ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۶، شماره ۲ (۱۴۰۰)، صص. ۱۷-۳۸
© ۱۴۰۰ دانشگاه اصفهان

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.ui.ac.ir

شیوه‌های خوب (و نه‌چندان خوب) در روش‌های محاسباتی برای حسابان کسر**

کای دیتهلم، روبرتو گاراپا* و مارتین استاینز
مترجم: شاهرخ اسماعیلی

چکیده. حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری در بیشتر موارد نیازمند استفاده از رویکردهایی محاسباتی است. به‌طور کلی، بحث عددی معادلات دیفرانسیل کسری بسیار دشوارتر از حالت مرتبهٔ صحیح آن است، و بیشتر اوقات پژوهشگران غیرمتخصص از دشواری‌های خاص آن بی‌اطلاع‌اند. در نتیجه، روش‌های عددی معمولاً به شیوه‌ای نادرست به‌کار برده می‌شوند یا روش‌های غیرقابل‌اعتماد در نوشتجات ابداع و پیشنهاد می‌شوند. در این مقاله سعی می‌کنیم برخی چالش‌های مشترک در استفاده از روش‌های عددی در حسابان کسری را شناسایی، ماهیت آنها را تشریح و چند شیوهٔ خوب برای حصول به نتایج درست معرفی کنیم.

۱. مقدمه

علاقهٔ فزاینده به استفاده از حسابان کسری، همراه با دشواری یافتن جواب‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل کسری، به‌طور طبیعی پژوهشگران را وادار به مطالعه، ابداع و به‌کارگیری روش‌های عددی برای حل طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی با مشتق‌های کسری می‌نماید. به این ترتیب، بررسی روش‌های محاسباتی برای مسائل مرتبه کسری یک حوزهٔ پژوهشی بسیار فعال است که هر ساله تعداد زیادی مقالهٔ پژوهشی در آن منتشر می‌شود.

وظیفهٔ یافتن روش‌های عددی مؤثر و قابل‌اعتماد برای پرداختن به انتگرال‌ها و مشتق‌های مرتبه کسری خود به‌تنهایی یک چالش است و با دشواری‌هایی همراه است که اگرچه از نظر ماهیت متفاوت‌اند اما از یافتن جواب‌های تحلیلی کمتر نیستند. ماهیت خاص این عملگرها شامل چالش‌هایی محاسباتی است که اگر به‌درستی به آنها توجه نشود، ممکن است به نتایج نامعتبر یا حتی اشتباه منجر شود.

متأسفانه، متون علمی سرشار از نمونه روش‌هایی است که برای مسائل مرتبه کسری نامناسب هستند. در بیشتر موارد، روش‌های ارائه‌شده صرفاً روش‌هایی هستند که در اصل برای عملگرهای مرتبه صحیح استاندارد ابداع شده‌اند و به شیوهٔ ناشیانه برای همتایان مرتبه کسری خود به‌کار گرفته شده‌اند. بدون آگاهی کافی از ویژگی‌های خاص مسائل مرتبه کسری، پژوهشگران اغلب نمی‌توانند درک کنند که چرا نتایج غیرمنتظره به‌دست می‌آید.

اهداف اصلی این مقاله معرفی چند دستورالعمل اصلی است که هنگام تدوین روش‌های محاسباتی قابل‌اعتماد برای مسائل مرتبه کسری باید رعایت شوند، همچنین برجسته‌کردن مشخصه‌های اصلی است که یافتن جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری را کاری

عبارات و کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، روش‌های عددی، فرض‌های هموارای، حافظهٔ پایا.
دبیرتخصصی رابط: صغری نوبختیان
نوع مقاله: ترجمه‌ای
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۲۳
* نویسنده مسئول
** نوشته حاضر ترجمه مقاله زیر است:
K. Diethelm, R. Garrappa and M. Stynes, Good (and not no nood) practices in computational methods for fractional calculus, *Mathematics*, **8** no. 3 (2020) 1–21.
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

متفاوت و البته دشوارتر از حالت مرتبه صحیح می‌سازد. در این مقاله صرفاً از روش‌های ضعیف یا اشتباه انتقاد نمی‌شود، بلکه سعی می‌کنیم توضیح دهیم که چرا برخی روش‌ها در محاسبات کسری غیرقابل‌اعتماد هستند و در صورت امکان، خواننده را به سوی رویکردهای مناسب‌تر هدایت کنیم. این پژوهش در اصل محققان جوان را مورد خطاب قرار می‌دهد که پیش‌زمینهٔ ذهنی خاصی در تحلیل عددی مسائل مرتبه کسری ندارند اما به روش‌های محاسباتی برای حل مسائل مرتبه کسری نیاز دارند. هدف این است که از این طریق برای جلوگیری از متداول‌ترین و معمول‌ترین اشتباهایی که گاهی در این زمینه رخ می‌دهند، نوعی راهنمایی ارائه کنیم.

مقاله به طریق زیر سازمان یافته است. پس از یادآوری برخی تعاریف و ویژگی‌های اساسی در بخش ۲، متداول‌ترین اندیشه‌هایی را که در بیشتر روش‌های پیشنهادی در نوشتجات وجود دارند در بخش ۳ نمایان می‌کنیم و نشان می‌دهیم اغلب اندیشه‌های اساسی به‌درستی شناخته نشده و تنها ادعا می‌شود که روش‌هایی جدید هستند. در بخش ۴ در این مورد بحث می‌کنیم که چرا تقریب‌های چندجمله‌ای فقط تا حدودی می‌توانند برای مسئله‌های مرتبه کسری رضایت‌بخش باشند و چرا برای ابداع روش‌های مرتبه بالا (همان‌طور که اغلب پیشنهاد شده است) نامناسب هستند. مشکلات عمدهٔ مربوط به غیرموضعی‌بودن عملگرهای کسری در بخش‌های ۵ و ۶ مطرح می‌شود و برخی از تواناترین رویکردها برای مواجهه مؤثر با عبارت حافظه مورد بحث قرار می‌گیرد. ملاحضاتی مربوط به بررسی عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری در بخش ۷ و برخی توضیحات پایانی در بخش ۸ ارائه شده است.

۲. مطالب پایه و نمادها

با هدف تثبیت نمادگذاری و دسترسی به متداول‌ترین تعاریف و ویژگی‌ها برای ارجاع بعدی، در اینجا برخی از مفاهیم اساسی دربارهٔ حسابان کسری را یادآوری می‌کنیم.

برای $\alpha > 0$ و هر $t_0 \in \mathbb{R}$، در این مقاله تعاریف معمول را برای انتگرال کسری از نوع ریمان–لیوویل

$$J_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t > t_0 \tag{۱}$$

برای مشتق کسری از نوع ریمان–لیوویل

$${}^{RL}D_{t_0}^{\alpha} f(t) := D^m J_{t_0}^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t > t_0 \tag{۲}$$

و برای مشتق کسری از نوع کاپوتو

$${}^{C}D_{t_0}^{\alpha} f(t) := J_{t_0}^{m-\alpha} D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t > t_0 \tag{۳}$$

می‌پذیریم که در آن $m = \lceil \alpha \rceil$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با α است.

برای بررسی جامع شرایطی که تحت آنها عملگرهای بالا وجود دارند و شناخت ویژگی‌های اصلی آنها، می‌توان به هر یک از کتابهای درسی موجود در این زمینه (برای مثال، [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶]) مراجعه کرد. در اینجا فقط رابطهٔ بین عملگرهای ${}^{RL}D_{t_0}^{\alpha}$ و ${}^{C}D_{t_0}^{\alpha}$ را به‌صورت

$${}^{C}D_{t_0}^{\alpha} f(t) = {}^{RL}D_{t_0}^{\alpha} \left(f - T_{m-1}[f; t_0] \right)(t) \tag{۴}$$

یادآوری می‌کنیم که در آن $T_{m-1}[f; t_0]$ چندجمله‌ای تیلر درجهٔ $m-1$ تابع f حول نقطهٔ t_0 است

$$T_{m-1}[f; t_0](t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k \tag{۵}$$

به‌علاوه، منحصراً مسائل مقدار اولیه از نوع کوشی را برای معادلات دیفرانسیل با مشتق کاپوتو درنظر می‌گیریم، یعنی

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{t_0} y(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0^{(1)}, \ldots, y^{(m-1)}(t_0) = y_0^{(m-1)} \end{cases} \tag{۶}$$

که در آن y_0، $y_0^{(1)}$،...، $y_0^{(m-1)}$ مقادیر اولیهٔ معلوم هستند. چند توضیح کلی نیز دربارهٔ مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه خواهد شد.

۳. روش‌های جدید یا جاافتاده؟

اغلب اوقات، مقالاتی را می‌بینیم که عنوان نویدبخش آنها بیانگر ارائه «روش‌های جدید» یا «خانواده‌ای از روش‌های جدید» برای یک عملگر مرتبه کسری خاص است. مقالاتی از این دست، بلافاصله توجه خوانندگان مشتاق به اندیشه‌های جدید و خوب برای حل عددی مسایلی از این نوع را به خود جلب می‌کنند. اما خواندن چند صفحه اول چنین مقالاتی می‌تواند باعث ناامیدی شود، زیرا آنچه ادعا می‌شود جدید است، تنها روشی قدیمی است که روی مسئله‌ای خاص (و شاید جدید) اعمال شده است.

امروزه این پدیده که گاهی یک روش قدیمی توسط نویسندهٔ دیگری بازآفرینی می‌شود، قابل درک است. شاید به این دلیل که این روش می‌تواند با رویکردهای مختلف به‌دست آید و یا این‌که نویسنده از نتیجهٔ قبلی، شاید به این دلیل که با عنوانی مبهم یا گمراه‌کننده منتشر شده، بی‌اطلاع است. با این حال، در حسابان کسری، یک پدیدهٔ متفاوت و کاملاً عجیب اتفاق افتاده است: روش‌های مشهور و پرکاربرد، تنها به‌دلیل به‌کارگیری آنها در چند مسئله خاص، اغلب با عنوان «جدید» قالب می‌شوند. به‌نظر می‌رسد بعضی از نویسندگان از این موضوع که توسعهٔ اندیشه‌های جدید و رویکردهای جدید منجر به روش‌هایی می‌شود که می‌توان آنها را جدید توصیف کرد و نه به‌کارگیری روش‌های شناخته‌شده برای یک مسئله خاص، غافل هستند. حتی به‌کاربردن فنون جاافتاده برای هر یک از عملگرهای جدید، که به‌سادگی با جایگزینی هسته در انتگرال (۱) با تابعی دیگر به‌دست می‌آید، را نمی‌توان یک روش واقعاً جدید تلقی کرد، به‌ویژه هنگامی که تعمیم به عملگر جدید سرراست باشد.

بیشتر مقالاتی که از روش‌های «جدید» خبر می‌دهند، براساس ایده‌ها و فنونی هستند که دهه‌ها پیش برنامه‌ریزی و مطالعه شده‌اند، و گاهی ارجاعات مناسب هم به منابع اصلی حتی داده نمی‌شود.

در واقع، چند روش اساسی و قدرتمند وجود دارند که برای مسئله‌های مرتبه کسری مناسب و بسیار محبوب هستند، و بسیاری از «روشهای جدید» پیشنهادی، صرفاً کاربرد اندیشه‌های نهفته در آنها است. بنابراین، توضیح اندیشه‌های اصلی و رایج‌تر که اغلب در حسابان کسری (دوباره) پیشنهاد می‌شوند، و تهیهٔ تاریخچه کوتاهی از منشاء و توسعه آنها، ممکن است مفید باشد.

