$||(x_n - a)||^2_M < \varepsilon \quad \text{و} \quad ||(y_n - b)||^2_N < \varepsilon.$$

پس A در M و B در N چگال است. بنابراین S عملگری M_آشوبناک و T عملگری N_آشوبناک است.

□

قضیه ۱.۴ پاسخ مثبتی به پرسش (۳) است.

اکنون این سئوال مطرح می‌شود که اگر S عملگری M_آشوبناک نباشد و T هم عملگری N_آشوبناک نباشد آیا امکان دارد که $S \oplus T$ عملگری $N \oplus M$_آشوبناک باشد؟

پاسخ این سئوال منفی است چون اگر $S \oplus T$ عملگری $N \oplus M$_آشوبناک باشد بنا به قضیه ۱.۴، S باید عملگری M_آشوبناک و T باید عملگری N_آشوبناک باشند.

به آسانی دیده می‌شود که اگر T^n دارای یک مجموعه چگال از بردارهای متناوب باشد، T نیز یک مجموعه چگال از بردارهای متناوب دارد. این واقعیت به همراه نتیجه ۴.۳، نتیجه بعدی را به دست می‌دهد.

نتیجه ۲.۴. *فرض کنیم $S \in B(X)$ و $T \in B(Y)$ و M و N به ترتیب زیرفضاهای بسته و ناصفری از X و Y باشند. اگر عدد صحیح مثبت p ی وجود داشته باشد به قسمی که $(S \oplus T)^p$ عملگری $N \oplus M$- آشوبناک باشد، در این‌صورت S عملگری M_آشوبناک و T عملگری N_آشوبناک است.*

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482

اگر دو عملگر زیرفضا_آشوبناك داشته باشیم که حداقل یکی از آن ها آمیخته باشد، در قضیه بعد ثابت می شود که جمع مستقیم آن عملگرها نسبت به جمع مستقیم زیرفضاها، زیرفضا_آشوبناك است.

قضیه ۳.۴. *اگر $S \in B(X)$ عملگری M- آشوبناك و $T \in B(Y)$ عملگری N_آشوبناك باشد و حداقل یکی از S یا T به ترتیب M_آمیخته یا N_آمیخته باشند، آن‌گاه $S \oplus T$ عملگری $M \oplus N$_آشوبناك است.*

اثبات. چون S عملگری M_آشوبناك است پس عملگری M_ترایا است و مجموعه ای چگال از بردارهای متناوب در M دارد که آن را با $Per_M(S)$ نشان می‌دهیم. چون T عملگری N_آشوبناك است پس عملگری N_ترایا است و مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در N دارد که آن را با $Per_N(T)$ نشان می‌دهیم. حال چون حداقل یکی از S یا T به ترتیب M_آمیخته یا N_آمیخته است، بنا به [۱، قضیه ۳.۲]، $T \oplus S$ عملگری $N \oplus M$_ترایا است.

اکنون فرض کنیم $(x,y) \in M \oplus N$. پس $a \in Per_M(S)$ و $b \in Per_N(T)$ ی وجود دارند به قسمی که

$$||x-a||_M^2 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ و } ||y-b||_N^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

بنابراین

$$||(x,y)-(a,b)||_{M\oplus N}^2 < \varepsilon$$

در نتیجه، $Per_M(S) \oplus Per_N(T)$ مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب برای $S \oplus T$ در $M \oplus N$ است. پس $S \oplus T$ عملگری $M \oplus N$_آشوبناك است. □

در قضیه بعدی نشان می‌دهیم که جمع مستقیم دو عملگر زیرفضا_آشوبناک باز هم زیرفضا_آشوبناک است.

قضیه ۴.۴. *فرض کنیم $S \in B(X)$ و $T \in B(Y)$ دو عملگر زیرفضا_آشوبناک باشند. در این‌صورت $S \oplus T$ حداقل نسبت به دو زیرفضای متفاوت، زیرفضا_آشوبناک است.*

اثبات. فرض کنیم M زیرفضای بسته و ناصفری از X و N زیرفضای بسته و ناصفری از Y باشد به‌طوری که S و T به ترتیب M_آشوبناک و N_آشوبناک باشند. بنا به تعریف عملگرهای زیرفضا_آشوبناک، S عملگری M_ترایا و T عملگری N_ترایا است. بنا به نتیجه ۷.۳، می‌توانیم بگوییم که $S \oplus T$ عملگری $M \oplus \{0\}$_ترایا و $\{0\} \oplus N$_ترایا است. دوباره بنا به تعریف زیرفضا_آشوبناک بودن، S دارای زیرمجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در M است که آن را A_S و T دارای زیرمجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در N است که آن را A_T می‌نامیم. به آسانی دیده می‌شود که $A_S \oplus \{0\}$ یک زیرمجموعه چگال از بردارهای متناوب برای $S \oplus T$ در $M \oplus \{0\}$ است و $A_T \oplus \{0\}$ یک زیرمجموعه چگال از بردارهای متناوب برای $S \oplus T$ در $\{0\} \oplus N$ است. در نتیجه $S \oplus T$ عملگری $M \oplus \{0\}$_آشوبناک و $\{0\} \oplus N$_آشوبناک است. □

قضیه ۴.۴ نشان می‌دهد که پاسخ پرسش (۴)، مثبت است. همچنین قضیه ۴.۴ برای هر تعداد متناهی از بردارهای زیرفضا_آشوبناک قابل تعمیم است. یعنی اگر T_1 و T_2 و $\cdots T_n$ عملگرهایی زیرفضا_آشوبناک باشند، آن‌گاه عملگر $T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n$ حداقل نسبت به n زیرفضا، زیرفضا_آشوبناک است.