۱.۳. درونیابی چندجمله‌ای و قواعد انتگرال‌گیری حاصل‌ضرب. حل معادلات دیفرانسیل با تقریب جواب آنها یا میدان برداری آنها بوسیلهٔ یک چندجمله‌ای درونیاب اندیشه‌ای بسیار قدیمی و رایج است. برخی از روش‌های چندگامی خطی کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل معمولی، به‌ویژه از نوع روش‌های آدامز–بشفورت یا آدامز–مولتن، مبتنی بر این رویکرد هستند.

در سال ۱۹۵۴ اَندرو یانگ ریاضیدان انگلیسی پیشنهاد کرد [۷، ۸] که درونیابی چندجمله‌ای برای حل عددی معادلات انتگرال ولترا به‌کار گرفته شود. معلوم شده است که این اندیشه برای معادلات دیفرانسیل کسری نیز مناسب است، چونکه (۶) را می‌توان به‌صورت معادلهٔ انتگرال ولترای زیر بازنویسی کرد

$$y(t) = T_{m-1}[y; t_0](t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u))\, \mathrm{d}u \tag{۷}$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

در رویکرد پیشنهادی یانگ، نخست یک شبکهٔ $\{t_n\}$ از نقاط بازهٔ جواب $[t_0, T]$ تعریف می‌شود (اغلب، اما نه لزوماً، این نقاط هم‌فاصله و به‌صورت $t_n = t_0 + hn$ با $h = (T-t_0)/N$ درنظر گرفته می‌شوند) و معادلهٔ (۷) به‌صورت تکه‌ای زیر بازنویسی می‌شود

$$y(t_n) = T_{m-1}[y; t_0](t_n) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_n - u)^{\alpha-1} f(u, y(u))\, \mathrm{d}u \tag{۸}$$

سپس در هر بازهٔ $[t_j, t_{j+1}]$، میدان برداری $f(u, y(u))$ با یک چندجمله‌ای که f را روی این شبکه درونیابی می‌کند، جایگزین می‌شود. این رویکرد به‌ویژه اگر در آن از چندجمله‌ای‌های درجهٔ ۰ یا ۱ استفاده شود بسیار ساده است، زیرا می‌توان صرفاً براساس داده‌ها در یکی از نقاط پایانی زیربازه‌ها (درجه ۰؛ موسوم به روش مستطیلی حاصل‌ضرب) یا در هر دو نقطهٔ پایانی (درجه ۱؛ موسوم به روش ذوزنقه‌ای حاصل‌ضرب) تقریب را تعیین کرد. بنابراین، در این موارد به معرفی نقاط کمکی درون بازه یا نقاط بیرون بازه نیازی نیست. هیچ‌کدام از این روش‌ها نمی‌توانند همگرایی مرتبه بالای بخصوصی را ایجاد کنند، اما همان‌طور که در بخش ۴ نشان خواهیم داد، ویژگی‌های تحلیلی از جواب‌های نوعی معادلات دیفرانسیل کسری، دستیابی به دقت مرتبه بالا را بدون توجه به فن مورد استفاده، بسیار دشوار و بدقلق خواهند ساخت. در نتیجه، و به این دلیل که ویژگی‌های همگرایی این فنون در [۹] و پایداری آنها در [۱۰] به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند و از این‌رو به‌خوبی درک شده‌اند، روش‌های مستطیلی حاصل‌ضرب و ذوزنقه‌ای حاصل‌ضرب در میان کاربران مدل‌های مرتبه کسری بسیار محبوب هستند.

گه‌گاه روش‌های مرتبه بالاتر پیشنهاد شده‌اند [۱۱، ۱۲] اما، همان‌طور که در بالا توصیه شد و در بخش ۴ با جزئیات بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد، این روش‌ها مستلزم خواص نسبتاً نامعمول از جواب‌های دقیق مسائل داده‌شده است و بنابراین به‌ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرند. توجه کنید که نتایج عدم منتظم‌بودن روی ویژگی‌های همگرایی قواعد انتگرال‌گیری حاصل‌ضرب از سال ۱۹۸۵ برای معادلات انتگرال ولترا [۱۳] و از سال ۲۰۰۴ برای حالت خاص معادلات دیفرانسیل کسری [۱۴] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

۲.۳. تقریب مشتق‌ها: طرح‌های L1 و L2. یک روش عددی کلاسیک برای تقریب عملگر مشتق کاپوتو در (۳) طرح L1 نامیده می‌شود. برای $0 < \alpha < 1$، تعریف عملگر کاپوتو به‌صورت زیر است

$${}^{C}D^{\alpha}_{t_0} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t > t_0$$

این اندیشه (معادلهٔ (۸.۲.۶) در کتاب [۱۵]) شبکه‌ای کاملاً دلخواه (یعنی، نه لزوماً با فواصل یکنواخت) را به‌صورت $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ معرفی می‌کند و عامل $f'(\tau)$ در انتگرالده را با تقریب زیر جایگزین می‌کند

$$f'(\tau) \approx \frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{t_{j+1} - t_j}, \quad \tau \in (t_j, t_{j+1})$$

به این ترتیب فرمول تقریب زیر ساخته می‌شود

$${}^{C}D^{\alpha}_{t_0} f(t_n) \approx {}^{C}D^{\alpha}_{t_0,\mathrm{L}1} f(t_n) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} w_{n-j-1,n} (f(t_{n-j}) - f(t_{n-j-1}))$$

که در آن

$$w_{\mu,n} = \frac{(t_n - t_\mu)^{1-\alpha} - (t_n - t_{\mu+1})^{1-\alpha}}{t_{n-\mu} - t_{n-\mu-1}}$$

برای تابع‌های هموار f (اما تنها تحت این فرض!) و یک شبکهٔ هم‌فاصله $t_j = t_0 + jh$، مرتبهٔ همگرایی روش L1 به‌صورت $\mathcal{O}(h^{2-\alpha})$ است.

با توجه به نحوهٔ ساخت، روش L۱ به حالت $۰ < \alpha < ۱$ محدود شده است. برای $\alpha \in (۱, ۲)$ روش L۲ (بخش ۸.۲ از کتاب [۱۵]) اصلاح سودمندی را فراهم می‌کند. ساخت این طرح از نمایش عملگر کاپوتو برای $۱ < \alpha < ۲$ به‌صورت زیر شروع می‌شود

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{t_۰} f(t) = \frac{۱}{\Gamma(۲-\alpha)} \int_{t_۰}^{t} t^{۱-\alpha} f''(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau $$

با استفاده از شبکهٔ یکنواخت $t_j = t_۰ + jh$، مشتق دوم f در انتگرالده برای $\tau \in [t_k, t_{k+۱}]$ با تقریب تفاضل مرکزی

$$ f''(t-\tau) \approx \frac{۱}{h^۲}(f(t_n - t_{k+۱}) - ۲f(t_n - t_k) + f(t_n - t_{k-۱})) $$

جایگزین و تقریب زیر نتیجه می‌شود

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{t_۰} f(t_n) \approx {}^{C}D^{\alpha}_{t_۰,\mathrm{L۲}} f(t_n) = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(۳-\alpha)} \sum_{k=-۱}^{n} w_{k,n} f(t_{n-k}) $$

که این‌بار

$$ w_{k,n} = \begin{cases} ۱ & k = -۱ \\ ۲^{۲-\alpha} - ۳ & k = ۰ \\ (k+۲)^{۲-\alpha} - ۳(k+۱)^{۲-\alpha} + ۳k^{۲-\alpha} - (k-۱)^{۲-\alpha} & ۱ \le k \le n-۲ \\ -۲n^{۲-\alpha} + ۳(n-۱)^{۲-\alpha} - (n-۲)^{۲-\alpha} & k = n-۱ \\ n^{۲-\alpha} - (n-۱)^{۲-\alpha} & k = n \end{cases} $$

عیب این روش آن است که به مقداریابی f در نقطهٔ $t_{n+۱} = (n+۱)h$ که در خارج از بازهٔ $[t_۰, t_n]$ واقع است، نیاز دارد.

تفاضل مرکزی استفاده‌شده در تعریف روش L۲ نسبت به یکی از نقاط انتهایی زیربازهٔ مربوط به $[t_k, t_{k+۱}]$، و نه نسبت به نقطهٔ میانی آن، متقارن است. اگر این مطلوب ما نیست، می‌توان به‌جای آن از فرمول

$$ f''(t_n - \tau) \approx \frac{۱}{h^۲}(f(t_{n-k-۲}) - f(t_{n-k-۱}) + f(t_{n-k+۱}) - f(t_{n-k})) $$

روی این زیربازه استفاده کرد که به روش L۲C می‌انجامد [۱۶]

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{t_۰} f(t_n) \approx {}^{C}D^{\alpha}_{t_۰,\mathrm{L۲C}} f(t_n) = \frac{h^{-\alpha}}{۲\Gamma(۳-\alpha)} \sum_{k=-۱}^{n+۱} w_{k,n} f(t_{n-k}) $$

که در آن

$$ w_{k,n} = \begin{cases} ۱ & k = -۱ \\ ۲^{۲-\alpha} - ۲ & k = ۰ \\ ۳^{۲-\alpha} - ۲^{۲-\alpha} & k = ۱ \\ (k+۲)^{۲-\alpha} - ۲(k+۱)^{۲-\alpha} + ۲(k-۱)^{۲-\alpha} - (k-۲)^{۲-\alpha} & ۲ \le k \le n-۲ \\ -n^{۲-\alpha} - (n-۳)^{۲-\alpha} + ۲(n-۲)^{۲-\alpha} & k = n-۱ \\ -n^{۲-\alpha} + ۲(n-۱)^{۲-\alpha} - (n-۲)^{۲-\alpha} & k = n \\ n^{۲-\alpha} - (n-۱)^{۲-\alpha} & k = n+۱ \end{cases} $$

مشابه روش L۲، در روش L۲C نیز مقداریابی f در خارج از بازهٔ $[t_۰, t_n]$ ضروری است، و باید مقادیر $f((n+۱)h)$ و $f(-h)$ محاسبه شوند. در صورتی که f به اندازهٔ کافی خوشرفتار باشد، هر دو روش L۲ و L۲C، برای $۱ < \alpha < ۲$ رفتار همگرایی

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

$\mathcal{O}(h^{۳-\alpha})$ از خود نشان می‌دهند. به‌نظر می‌رسد ثابت‌های ضمنی موجود در عبارتهای $\mathcal{O}$ در حالت $۱ < \alpha < ۱/۵$ برای L۲، و در حالت $۱/۵ < \alpha < ۲$ برای L۲C، کوچکتر باشند.

در حالت حدی $\alpha \to ۱$، روش L۲ به تفاضل پسرو مرتبه اول، و روش L۲ به تفاضل مرکزی مرتبه اول تبدیل می‌شود. همچنین، برای $\alpha \to ۲$ روش L۲ متناظر با تفاضل مرکزی مرتبه دوم کلاسیک است.

۳.۳. روش‌های چندگامی خطی کسری. از روش‌های چندگامی خطی کسری کمتر استفاده می‌شود چونکه ضرایب آنها در حالت کلی، به‌طور صریح معلوم نیستند و الگوریتم‌هایی که برای محاسبهٔ این ضرایب ابداع شده‌اند نیز از نظر فنی اغلب دشوار هستند. با این همه، چون این روش‌ها امکان غلبه بر برخی از معضل‌های مربوط به دیگر رویکردها را فراهم می‌کنند، در ادامه ویژگی‌های آنها را به‌طور اجمالی بررسی می‌کنیم.

روش‌های چندگامی خطی کسری در سال ۱۹۸۶ توسط لوبیش در مقاله [۱۷] معرفی شدند و در پژوهش‌های بعدی او مورد بررسی و مطالعه بیشتر قرار گرفتند [۱۸، ۱۹، ۲۰]. در این پژوهش‌ها قواعد انتگرال‌گیری عددی به‌دست آمده از روش‌های چندگامی خطی استاندارد برای معادلات دیفرانسیل معمولی به انتگرال‌های مرتبه کسری توسعه داده شد.

یک روش k گامی خطی کلاسیک از مرتبهٔ $p > ۰$، متناظر با چندجمله‌ای‌های مشخصهٔ اول $\rho(z) = \sum_{j=۰}^{k} \rho_j z^{k-j}$ و مشخصهٔ دوم $\sigma(z) = \sum_{j=۰}^{k} \sigma_j z^{k-j}$ به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود

$$\sum_{j=۰}^{k} \rho_j y_{n-j} = h \sum_{j=۰}^{k} \sigma_j f(t_{n-j}, y_{n-j}) \tag{۹}$$

روش‌های چندگامی خطی کسری تعمیم روش‌های چندگامی خطی کلاسیک در (۹) برای حل معادلات دیفرانسیل کسری هستند و به‌صورت زیر بیان می‌شوند

$$y_n = T_{m-۱}[y; t_۰](t) + h^{\alpha} \sum_{j=۰}^{\nu} w_{n,j} f(t_j, y_j) + h^{\alpha} \sum_{j=۰}^{n} \omega_{n-j}^{(\alpha)} f(t_j, y_j) \tag{۱۰}$$

در اینجا، با فرض اینکه $\delta(z) = \frac{\rho(۱/z)}{\sigma(۱/z)}$ تابع مولدی باشد که از روی چندجمله‌ای‌های مشخصهٔ $\rho(z)$ و $\sigma(z)$ ساخته می‌شود، $\omega_n^{(\alpha)}$ وزن‌های پیچشی هستند که از روی بسط سری توانی $(\delta(z))^{-\alpha}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \omega_n^{(\alpha)} z^n = (\delta(z))^{-\alpha}$$

همچنین، $w_{n,j}$ وزن‌های آغازین هستند که برای مواجهه با عدم منتظمی جواب در $t_۰$ معرفی می‌شوند و با حل دستگاه‌های خطی جبری زیر در هر گام n به‌دست می‌آیند

$$\sum_{j=۰}^{\nu} w_{n,j} j^{\gamma} = -\sum_{j=۰}^{n} \omega_{n-j} j^{\gamma} + \frac{\Gamma(۱+\gamma)}{\Gamma(۱+\gamma+\alpha)} n^{\gamma+\alpha}, \quad \nu \in \mathcal{A}_p \tag{۱۱}$$

در اینجا $\mathcal{A}_p$ مجموعه‌ای شامل $\nu + ۱$ عضو به‌صورت زیر است

$$\mathcal{A}_p = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma = i + j\alpha, \ \ i, j \in \mathbb{N}, \ \ \gamma < p - ۱\}$$

برخلاف قواعد انتگرال‌گیری حاصل‌ضرب، ویژگی جالب روش‌های چندگامی خطی کسری این است که قادر به حفظ مرتبهٔ همگرایی p در روش‌های چندگامی خطی زیربنائی هستند به‌شرطی که روش چندگامی خطی کلاسیک دارای ویژگی‌هایی مشخص باشد: نخست اینکه تابع مولد $\delta(z)$ در قرص یکه و بسته $|z| \le ۱$، بجز برای $z = ۱$، ریشه نداشته باشد، و دوم اینکه برای $|z| < ۱$، $|\arg \delta(z)| < \pi$.

بنابراین، دستیابی به روش‌های چندگامی خطی کسری مرتبه بالا بدون نیاز به تحمیل فرض‌های هموارای غیرواقعی روی داده‌های مسئله که در روش‌های مبتنی بر درونیابی چندجمله‌ای لازم است، امکان‌پذیر می‌باشد.

اما هزینه‌ای که باید برای این مزیت پرداخت شود ممکن است ناچیز نباشد: وزن‌های پیچشی $\omega_n^{(\alpha)}$ به‌طور صریح معلوم نیستند و باید با روشی (احتمالاً پیچیده) محاسبه شوند. بحثی برای حالت کلی در [۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰] فراهم شده و الگوریتم‌هایی برای روش‌های چندگامی خطی کسری از نوع ذوزنقه‌ای نیز در [۲۱] ارائه شده‌اند. به‌علاوه، روش‌های مرتبه بالا برحسب اینکه α مرتبهٔ معادله و p مرتبهٔ همگرایی روش چقدر باشند، ممکن است به حل دستگاه‌های بزرگ یا خیلی بزرگ (۱۱) نیاز داشته باشند. در بعضی موارد این دستگاه‌ها چنان بدوضع هستند که به‌کارگیری وزن‌های به‌دست آمده روی دقت روش اثر مخرب می‌گذارد، این مسئله در مقاله [۲۲] به‌خوبی بررسی شده است.

یکی از ساده‌ترین روش‌ها در این خانواده از روش پسرو اویلر به‌دست می‌آید، که تابع مولد آن $\delta(z) = 1 - z$ است. بنابراین، وزن‌های پیچشی این روش ضرایب بسط مجانبی $(1-z)^{-\alpha}$، یعنی، ضرایب سری دوجمله‌ای زیر هستند:

$$\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{-\alpha}{j} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{j!\Gamma(1-\alpha-j)}$$

و هیچ وزن آغازینی ضروری نیست چونکه در این حالت مرتبهٔ همگرایی $p = 1$، و از این‌رو $\mathcal{A}_p$ مجموعهٔ تهی است. به‌آسانی می‌توان تشخیص داد که در این حالت طرح موسوم به گرونوالد–لتنیکوف به‌دست می‌آید. گرچه این طرح در قرن نوزدهم در کارهای مستقل گرونوالد و لتنیکوف کشف شد، اما تفسیر آن به‌عنوان یک روش چندگامی خطی کسری می‌تواند تحلیل آن را میسر سازد.

۴. تقریب‌های کلاسیک روش‌های مرتبه بالا را نخواهد داد

جواب‌های مسائل با مشتق کسری نوعاً تکینی ضعیفی را به نمایش می‌گذارند. این موضوع در فصل تکینی [۲۳] به‌طور مفصل مورد بحث قرار گرفته است و به‌دلیل کارهای پیش‌تر انجام‌شده روی معادلات انتگرال ولترا در [۲۴، ۲۵] موضوعی شناخته شده است. این تکینی، پیامدی از رفتار ضعیف–تکین هسته‌های انتگرال و مشتق‌های کسری است و اهمیت آن، از منظری فیزیکی، به ظهور طبیعی تابع‌های کاملاً یکنوای واهلشی در مدل‌هایی که دینامیک آنها تحت تأثیر این عملگرها است، مربوط می‌شود [۲۶، ۲۷]. در واقع، رفتارهای کاملاً یکنوای واهلشی در دستگاه‌های گرانرو با انرژی‌های قویاً اتلافی معمول است [۲۸].

در این بخش اثرات رفتار تکین روی روش‌های عددی در زمینهٔ مسائل مقدار اولیه مانند (۶) بررسی می‌شود. برای درک سریع اندیشه‌های اصلی، روی حالت ویژهٔ بسیار ساده‌ای از (۶) به‌صورت

$$ {}^{C}D_0^{\alpha} y(t) = 1, \quad t \in (0, T] \tag{۱۲}$$

با $0 < \alpha < 1$ تمرکز می‌کنیم. در این ابتدا، شرط اولیه‌ای در $t = 0$ تعیین نمی‌کنیم. جواب عمومی (۱۲) به‌صورت

$$y(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + b \tag{۱۳}$$

است که در آن b ثابتی دلخواه است. این جواب در $C[0,T] \cap C^1(0,T]$ قرار دارد و نه در $C^1[0,T]$. این موضوع متضمن آن است که فنون استاندارد برای مسائلی با مشتق مرتبهٔ صحیح که $y \in C^1[0,T]$ (یا درجهٔ بالاتری از منتظم‌بودن را می‌طلبند)، در اینجا بدون اصلاح نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرند. به‌ویژه یک بسط به سری تیلر از جواب را حول $t = 0$ نمی‌توان انجام داد زیرا $y'(0)$ وجود ندارد.

شرط اولیه چه می‌شود؟ اگر شرطی به‌صورت $y(0) = y_0$ تعیین کنیم در (۱۳) به $b = y_0$ می‌رسیم، اما جواب هنوز در فضای تابعی $C^1[0,T]$ قرار ندارد. ممکن است امیدوار باشیم که شرطی از نوع نویمان به‌صورت $y'(0) = 0$ بتواند تکینی در جواب را حذف

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

یا کنترل کند، اما توجه به (۱۳) نشان می‌دهد که تحمیل چنین شرطی امکان‌پذیر نیست، زیرا مسئله مقدار اولیهٔ

$$ {}^{C}D_{0}^{\alpha} y(t) = 1, \quad t \in (0, T], \quad y'(0) = 0 $$

جواب ندارد. این نتیجه تا زمانی که یک ویژگی اساسی از مشتق کاپوتو در لم ۳.۱۱ از [۱] را به یاد آوریم، عجیب به‌نظر می‌رسد. این لم بیان می‌کند که اگر برای عدد صحیح و مثبتی مانند m که $m-1 < \beta < m$ داشته باشیم $z \in C^m[0,T]$، آنگاه $\lim_{t\to 0} {}^{C}D_{0}^{\beta} z(t) = 0$. از این‌رو، اگر معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲) جوابی به‌صورت $y \in C^1[0,T]$ داشته باشد، آنگاه با حد گرفتن از (۱۲) وقتی که $t \to 0$ به رابطهٔ ناممکن $1 = 0$ می‌رسیم. یعنی، هر جواب y از (۱۲) نمی‌تواند در فضای تابعی $C^1[0,T]$ قرار گیرد.

این یافته را می‌توان به شیوه‌ای دیگر ارائه کرد: برای مسئله ${}^{C}D_{0}^{\alpha} y(t) = f(t)$ روی بازهٔ $(0,T]$ با $f \in C[0,T]$، اگر جواب $y \in C^1[0,T]$ باشد، آنگاه باید داشته باشیم $f(0) = 0$. این نتیجه حالت خاصی از قضیهٔ ۶.۲۶ در [۱] است.

تبصره ۱.۴. برای مسئله ${}^{C}D_{0}^{\alpha} y(t) = f(t)$ روی بازهٔ $(0,T]$ با $0 < \alpha < 1$، اگر هموارای بیشتری برای جواب y روی بازهٔ بسته $[0,T]$ مدنظر باشد، در آن صورت باید شرایط بیشتری روی داده‌ها اعمال کرد. مثلاً، بنابه قضیهٔ ۶.۲۷ در [۱]، برای هر عدد صحیح و مثبت m، شرط $y \in C^m[0,T]$ برقرار است اگر و تنها اگر $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0$.

شرایطی مانند $f(0) = 0$ (و حتی قوی‌تری از آن که در تبصرهٔ ۱.۴ آمد) محدودیتی غیرواقعی روی داده f اعمال می‌کنند که باید از آن اجتناب کرد. بنابراین با نگاه دقیق به پیامد مواجهه با جوابی با هموارای محدود، کار را ادامه می‌دهیم.