با توجه به قضیه ۱.۴ و قضیه ۴.۴ می‌توانیم نتیجه زیر را بیان کنیم.

نتیجه ۵.۴. *عملگر $T \in B(X)$ زیرفضا_آشوبناک است اگر و تنها اگر $T \oplus T$ زیرفضا_آشوبناک باشد.*

همچنین با استفاده از روند اثبات قضیه ۱.۴ به آسانی دیده می‌شود که اگر یکی از دو عملگر S یا T نیز زیرفضا_آشوبناک باشد، $S \oplus T$ عملگری زیرفضا_آشوبناک است.

این بخش را با مثالی به پایان می‌بریم.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482

مثال ۶.۴. در [۱۱] نشان داده شده است که عملگر $S = ۲B \oplus I$ روی $l^۲ \oplus l^۲$ نسبت به $M := l^۲ \oplus \{۰\}$ زیرفضا_آشوبناک است. پس اگر $T \in B(Y)$ عملگر دلخواه دیگری باشد، $S \oplus T$ نسبت به $M \oplus \{۰\}$ عملگری زیرفضا_آشوبناک است.

مراجع

[1] N. Bamerni and A. Kilicman, On the direct sum of two bounded linear operators and subspace-hypercyclicity, *General Letters in Mathematics*, **8** (2020) 1–7.

[2] N. Bamerni, V. Kadets and A. Kilicman, Hypercyclic operators are subspace hypercyclic, *J. Math. Anal. Appl.*, **435** (2016) 1812–1815.

[3] F. Bayart and E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[4] K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Springer-Verlag London Ltd., London, 2011.

[5] D. A. Herrero, Hypercyclic operators and chaos, *J. Oper. Theory*, **28** (1992) 93–103.

[6] R. R. Jimenez-Munguila, R. A. Martinez-Avendano and A. Peris, Some questions about subspace-hypercyclic operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **408** (2013) 209–212.

[7] C. M. Le, On subspace-hypercyclic operators, *Proc. Am. Math. Soc.*, **139** (2011) 2847–2852.

[8] B. F. Madore and R. A. Martinez-Avendano, Subspace hypercyclicity, *J. Math. Anal. Appl.*, **373** (2011) 502–511.

[9] R. A. Martinez-Avendano and O. Zatarain-Vera, Subspace-hypercyclicity for Toeplitz operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **422** (2015) 772–775.

[10] M. Moosapoor, On multi subspace-hypercyclic operators,*Commun. Korean Math. Soc.*, **35** (2020) 1185–1192.

[11] S. Talebi and M. Moosapoor, Subspace-chaotic and subspace-weakly mixing operators, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **78** (2012) 879–885.

[12] L. Zhang and Z. H. Zhou, Notes about subspace-supercyclic operators, *Ann. Funct. Anal.*, **6** (2015) 60–68.

منصوره موسی پور

گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، خیابان تربیت معلم، تهران، ایران.

m.mosapour@cfu.ac.ir

منصوره موسی پور عضو هیات علمی دانشگاه فرهنگیان است. وی دوره کارشناسی ریاضی (گرایش دبیری) را در دانشگاه حکیم سبزواری، دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض را در دانشگاه خوارزمی و دوره دکتری خود را در رشته ریاضی محض (گرایش آنالیز تابعی) در مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران گذرانده است.

محمد شهریاری

گروه ریاضی، دانشگاه مراغه، بلوار دانشگاه، مراغه، ایران.

shahriari@maragheh.ac.ir

محمد شهریاری عضو هیات علمی دانشگاه مراغه است. وی دوره کارشناسی ریاضی کاربردی، دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی_ آنالیز عددی و دوره دکتری خود را در رشته ریاضی کاربردی - معادلات دیفرانسیل در دانشگاه تبریز گذرانده است.

Subspace-chaotic operators and their direct sum

Mansooreh Moosapoor* and Mohammad Shahriari

Abstract: In this article, we state some sufficient conditions for an operator to be subspace-chaotic. The properties of the direct sum of operators are interesting topics in operator theory. In this paper, we show that the direct sum of the two subspace-chaotic operators is subspace-chaotic with respect to at least two subspaces, and the same is true for the subspace-transitive and subspace-hypercyclic operators. We also make interesting examples of these operators with the help of the stated theorems. In addition, we prove that if the direct sum of two operators is subspace-chaotic or subspace-transitive, then each of those two operators is subspace-chaotic or subspace-transitive, respectively. We also generalize these results to the direct sum of a finite number of these operators.
Keywords: subspace-chaotic operators, subspace-hypercyclic operators, subspace-transitive operators, direct sum.

Mansooreh Moosapoor
Department of Mathematics, Farhangian University, Tarbiat Moallem St., Tehran, Iran.
Email: m.mosapour@cfu.ac.ir

Mohammad Shahriari
Department of Mathematics, University of Maragheh, University Boulevard, Maragheh, Iran.
Email: shahriari@maragheh.ac.ir

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.
Article Type: Research Paper.
Received: 27/11/2021, Accepted: 07/02/2022.
* Corresponding author

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131618.1482