به مسئله (۱۲) بازمی‌گردیم و با اعمال شرط اولیه $y(0) = b$، جواب یکتای مسئله به‌صورت (۱۳) به‌دست می‌آید، که در اینجا b ثابت است. بیشتر روش‌های عددی برای مسئله‌های مقدار اولیه با مشتق مرتبه صحیح بر این فرض استوار است که روی هر بازهٔ کوچک $[t_j, t_{j+1}]$ از شبکه، جواب مجهول را می‌توان با درجهٔ بالایی از دقت بوسیلهٔ یک چندجمله‌ای از درجهٔ مناسب تقریب زد. اما آیا این تصور در مورد تابع (۱۳) درست است؟ در ادامه این پرسش را بررسی می‌کنیم.

بازهٔ $[0,h]$ را با $h = t_1$ درنظر می‌گیریم. در این بازه از شبکه، جواب مسئله (۱۳) بدترین رفتار را دارد.

لم ۲.۴. *فرض کنید $\alpha \in (0,1)$. تقریب t^α را بوسیلهٔ یک چندجمله‌ای خطی $c_0 + c_1 t$ روی بازهٔ $[0,h]$ درنظر بگیرید. اگر این تقریب روی بازه $[0,h]$ به‌طور یکنواخت $\mathcal{O}(h^\beta)$، برای ثابت $\beta > 0$، دقیق باشد، آنگاه باید داشته باشیم $\beta \le \alpha$.*

اثبات. بنابه فرض برای هر $t \in [0,h]$ نابرابری $|t^\alpha - (c_0 + c_1 t)| \le C h^\beta$ برقرار است که در آن ثابت C مستقل از h و t است. مقادیری را که به‌ازای $t = 0$، $t = h/2$ و $t = h$ در این نابرابری به‌دست می‌آیند، درنظر می‌گیریم

$$ \begin{cases} 0 - (c_0 + 0) & = \mathcal{O}(h^\beta) \\ (h/2)^\alpha - (c_0 + c_1 h/2) & = \mathcal{O}(h^\beta) \\ h^\alpha - (c_0 + c_1 h) & = \mathcal{O}(h^\beta) \end{cases} $$

معادلهٔ نخست $c_0 = \mathcal{O}(h^\beta)$ را نتیجه می‌دهد. از این‌رو برای سایر معادلات داریم $(h/2)^\alpha - c_1 h/2 = \mathcal{O}(h^\beta)$ و $h^\alpha - c_1 h = \mathcal{O}(h^\beta)$. با ضرب معادلهٔ اول در ۲ و کم‌کردن نتیجه از معادلهٔ دیگر ثابت c_1 حذف می‌شود و نتیجه به‌صورت $\left(1 - 2^{1-\alpha}\right) h^\alpha = \mathcal{O}(h^\beta)$ است. چون $\alpha \neq 1$ و از این‌رو سمت چپ ضریبی از h^α است، این رابطه نمی‌تواند درست باشد مگر اینکه $\beta \le \alpha$. □

لم ۲.۴ بیان می‌کند که تقریب t^α روی بازهٔ $[0,h]$ با هر چندجمله‌ای خطی در بهترین حالت به‌صورت $\mathcal{O}(h^\alpha)$ است. اما مرتبهٔ تقریب $\mathcal{O}(h^\alpha)$ از t^α روی $[0,h]$ با چندجمله‌ای ثابت نیز به‌دست می‌آید. یعنی، به‌کارگیری چندجمله‌ای خطی برای تقریب‌زدن t^α روی $[0,h]$ لزوماً نتیجهٔ بهتری از به‌کارگیری یک چندجمله‌ای ثابت فراهم نمی‌کند. به‌روشی مشابه می‌توان نشان داد که استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه بالاتر وضعیت را بهبود نمی‌بخشد، یعنی مرتبهٔ تقریب t^α روی $[0,h]$ باز هم فقط $\mathcal{O}(h^\alpha)$ است. این هشداری

است که هنگام حل مسائل با مشتق کسری باید مدنظر داشت زیرا برخلاف حالت مشتق مرتبه صحیح، در اینجا چندجمله‌ای‌های درجه بالا ممکن است بهتر از چندجمله‌ای‌های درجه پایین نباشند.

لم ۲.۴ را می‌توان به هر $\alpha > 0$ که عددی صحیح نباشد تعمیم داد و با استدلالی مشابه به همان نتیجه دست یافت. علاوه بر این، بررسی مسئله سادهٔ (۱۲) را به‌آسانی می‌توان به مسئله بسیار کلی‌تر (۶) تعمیم داد. در این زمینه بخش ۶.۴ از [۱] را ببینید.

التزام‌هایی برای ساختن طرح‌های تفاضلی. بحث قبلی در بخش ۴ ایجاب می‌کند که در ساختن طرح‌های تفاضلی مرتبه بالاتر برای جواب‌های نوعی از مسائلی مانند (۱۲) و (۶)، باید از طرح‌های غیرکلاسیک استفاده کرد، زیرا طرح‌های کلاسیک با این فرض ساخته شده‌اند که تقریب‌های به‌دست آمده از چندجمله‌ای‌های درجه بالاتر دقت بیشتری دارند. این اندیشه به‌طور مفصل در [۲۹] توسعه یافته است و اکنون یکی از نتایج آن را ارائه می‌دهیم.

نکته: اگرچه در [۲۹] فقط مسائل مقدار مرزی بحث شده است، اما یک بررسی ساده نشان می‌دهد که استدلال‌ها و نتایج ارائه شده در آن (کم‌وبیش) برای مسائل مقدار اولیه مانند (۶) وقتی $f = f(t)$، یعنی وقتی که مسئله (۶) خطی است، نیز برقرارند.

فرض کنید $\alpha > 0$ عددی ثابت و غیرصحیح باشد. مسئله $D^\alpha y(t) = f(t)$ روی بازهٔ $(0, T]$ با $y(0) = 0$ را درنظر بگیرید. فرض کنید شبکهٔ روی $[0, T]$ هم‌فاصله با ضخامت h باشد، یعنی برای $i = 0, 1, \ldots, N$، $t_i = ih$. تصور کنید که طرح تفاضلی مورد استفاده برای حل $D^\alpha y = f$ در هر نقطه t_i با $i > 0$، به‌صورت $\sum_{j=0}^{i} a_{ij} y_j^N = f(t_i)$ باشد. منطقی است که برای هر i و j فرض کنیم $|a_{ij}| = \mathcal{O}(h^{-\alpha})$ زیرا یک مشتق کسری از مرتبهٔ α را تقریب می‌زنیم (می‌توان بررسی کرد که همهٔ طرح‌های پیشنهادی برای این مسئله، تقریباً این ویژگی را دارند).

در ادامه نسخهٔ دیگری از قضیهٔ ۳.۳ در [۲۹] ارائه می‌شود.

قضیه ۳.۴. *فرض کنید یک طرح تفاضلی، وقتی تابع سمت راست برای هر $k \in \{0, 1, \ldots, \lceil p - \alpha - 1 \rceil\}$ به‌صورت $f(t) = Ct^k$ باشد، به مرتبهٔ همگرایی p با $p > \alpha$ دست یابد. در این صورت برای هر عدد صحیح، ثابت و مثبت i، ضرایب این طرح تفاضلی باید در رابطهٔ زیر صدق کنند:*

$$\lim_{h \to 0} \left(h^\alpha \sum_{j=0}^{i} j^{k+\alpha} a_{ij} \right) = \frac{i^k \, \Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(k + 1)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \lceil p - \alpha - 1 \rceil \tag{۱۴}$$

اثبات. عدد $k \in \{0, 1, \ldots, \lceil p - \alpha - 1 \rceil\}$ را ثابت بگیرید. در این صورت $k < p - \alpha$. برای سادگی کار تابع

$$f(t) = \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)} \, t^k$$

را انتخاب کنید. در این صورت جواب درست مسئله مقدار اولیه $y(t) = t^{k+\alpha}$ است. عدد صحیح و مثبت i را ثابت بگیرید. آنگاه

$$\sum_{j=0}^{i} a_{ij} y_j^N = f(t_i) = \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)} (ih)^k$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

بنابراین، با استفاده از فرض دستیابی به مرتبهٔ همگرایی p و $|a_{ij}| = \mathcal{O}(h^{-\alpha})$ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(h^{\alpha}\sum_{j=0}^{i} j^{k+\alpha}a_{ij}\right) &= \lim_{h\to 0} h^{-k}\sum_{j=0}^{i} a_{ij}y(t_j)\\ &= \lim_{h\to 0} h^{-k}\left\{\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}(ih)^k + \sum_{j=0}^{i} a_{ij}\left[y(t_j)-y_j^N\right]\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}i^k + \mathcal{O}(h^{p-\alpha-k})\right\}\\ &= \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}\,i^k\end{aligned}$$

چون $k < p-\alpha$. □

قضیهٔ ۳.۴ ایجاب می‌کند طرح‌هایی که در شرط (۱۴) صدق نکنند، در هیچ نقطه‌ای از شبکه نمی‌توانند به یک مرتبهٔ همگرایی بزرگتر از $\mathcal{O}(h^{\alpha})$ دست یابند. (این گزاره با نتیجهٔ نظریه تقریب در لم ۲.۴ سازگار است.) برای مثال، در حالت $0 < \alpha < 1$ از قضیهٔ ۳.۴ نتیجه می‌شود که طرح مشهور L1 در بهترین شرایط $\mathcal{O}(h^{\alpha})$ دقیق است.

تبصره ۴.۴. برای اجتناب از پیامدهای نتایجی مانند قضیه ۳.۴، می‌توان محدودیت‌هایی مانند $f(0) = 0$ را روی داده‌ها اعمال کرد. این موضوع در بخش ۵ از [۲۹] بحث شده است، و اگرچه نتایج نظری و تجربی به‌دست آمده بهبودی را در دقت طرح‌های تفاضلی استاندارد نشان می‌دهد، اما این بهبود تنها برای ردهٔ محدودی از مسائل امکان‌پذیر است.

۵. رویکردهای ناموفق در برخورد با غیرموضعی‌بودن

غیرموضعی‌بودن یکی از ویژگی‌های اصلی عملگرهای مرتبه کسری است. در واقع، انتگرال‌ها و مشتق‌های کسری اغلب به‌عنوان یک قالب ریاضی معرفی می‌شوند و هدف اصلی آنها دربرگرفتن اثرات ارثی در مدل‌سازی پدیده‌های واقعی است زمانی‌که، مشاهدات نظری یا تجربی نشان دهند آثار اعمال بیرونی به‌طور آنی منتشر نمی‌شود و به قدمت دستگاه بستگی دارد.

از یک سو، غیرموضعی‌بودن ویژگی بسیار جذابی است که بیشتر علاقه و موفقیت در حسابان کسری ناشی از آن است. از سوی دیگر، غیرموضعی‌بودن دشواری‌های محاسباتی شاقی را عرضه می‌کند که پژوهشگران از راه‌های مختلف برای غلبه بر آنها تلاش می‌کنند.

متأسفانه، برخی تلاش‌ها در برخورد با غیرموضعی‌بودن غیرقابل‌اعتماد هستند و به نتایج اشتباه منجر می‌شوند. علت آن اجرای ناشیانهٔ «اصل حافظهٔ محدود» است که در آن به‌راحتی مقدار زیادی از سابقهٔ جواب نادیده گرفته می‌شود. چون براساس این فن می‌توان شیوه‌های پیچیده‌تر و دقیق‌تری را ابداع کرد، بحث در این مورد را به بخش ۶ موکول می‌کنیم.

در ادامه به روش‌هایی مبتنی بر نوعی بسط تیلر کسری از جواب، به‌صورت

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k (t-t_0)^{k\alpha}$$

اشاره می‌کنیم که در آن ضرایب Y_k با روش عددی مناسبی محاسبه می‌شوند.

وقتی معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح حل می‌شوند، برای تقریب جواب در نقطهٔ معلوم t_1 می‌توان از بسط تیلر استفاده کرد و پس از آن، همان بسط را با انتقال مبدأ به نقطهٔ جدید t_1 بازنویسی کرد. با ادامه این فرایند روشی گام‌به‌گام ساخته می‌شود که در آن تقریب جواب در t_{n+1} بر مبنای تقریب جواب در t_n (یا در نقاط قبلی بیشتری) مقداریابی می‌شود. در عوض، در معادلات مرتبه کسری، بسط بالا تنها برحسب نقطهٔ t_0 (نقطهٔ آغازین یا اولیه از عملگر دیفرانسیل کسری) برقرار است و ساختن یک روش گام‌به‌گام امکان‌پذیر

نیست. بنابراین، بسط‌هایی از این نوع می‌توانند تقریبی دقیق را فقط به‌طور موضعی، یعنی بسیار نزدیک به نقطهٔ آغازین t_0، فراهم کنند و در نتیجه، همان‌طور که در [۳۰] نیز بحث شده است، روش‌های مبتنی بر این بسط‌ها معمولاً برای معادلات دیفرانسیل کسری مناسب نیستند.

یک رویکرد ناموفق دیگر براساس تلاش برای استفاده از تفاضل بین $y(t_{n+1})$ و $y(t_n)$ در فرمول انتگرالی (۷) است که در آن جواب در t_{n+1} را به‌صورت نموی از جواب در t_n بازنویسی می‌کنند، یعنی

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + G_n(t, y(t)) \qquad (۱۵آ)$$

سپس نمو

$$G_n(t, y(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - u)^{\alpha-1} f(u, y(u))\, \mathrm{d}u - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_n} (t_n - u)^{\alpha-1} f(u, y(u))\, \mathrm{d}u \qquad (۱۵ب)$$

را با جایگزین‌کردن میدان برداری $f(t, y(t))$ در هر دو انتگرال (۱۵ب) با چندجمله‌ای درونیاب (مرتبه اول) در نقاط شبکه‌ای t_{n-1} و t_n تقریب می‌زنند. روش‌هایی از این نوع به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$y_{n+1} = y_n + P_n(y_{n-1}, y_n) \qquad (۱۶)$$

که در آن P_n تابعی معلوم است و با فنون استاندارد درونیابی به‌دست می‌آید. رویکردهایی از این نوع روش‌های دو گامی آدامز–بشفورت نامیده می‌شوند و چون به‌ظاهر، مسئله غیرموضعی را به مسئله‌ای موضعی (و بنابراین، یک مسئله دشوار را به یک مسئله بسیار ساده‌تر) تبدیل می‌کنند، مورد توجه پژوهشگران هستند. علی‌رغم این واقعیت که در این روش‌ها سعی می‌شود (به‌طور ضمنی) نقش عبارت غیرموضعی $G_n(t, y(t))$ در (۱۵ب) را بوسیلهٔ برخی جمله‌های کاملاً موضعی تقریب بزنند و همان‌طور که در [۳۱] اشاره شده است این کار معمولاً آنها را غیرقابل‌اعتماد می‌سازد، این روش‌ها به طرز عجیبی محبوب شده‌اند.

به‌کارگیری درونیابی در نقاط t_{n-1} و t_n برای تقریب $f(t, y(t))$ روی بازه‌های بزرگتر $[t_0, t_n]$ و $[t_0, t_{n+1}]$ بکلی نامناسب است. می‌دانیم درونیابی چندجمله‌ای ممکن است تقریب‌هایی دقیق در بازهٔ نقاط داده، در این حالت $[t_{n-1}, t_n]$، ارائه کند، اما خارج از این بازه (که برونیابی به‌جای درونیابی انجام می‌شود)، هرچه بازه‌های انتگرال‌گیری $[t_0, t_n]$ و $[t_0, t_{n+1}]$ در (۱۵ب) بزرگ و بزرگتر می‌شوند، یعنی هرچه انتگرال‌گیری پیش می‌رود و n افزایش می‌یابد، تقریب مورد نظر بیشتر و بیشتر نادقیق می‌شود.

نتیجه این است که باید نتایج کاملاً غیرقابل‌اعتمادی را از روش‌های مبتنی بر این ایده انتظار داشت.

توجه کنید که نقص اساسی این رویکرد، تجزیه (۱۵آ)–(۱۵ب) نیست بلکه روش موضعی و از این‌رو نامناسب (۱۶) است که در آن سابقه مدیریت می‌شود. در واقع، به‌لحاظ فنی ساختن الگوریتم‌هایی درست و مؤثر بر پایهٔ (۱۵آ)–(۱۵ب) شدنی است. برای مثال، با یک روش عددی که از نظر محاسباتی ارزان‌تر از روش مورد استفاده برای جملهٔ موضعی است می‌توان به جملهٔ نمو (۱۵ب) پرداخت [۳۲].

۶. رویکردهایی مؤثر و قابل‌اعتماد در مواجهه با عبارت حافظه

غیرموضعی‌بودن عملگر مرتبه کسری بدان معناست که لازم است به روشی مؤثر با عبارت حافظه برخورد شود. این عبارت، به‌ویژه در مسائل با اندازهٔ بزرگ، معمولاً منبع پیچیدگی محاسباتی شناخته می‌شود و نیازمند اتخاذ راهبردهای مناسب است تا هزینه محاسباتی در یک حد معقول نگه‌داشته شود. در واقع، این نگرش به بررسی‌های (کم‌وبیش موفق) بسیاری در مورد رویکردهای کاهش هزینهٔ محاسباتی منجر می‌شود. البته باید توجه داشت که تعداد زیاد عملیات حسابی تنها مشکل بالقوه‌ای نیست که عبارت حافظه ارائه می‌کند. مشکل اساسی‌تر دیگری نیز وجود دارد که به‌نظر می‌رسد کمتر به آن توجه شده است: سابقهٔ فرایند نه تنها باید در محاسبه درنظر گرفته شود بلکه برای مدیریت مناسب آن، باید در حافظهٔ رایانه نیز ذخیره شود. در حالی که مقدار حافظهٔ مورد نیاز در الگوریتم‌ها برای حل معادلات

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

دیفرانسیل معمولی به‌راحتی در دسترس است، برای ایجاد سازوکاری مؤثر در حالت، مثلاً، معادلات دیفرانسیل جزئی زمان‌ـ کسری که فنون عنصر متناهی برای گسسته‌سازی مشتق‌های مکانی آنها استفاده می‌شود، تقاضا برای حافظه ممکن است بسیار بالا باشد.
بیشتر روش‌های تفاضل متناهی برای معادلات دیفرانسیل کسری در هر گام به مقداریابی مجموعی پیچشی به‌صورت زیر نیاز دارند

$$y_n = \phi_n + \sum_{j=0}^{n} c_j y_{n-j}, \quad \text{یا} \quad y_n = \phi_n + \sum_{j=0}^{n} c_j f(t_{n-j}, y_{n-j}), \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{۱۷}$$

که در آن ϕ_n عبارتی است که اساساً به شرایط اولیه یا سایر اطلاعات معلوم بستگی دارد.
یک ارزیابی ساده از (۱۷) نشان می‌دهد که هزینه محاسباتی آن متناسب با $\mathcal{O}(N^2)$ است و زمانی که انتگرال‌گیری با یک گام کوچک یا روی یک بازهٔ انتگرال‌گیری بزرگ مورد نیاز باشد، مقدار N می‌تواند بسیار بزرگ باشد و به هزینه‌های محاسباتی غیرقابل‌قبول منجر شود.

به همین دلیل رویکردهای متفاوتی برای یک مواجهه سریع، مؤثر و قابل‌اعتماد با عبارت حافظه در مسایل غیرموضعی ابداع شده است. در اینجا شرح کوتاهی از جالب‌ترین روش‌ها از این نوع را ارائه می‌کنیم و تأثیر این رویکردها بر نیازمندی‌های حافظه نیز مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱.۶. فنون شبکهٔ تودرتو. چندین مفهوم متفاوت را می‌توان تحت عنوان شبکه‌های تودرتو رده‌بندی کرد. اندیشهٔ کلی براساس این نگرش است که مجموع پیچشی در معادلهٔ (۱۷) ناشی از گسسته‌سازی یک عملگر مشتق یا انتگرال کسری، از همهٔ نقاط قبلی شبکه به‌عنوان گره استفاده می‌کند. اکنون این سوال پیش می‌آید که آیا استفاده از همهٔ این گره‌ها واقعاً ضروری است یا می‌توان تنها با استفاده از یک زیرمجموعه از آنها تحت‌عنوان شبکه‌ای دوم، با ظرافت کمتر، که در داخل شبکه اصلی قرار دارد، در تلاش صرفه‌جویی کرد.

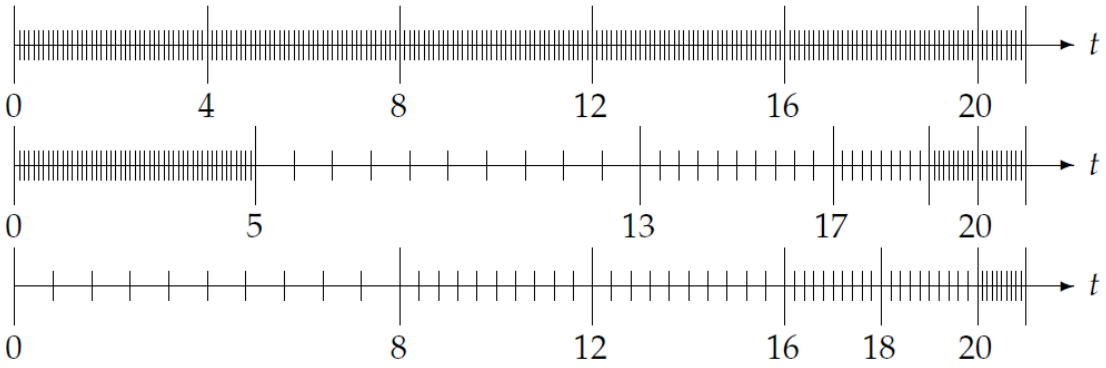
اصل حافظهٔ محدود. ساده‌ترین اندیشه در این رده اصل حافظهٔ محدود است که در بخش ۷.۳ از [۵] آمده است. این اصل براساس تعیین ثابت $\tau > 0$، موسوم به طول حافظه، و جایگزینی عبارت انتگرالی حافظه روی بازهٔ $[t_0, t]$ (برای $t > t_0 + \tau$) با انتگرالی روی بازهٔ $[t - \tau, t]$ و همان تابع انتگرالده است. از نظر فنی، این به معنای «فراموشی» تمام سابقهٔ فرایند است که بیش از τ واحد زمان در گذشته باشد. بنابراین حافظه به‌جای طول متغیر $t - t_0$، که در فرایندی طولانی مدت ممکن است بسیار طولانی‌تر باشد، دارای طول متناهی و ثابت τ است. از دیدگاه الگوریتمی، روش حافظهٔ محدود، مجموع پیچشی در معادله (۱۷) را به مجموعی برش می‌دهد که در آن اندیس j، برای νی ثابت، از $n - \nu$ تا n تغییر می‌کند. روش حافظهٔ محدود مزایای قابل‌توجهی دارد:

- پیچیدگی محاسباتی گام زمانی nام از $\mathcal{O}(n)$ به $\mathcal{O}(1)$ کاهش می‌یابد. بنابراین، پیچیدگی کل روش با N گام زمانی از $\mathcal{O}(N^2)$ به $\mathcal{O}(N)$ کاهش می‌یابد.
- در هیچ نقطهٔ زمانی دسترسی به آن بخش از سابقهٔ فرایند که بیش از ν گام زمانی در گذشته است، ضروری نمی‌باشد. بنابراین، همهٔ آن گام‌های زمانی قبلی را می‌توان از حافظهٔ فعال حذف کرد، و حافظهٔ مورد نیاز را نیز از $\mathcal{O}(N)$ به $\mathcal{O}(1)$ کاهش داد.

متاسفانه، این اندیشه اشکالات جدی هم دارد. به‌ویژه در [۳۳] نشان داده شده است که مرتبهٔ همگرایی روش گسسته‌سازی زیربنائی کاملاً از بین می‌رود. به‌عبارت دیگر، نمی‌توان ثابت کرد که وقتی (بزرگترین) طول گام به صفر میل می‌کند، الگوریتم همگرا می‌شود. بنابراین، روش حافظهٔ محدود برای استفادهٔ عملی پیشنهاد نمی‌شود.

حافظهٔ لگاریتمی. برای غلبه بر کاستی‌های اصل حافظهٔ محدود، دو روش مرتبط اما نه یکسان، براساس مفهوم شبکهٔ تودرتو در [۳۳، ۳۴] ایجاد شده‌اند. اندیشهٔ مشترک هر دو رویکرد، نحوهٔ برخورد آنها با بخش دورافتادهٔ حافظه است. به‌جای آنکه مانند اصل حافظه محدود آن را کاملاً نادیده بگیرند، از آن روی شبکه‌ای درشت‌تر نمونه می‌گیرند. در واقع اصل بنیادی این است که نه تنها میزانی از درشت‌سازی معرفی می‌شود، بلکه طول گام h روی جدیدترین بخش از حافظه، طول گام بزرگتر wh (با پارامتر $w > 1$) روی بازهٔ قبل

از آن، طول گام بزرگتر $w^{۲}h$ روی بازهٔ قبل‌تر از آن و الی آخر اعمال می‌شود. تفاوت اصلی بین دو رویکرد [۳۳، ۳۴] در شیوهٔ انتخاب نقاط تغییر وضعیت از یک اندازهٔ شبکه به دیگری است.



شکل ۱: بالا: شبکهٔ کامل، وسط: شبکهٔ تودرتوی پیشنهاد شده در [۳۳]، پایین: شبکهٔ تودرتوی پیشنهاد شده در [۳۴]. شبکه‌ها برای لحظهٔ زمانی $t = ۲۱$ و طول گام اصلی $h = ۰/۱$ نمایش داده شده‌اند.

به بیان دقیق‌تر، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، روش فورد و سیمپسن [۳۳] در زمان اخیر آغاز می‌شود و زیربازه‌ها را با طول‌های تعیین‌شده از راست به چپ با نقاط شبکه‌یی فاصله‌دار به‌طور مناسب پُر می‌کند. با این کار هزینهٔ محاسباتی به $\mathcal{O}(N \log N)$ کاهش می‌یابد و در عین حال مرتبهٔ همگرایی طرح زیربنائی حفظ می‌شود [۳۳]. با وجود این، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، معمولاً نقطهٔ انتهایی سمت چپ از سمت‌چپ‌ترین زیربازه بر نقطهٔ آغازین منطبق نیست. در این حالت، یا می‌توان سمت‌چپ‌ترین زیربازه را با یک شبکهٔ ریز پُر کرد که در آن صورت هزینهٔ محاسباتی افزایش و البته خطا کاهش می‌یابد، و یا به‌سادگی می‌توان از نقش این زیربازه چشم‌پوشی کرد و در این صورت پیچیدگی محاسباتی کاهش اما خطا کمی افزایش می‌یابد. با این حال، چونکه طول حافظه همچنان با تعداد گام‌ها افزایش می‌یابد این به معنی از بین رفتن کامل دقت مانند اصل حافظه محدود نیست. در هر دو مورد، نقاط شبکهٔ ریز که در حال حاضر در شبکهٔ تودرتو استفاده نمی‌شوند، ممکن است در گام‌های بعدی دوباره فعال شوند. بنابراین، تمام نقاط قبلی شبکه باید به حافظه سپرده شوند، پس مقدار مورد نیاز فضای حافظه در $\mathcal{O}(N)$ باقی می‌ماند.

در مقابل، رویکرد دیتهلم و فرید [۳۴] بازهٔ اصلی را از چپ به راست پُر می‌کند، یعنی، فرایند با درشت‌ترین زیربازهٔ شبکه آغاز می‌شود و سپس به‌سوی ناحیه‌هایی با شبکهٔ ریزتر پیش می‌رود. نتیجهٔ نهایی نیز روشی با هزینهٔ محاسباتی $\mathcal{O}(N \log N)$، و با همان مرتبهٔ همگرایی روش فورد–سیمپسن است. اما راهبرد آن برای انتخاب نقاط شبکه ایجاب می‌کند که نقاط غیرفعال در گام کنونی هرگز در گام‌های بعدی دوباره فعال نخواهند شد، و در نتیجه سابقهٔ داده برای این نقاط غیرفعال را می‌توان از حافظهٔ اصلی حذف کرد. با این‌کار، حافظه مورد نیاز به $\mathcal{O}(\log N)$ کاهش می‌یابد.

۲.۶. روشی مبتنی بر الگوریتم تبدیل سریع فوریه. رویکردی مؤثر برای مقداریابی سریع مجموع‌های پیچشی در (۱۷) در [۳۵، ۳۶] ارائه شده است. اندیشهٔ اصلی دوپاره‌کردن هر یک از این مجموع‌ها به شیوه‌ای است که استفاده از الگوریتم تبدیل سریع فوریه را فراهم کند. برای ارائه یک شرح مختصر، نخست نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم

$$T_p(n) = \sum_{j=p}^{n} c_{n-j} g_j, \quad S_{p,q}(n) = \sum_{j=p}^{q} c_{n-j} g_j, \quad n \geq p$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

که در آن بنابر فرمول به‌کار رفته در (۱۷) $g_j = y_j$ یا $g_j = f(t_j, y_j)$. بنابراین روش‌های عددی که با (۱۷) توصیف شده‌اند را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$y_n = \phi_n + T_0(n), \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

الگوریتم مذکور در [۳۵، ۳۶] مبتنی بر دوپاره‌کردن $T_0(n)$ به یک یا چند مجموع جزئی از نوع $S_{p,q}(n)$ و فقط یک مجموع پیچشی نهایی $T_p(n)$ با بیشترین طول (ثابت) r است. برای این‌کار، نخست مقداردهی اولیهٔ زیر انجام می‌شود

$$T_0(n) = \sum_{j=0}^{n} c_{n-j} g_j, \quad n \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$$

سپس r مقدار از $T_0(n)$ به‌صورت زیر به دو جمله شکسته می‌شوند

$$T_0(n) = S_{0,r-1}(n) + T_r(n), \quad n \in \{r, r+1, \ldots, 2r-1\}$$

به‌طور مشابه، برای محاسبهٔ $2r$ مقدار بعدی، $T_0(n)$ را به‌صورت زیر دوپاره می‌کنیم

$$T_0(n) = \begin{cases} S_{0,2r-1}(n) + T_{2r}(n) & n \in \{2r, 2r+1, \ldots, 3r-1\} \\ S_{0,2r-1}(n) + S_{2r,3r-1}(n) + T_{3r}(n) & n \in \{3r, 3r+1, \ldots, 4r-1\} \end{cases}$$

سپس $4r$ مجموعیابی دیگر را به‌صورت زیر دوپاره می‌کنیم

$$T_0(n) = \begin{cases} S_{0,4r-1}(n) + T_{4r}(n) & n \in \{4r, 4r+1, \ldots, 5r-1\} \\ S_{0,4r-1}(n) + S_{4r,5r-1}(n) + T_{5r}(n) & n \in \{5r, 5r+1, \ldots, 6r-1\} \\ S_{0,4r-1}(n) + S_{4r,6r-1}(n) + T_{7r}(n) & n \in \{6r, 6r+1, \ldots, 7r-1\} \\ S_{0,4r-1}(n) + S_{4r,6r-1}(n) + S_{6r,7r-1}(n) + T_{8r}(n) & n \in \{7r, 7r+1, \ldots, 8r-1\} \end{cases}$$

این فرایند تا مقداریابی تمام جمله‌های $T_0(n)$، برای $n \le N$، ادامه می‌یابد.

توجه کنید که در دوپاره‌کردن‌های بالا طول هر مجموع $S_{p,q}$ برابر $\ell(p,q) = q - p + 1$ همیشه مضربی از r با توانی از ۲ به‌عنوان عامل ضرب است (مثلاً، طول $S_{p,q}(n)$ می‌تواند r، $2r$، $4r$، $8r$ و الی آخر باشد).

برای درک بیشتر موضوع، نمودار شکل ۲ نحوهٔ محاسبه روی مثلث اصلی

$$T_0 = \{(n, j) : 0 \le j \le N\}$$

را نشان می‌دهد که در آن T_0 به مجموع‌های جزئی مشخص‌شده با مربع‌های (دارای برچسب قرمز)

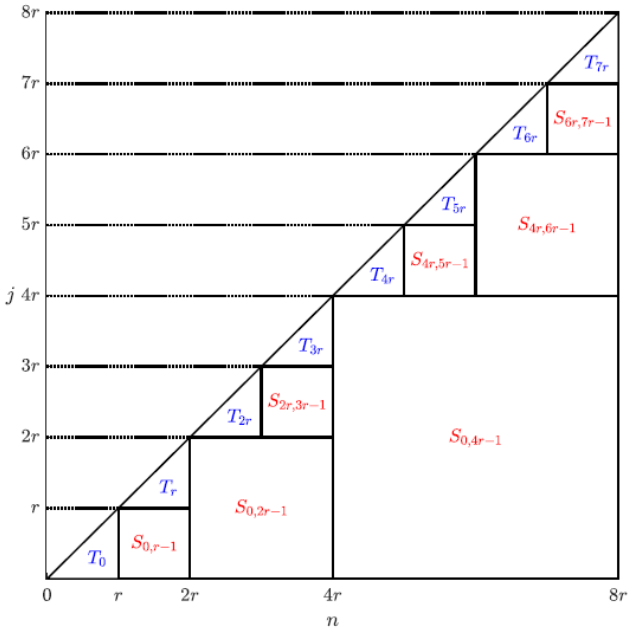
$$S_{p,q} = \{(n, j) : q + 1 \le n \le q + \ell(p,q), \ \ p \le j \le q\}$$

و بلوک‌های پایانی مشخص‌شده با مثلث‌های (دارای برچسب آبی)

$$T_p = \{(n, j) : p \le j \le n \le p + r - 1\}$$

دوپاره شده است.

هر یک از بلوک‌های پایانی $T_{\ell r}(n)$، $n = \ell r, \ell r + 1, \ldots, (\ell+1)r - 1$ با مجموعیابی مستقیم بوسیلهٔ $r(r+1)/2$ عمل با ممیز شناور محاسبه می‌شوند. مقداریابی مجموع‌های جزئی $S_{p,q}(n)$ را می‌توان با الگوریتم تبدیل سریع فوریه انجام داد (برای شرحی جامع [۳۷] را ببینید). این الگوریتم به تعدادی متناسب با $2\ell \log_2 2\ell$ عمل با ممیز شناور که در آن $\ell = \ell(p,q)$ طول مجموع جزئی $S_{p,q}(n)$ است نیاز دارد، زیرا r توانی از ۲ است.



شکل ۲: دوپاره‌کردن محاسبهٔ $T_0(n)$ به مجموع‌های جزئی $S_{p,q}$ (مربع‌های قرمز) و بلوک‌های پایانی T_p (مثلث‌های آبی).

در بهترین حالت که در آن r و N هر دو توانی از ۲ هستند، هر مجموع جزئی $S_{p,q}$ که باید به همراه طولش، تعداد آنها و هزینهٔ محاسباتی تعیین شوند، در جدول ۱ داده شده‌اند.

جدول ۱: مجموع‌های جزئی، طول، تعداد و هزینهٔ محاسباتی آنها برای مقداریابی $T_0(N)$.

مجموع‌های جزئی	طول	تعداد	هزینه
$S_{0,\frac{N}{2}-1}$	$\frac{N}{2}$	۱	$\mathcal{O}(N\log_2 N)$
$S_{0,\frac{N}{4}-1},\ S_{\frac{N}{2},\frac{3N}{4}-1}$	$\frac{N}{4}$	۲	$\mathcal{O}(\frac{N}{2}\log_2\frac{N}{2})$
$S_{0,\frac{N}{8}-1},\ S_{\frac{N}{4},\frac{3N}{8}-1},\ S_{\frac{N}{2},\frac{5N}{8}-1},\ S_{\frac{3N}{4},\frac{7N}{8}-1}$	$\frac{N}{8}$	۴	$\mathcal{O}(\frac{N}{4}\log_2\frac{N}{4})$
$S_{0,\frac{N}{16}-1},\ S_{\frac{N}{8},\frac{3N}{16}-1},\ S_{\frac{N}{4},\frac{5N}{16}-1},\ S_{\frac{3N}{8},\frac{7N}{16}-1},\ S_{\frac{N}{2},\frac{9N}{16}-1},S_{\frac{5N}{8},\frac{11N}{16}-1},\ S_{\frac{3N}{4},\frac{13N}{16}-1},\ S_{\frac{7N}{8},\frac{15N}{16}-1}$	$\frac{N}{16}$	۸	$\mathcal{O}(\frac{N}{8}\log_2\frac{N}{8})$
⋮	⋮	⋮	⋮
$S_{0,r-1},\ S_{2r,3r-1},\ S_{4r,5r-1},\ S_{6r,7r-1},\ S_{8r,9r-1},\cdots$	r	$s=\frac{N}{2r}$	$\mathcal{O}(\frac{N}{s}\log_2\frac{N}{s})$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

علاوه بر این، N/r بلوک پایانی $T_{\ell r}$ هر یک به طول r، نیز با $r(r+۱)/۲$ عمل با ممیز شناور حساب می‌شوند و بنابراین تعداد کل اعمال با ممیز شناور با

$$N\log_۲ N + ۲\left(\frac{N}{۲}\log_۲\frac{N}{۲}\right) + ۴\left(\frac{N}{۴}\log_۲\frac{N}{۴}\right) + \cdots + s\left(\frac{N}{s}\log_۲\frac{N}{s}\right) + \frac{N}{r}\frac{r(r+۱)}{۲}$$
$$= \sum_{j=۰}^{\log_۲ s} N\log_۲\frac{N}{۲^j} + N\frac{r+۱}{۲} = \mathcal{O}(N(\log_۲ N)^۲), \quad s = \frac{N}{۲^r}$$

متناسب است که برای N به‌اندازهٔ کافی بزرگ، به‌طور قابل‌توجهی کوچکتر از تعداد $\mathcal{O}(N^۲)$ عمل با ممیز شناور مورد نیاز در مجموعیابی مستقیم $T_۰(N)$ است.

اگرچه ممکن است کل شیوه پیچیده به‌نظر آید و در برنامه‌نویسی به تلاش بیشتری نیاز داشته باشد، اما معلوم شده است که بسیار مؤثر است و می‌توان آن را در روش‌های مختلف به‌صورت (۱۷) به‌کار گرفت بدون اینکه روی دقت آنها اثر بگذارد. حفظ دقت به این دلیل است که این روش کل سابقهٔ فرایند را به همان طریقی که در رویکرد سرراست بالا با هزینهٔ محاسباتی $\mathcal{O}(N^۲)$ ذکر شد، درنظر می‌گیرد. از این‌رو، باید کل سابقهٔ داده را در حافظهٔ فعال نگه داشت، اما در آن از الزام استفاده از شبکه‌های خاص احتراز می‌شود. همهٔ کدهای متلب برای معادلات دیفرانسیل کسری که در منابع [۱۰، ۲۱، ۳۸] توضیح داده شده‌اند، و به‌صورت رایگان روی وبگاه Mathworks در دسترس هستند [۳۹]، از این الگوریتم استفاده می‌کنند.

۳.۶. طرح‌های فشرده‌سازی هسته. اگرچه اصطلاح «طرح فشرده‌سازی هسته» به‌تازگی تنها در چند پژوهش خاص معرفی شده است [۴۰، ۴۱، ۴۲]، اما در اینجا از آن برای توصیف مجموعه‌ای از روش‌ها استفاده می‌کنیم که در زمان‌های مختلف توسط نویسندگان مختلف ارائه شده‌اند و همهٔ آنها اساساً بر این اصل یکسان استوار هستند که جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل کسری غیرموضعی بوسیلهٔ (شاید چندین) معادلهٔ دیفرانسیل معمولی موضعی تقریب شود. در اینجا فقط اندیشه‌های اصلی زیربنائی این رویکرد را ارائه می‌کنیم و برای پوشش جامع‌تر موضوع، خواننده را به نوشتجات مربوطه ارجاع می‌دهیم.

در عمل، طرح‌های فشرده‌سازی هسته نه تنها الگوریتم‌هایی هستند که کارایی مواجهه با عبارت حافظه را بهبود می‌بخشند بلکه روش‌هایی مستقل نیز هستند و از این جهت معمولاً به‌عنوان روش‌های غیرکلاسیک رده‌بندی می‌شوند [۴۳]. به همین دلیل آنها را می‌توان در بخش ۳ همراه روش‌های دیگر برای معادلات دیفرانسیل کسری نیز مورد بحث قرار داد. اما از آنجا که یکی از دستاوردهای اصلی این روش‌ها (و انگیزه معرفی آنها) مدیریت حافظه و مشکلات محاسباتی مربوط به حافظهٔ طولانی و پایا در مسائل مرتبه کسری است، بحث در مورد آنها را در بخش اخیر مناسب می‌دانیم.

برای سهولت در ارائه، فقط حالت $۰ < \alpha < ۱$ را درنظر می‌گیریم، و تعمیم به هر $\alpha > ۰$ تنها یک موضوع فنی است. اندیشهٔ اصلی با نمایش انتگرالی هستهٔ انتگرال ریمان–لیوویل (۱) به‌صورت

$$\frac{t^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_۰^\infty e^{-rt}r^{-\alpha}\,\mathrm{d}r \tag{۱۸}$$

آغاز می‌شود. در ادامه با قواعد کوادراتور استاندارد می‌توان انتگرال را به‌صورت زیر با مجموع نمایی‌ها تقریب زد

$$\frac{t^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)} = \sum_{k=۱}^{K} w_k e^{-r_k t} + e_K(t) \tag{۱۹}$$

که در آن خطای $e_K(t)$ و پیچیدگی محاسباتی مربوط به تعداد K گره و وزن به انتخاب از میان قواعد کوادراتور ممکن بستگی دارد. با اعمال این تقریب به‌جای انتگرال دقیق در فرمول انتگرالی (۷)، جواب معادلهٔ دیفرانسیل کسری (۶) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$y(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{K} w_k \int_{t_0}^{t} e^{-r_k(t-\tau)} f(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau + E_K(t) \tag{۲۰}$$

هر کدام از انتگرال‌ها در (۲۰) جواب مسئله‌ای مقدار اولیه به‌صورت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y^{[k]}(t) = -r_k y^{[k]}(t) + f(t, y^{[k]}(t)), \quad y^{[k]}(t_0) = 0 \tag{۲۱}$$

است که با یک روش‌حل استاندارد برای معادلات دیفرانسیل معمولی می‌توان به‌طور عددی آن را تقریب زد و تقریب‌های $y_n^{[k]}$ را روی شبکهٔ $\{t_n\}$ به‌دست آورد. اگر قاعده کوادراتور طوری انتخاب شود که خطای $E_K(t)$ آنقدر کوچک باشد که بتوان آن را نادیده گرفت، در آن صورت می‌توان جوابی تقریبی از معادلهٔ دیفرانسیل کسری اصلی (۶) را گام‌به‌گام به‌صورت

$$y_n = y_0 + \sum_{k=1}^{K} \bar{w}_k y_n^{[k]}$$

به‌دست آورد که در آن هر $y_n^{[k]}$ برحسب روش‌حل انتخاب شده برای معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، فقط به $y_{n-1}^{[k]}$ یا به چند مقدار قبلی دیگر بستگی دارد.

در عمل، یک مسئله غیرموضعی (معادلهٔ دیفرانسیل کسری) با حافظه‌ای صفرناشدنی با K مسئله موضعی (معادلات دیفرانسیل معمولی) جایگزین شده است که هر کدام از آنها تلاش محاسباتی کمتری را می‌طلبند و اگر برای حل هر کدام از معادلات دیفرانسیل معمولی (۲۱) از یک روش‌حل pـ گامی استفاده شود آنگاه حافظه مورد نیاز به $\mathcal{O}(pK)$ کاهش خواهد یافت.

بدیهی است اندیشهٔ ترسیم‌شده در بالا به جزئیات فنی دیگری نیاز دارد تا به‌درستی کار کند. نخست اینکه، یک تحلیل دقیق خطا مورد نیاز است تا اطمینان حاصل شود که خطای کلی کمتر از دقت هدف است. این یک کار بسیار حساس است زیرا مستلزم بررسی ناسازگاری بین قاعدهٔ کوادراتور به‌کارگرفته‌شده برای تقریب انتگرال در (۲۰) و روش‌حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی به‌کارگرفته‌شده بر روی دستگاه (۲۱) است، که می‌تواند موضوع بسیار دشواری باشد. به‌علاوه، برخی مسائل فرعی نیز باید بررسی شوند. برای مثال، هنگام حل دستگاه (۲۱) عموماً باید روش‌های Aـ پایدار ترجیح داده شوند زیرا برخی از r_kهای مثبت می‌توانند بسیار بزرگ باشند و مسائل سرسخت را به‌وجود آورند.

یک پیامد غیرقابل اغماض این است که نمی‌توان یک قاعدهٔ کوادراتور پیدا کرد که (۱۸) را با توجه به تمام مقادیر مربوطهٔ t به‌طور یکنواخت تقریب بزند. به‌عبارت دیگر، قاعدهٔ کوادراتوری نمی‌توان یافت که دقت تقریب آن برای هر $t \geq t_1$ که در آن t_1 اولین نقطهٔ شبکه در سمت راست نقطهٔ آغازین t_0 است با دقت تقریب آن برای هر $t \geq t_0$ یکسان باشد، زیرا در هر دو حالت، تکینی در t_0 تقریب انتگرال را بسیار دشوار می‌سازد. برای غلبه بر این مشکل، چندین رویکرد مختلف پیشنهاد شده است.

در مجموعه‌ای از آثار پیشگام [۴۴، ۴۵، ۴۶]، که در آنها یک انتگرال مسیری مختلط

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{st} s^{-\alpha}\,\mathrm{d}s$$

برای تقریب هسته انتخاب می‌شود، بازهٔ انتگرال‌گیری $[t_0, T]$ به دنباله‌ای از زیربازه‌ها با طول‌های افزایشی تقسیم می‌شود، و روی هر کدام از این بازه‌ها قواعد انتگرال‌گیری مختلف (روی مسیرهای مختلف $\mathcal{C}$) استفاده می‌شود. گرچه با این روش می‌توان دقت بالایی به‌دست آورد، اما این راهبرد کاملاً پیچیده است و به استفاده از حساب مختلط گرانتر نیاز دارد.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

در مقاله‌های [۴۰، ۴۱، ۴۲]، انتگرال در (۷) برای $\delta t > 0$ ثابت، به عبارت‌های موضعی و سابقه تقسیم شده است

$$y(t) = y_0 + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t-\delta t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))\, \mathrm{d}\tau}_{\text{عبارت سابقه}} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta t}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))\, \mathrm{d}\tau}_{\text{عبارت موضعی}}$$

این امر تکینی هسته را به عبارت موضعی محدود می‌کند، که آن را می‌توان با روش‌های استاندارد برای معادلات انتگرال با تکینی ضعیف (مثلاً، قاعدهٔ انتگرال‌گیری حاصل‌ضرب) با کاهش هزینه محاسباتی و حافظهٔ مورد نیاز ناچیز، تقریب زد. هسته در عبارت سابقه دیگر شامل هیچ تکینیی نیست و می‌تواند به‌طور امن با (۱۹) که اکنون فقط برای $t > \delta t$ به‌کار می‌رود، تقریب شود.

برای دستیابی به بالاترین دقت ممکن، معمولاً قواعد کوادراتور گاوسی ترجیح داده می‌شود. تحلیل خطای بسیار دقیق و فنی برای تنظیم پارامترها به شیوه‌ای بهینه ضروری است. چندین رویکرد برای انجام این‌کار پیشنهاد شده است (برای مثال، [۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱] را ببینید) اما به‌دلیل ماهیت فنی آنها، مقایسه‌ای برای تصمیم‌گیری در مورد انتخاب مناسب‌ترین روش، دشوار است. در اینجا خواننده را به نتایج جالب ارائه شده در [۵۲] ارجاع می‌دهیم.

۷. برخی تبصره‌ها دربارهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی کسری

اگرچه این مقاله اساساً به حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی با مرتبهٔ کسری و بررسی محاسباتی عملگرهای مشتق و انتگرال مرتبط اختصاص یافته است، اما باید در مورد روش‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل جزئی کسری نیز چند توضیح ارائه شود.

تبصره ۱.۷. موضوعات مورد بحث در بخش ۴ به معادلات دیفرانسیل جزئی نیز مربوط می‌شوند. در واقع، در [۵۳] نشان داده شده است که تحمیل الزامات هموارای بیش از اندازه به جواب‌های یک معادله دیفرانسیل جزئی (مثلاً، به منظور ساده‌سازی تحلیل خطا یا برای به‌دست آوردن یک مرتبهٔ همگرایی بالاتر) دارای پیامدهای جدی در رابطه با ردهٔ مسائل مجاز است. به‌ویژه، انتخاب تابع سمت راست $f(x,t)$ در یک مسئله مقدار اولیه–مرزی خطی، شرط اولیه در آن مسئله را کاملاً معین می‌کند.

تبصره دوم در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی با جنبه‌ای کاملاً متفاوت سروکار دارد.

تبصره ۲.۷. الگوریتم‌های نوعی برای معادلات دیفرانسیل جزئی زمان–کسری شامل فنون گسسته‌سازی جداگانه نسبت به متغیر زمان و متغیر(های) مکان است. یک روند فعلی به‌کارگیری روشی با مرتبهٔ بسیار بالا برای گسسته‌سازی عملگر مشتق (غیرکسری) نسبت به متغیر(های) مکان است. اگرچه این روش در نگاه اول رویکردی جذاب به‌نظر می‌رسد، اما دارای معایب چندی است. به‌ویژه، با آنکه این‌کار به خطای گسسته‌سازی کوچکتر در متغیر(های) مکان منجر می‌شود، اما پیچیدگی کلی الگوریتم را نیز افزایش می‌دهد و درک ویژگی‌های آن را مشکلتر می‌سازد. اگر بتوان خطای کلی را به میزان قابل‌توجهی کاهش داد، این پیچیدگی قابل‌قبول خواهد بود. اما چون خطای کلی نه تنها شامل خطای گسسته‌سازی مکانی بلکه شامل سهم آن در تقریب زمان نیز می‌شود، از این‌رو برای کاهش خطای کلی، باید مولفهٔ اخیر را نیز به‌اجبار بسیار کوچک گرفت. همان‌طور که در بالا اشاره شد، نمی‌توان انتظار داشت که نسبت به این متغیر به مرتبهٔ همگرایی بالایی برسیم، بنابراین تنها راه رسیدن به این هدف، انتخاب اندازه گام زمانی بسیار کوچک (در مقایسه با اندازه شبکهٔ مکانی) است. از بخش ۶ نتیجه می‌گیریم که یک الگوریتم استاندارد با پیچیدگی بالاتر از خطی به یقین به زمان‌های اجرای غیرقابل‌قبول منجر می‌شود، و حتی اگر در گسسته‌سازی زمانی از روشی با پیچیدگی خطی یا تقریباً خطی استفاده شود، این الزام طول‌گام بسیار کوچک همچنان بر هزینه کلی زیاد دلالت دارد. بنابراین، استفاده از گسسته‌سازی مکانی مرتبه بالا در یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی زمان–کسری معمولاً توصیه نمی‌شود.

۸. نتیجه‌گیری نهایی

در این مقاله سعی شده است برخی موضوعات مربوط به استفاده درست از روش‌های عددی برای مسائل مرتبه کسری شرح داده شوند. برخلاف معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه صحیح، روش‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل کسری به‌طور کلی در دوره‌های کارشناسی آموزش داده نمی‌شود و اغلب، افراد غیرمتخصص از ویژگی‌ها و مشکلات عمده‌ای که در بحث عددی معادلات دیفرانسیل کسری و معادلات دیفرانسیل جزئی کسری بوجود می‌آید، بی‌اطلاع هستند.

در دسترس بودن تنها چند کتاب درسی و رساله به‌خوبی سازماندهی‌شده در این زمینه، همراه با نتایج نادرست بسیاری در نوشتجات، وضعیت را به مراتب دشوارتر می‌کند.

ما معتقدیم که جامعهٔ علمی باید با ترویج دوره‌های خاص دانشگاهی در سطح پایه و با سازماندهی مدارس آموزشی، در جهت ارتقاء سطح دانش در این زمینه تلاش کند.

۹. تشکر وقدردانی

از داوران محترم مقاله به‌خاطر مطالعه و بررسی این ترجمه و ارائه پیشنهادهای ارزنده، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مراجع

[1] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag: Berlin, 2010.

[2] A.A. Kilbas, H. M Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[3] F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial College Press, London, 2010.

[4] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

[5] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, CA, 1999.

[6] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon 1993.

[7] A. Young, Approximate product-integration, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.*, **224** (1954) 552–561.

[8] A. Young, The application of approximate product integration to the numerical solution of integral equations, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.*, **224** (1954) 561–573.

[9] K. Diethelm, N. J. Ford and A. D. Freed, A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, *Nonlinear Dyn.*, **29** (2002) 3–22.

[10] R. Garrappa, On linear stability of predictor-corrector algorithms for fractional differential equations, *Int. J. Comput. Math.*, **87** (2010) 2281–2290.

[11] Y. Yan, K. Pal and N. J. Ford, Higher order numerical methods for solving fractional differential equations, *BIT Numer. Math.*, **54** (2014) 555–584.

[12] Z. Li, Z. Liang and Y. Yan, High-order numerical methods for solving time fractional partial differential equations, *J. Sci. Comput.*, **71** (2017) 785–803.

[13] J. Dixon, On the order of the error in discretization methods for weakly singular second kind Volterra integral equations with nonsmooth solutions, *BIT Numer. Math.*, **25** (1985) 624–634.

[14] K. Diethelm, N. J. Ford and A. D. Freed, Detailed error analysis for a fractional Adams method, *Numer. Algorithms*, **36** (2004) 31–52.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

[15] K. B. Oldham and J. Spanier, *Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, New York, 1974.

[16] V. E. Lynch, B. A. Carreras, D. del Castillo-Negrete, K. M. Ferreira-Mejias and H. R. Hicks, Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order, *J. put. Phys.*, **192** (2003) 406–421.

[17] C. Lubich, Discretized fractional calculus, *SIAM J. Math. Anal.*, **17** (1986) 704–719.

[18] C. Lubich, Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52** (1988) 129–145.

[19] C. Lubich, Convolution quadrature and discretized operational calculus II, *Numer. Math.*, **52** (1988) 413–425.

[20] C. Lubich, Convolution quadrature revisited, *BIT*, **44** (2004) 503–514.

[21] R. Garrappa, Trapezoidal methods for fractional differential equations: theoretical and computational aspects, *Math. Comput. Simul.*, **110** (2015) 96–112.

[22] K. Diethelm, J. M. Ford, N. J. Ford and M. Weilbeer, Pitfalls in fast numerical solvers for fractional differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **186** (2006) 482–503.

[23] M. Stynes, *Singularities*, In Handbook of Fractional Calculus With Applications, De Gruyter, Berlin, **3** 2019 287–305.

[24] R. K. Miller and A. Feldstein, Smoothness of solutions of Volterra integral equations with weakly singular kernels, *SIAM J. Math. Anal.*, **2** (1971) 242–258.

[25] C. Lubich, Runge-Kutta theory for Volterra and Abel integral equations of the second kind, *Math. Comput.*, **41** (1983) 87–102.

[26] A. Hanyga, A comment on a controversial issue: A generalized fractional derivative cannot have a regular kernel, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **23** (2020) 211–223.

[27] A. Giusti, General fractional calculus and Prabhakar's theory, *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **83** (2019) 105–114.

[28] A. Hanyga, *Physically acceptable viscoelastic models*, Trends in applications of mathematics to mechanics, 125–136, Ber. Math., Shaker Verlag, Aachen, 2005.

[29] M. Stynes, E. O'Riordan, and J.L. Gracia, Necessary conditions for convergence of difference schemes for fractional-derivative two-point boundary value problems, *BIT*, **56** (2016) 1455–1477.

[30] S. Sarv Ahrabi and A. Momenzadeh, On failed methods of fractional differential equations: the case of multi-step generalized differential transform method, *Mediterr. J. Math.*, **15** (2018) pp. 149.

[31] R. Garrappa, Neglecting nonlocality leads to unreliable numerical methods for fractional differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **70** (2019) 302–306.

[32] W. H. Deng, Short memory principle and a predictor-corrector approach for fractional differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **206** (2007) 174–188.

[33] N. J. Ford and A. C. Simpson, The numerical solution of fractional differential equations: Speed versus accuracy, *Numer. Algorithms*, **26** (2001), 333–346.

[34] K. Diethelm and A. D. Freed, An Efficient Algorithm for the Evaluation of Convolution Integrals, *Comput. Math. Appl.*, **51** (2006) 51–72.

[35] E. Hairer, C. Lubich and M. Schlichte, Fast numerical solution of nonlinear Volterra convolution equations, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **6** (1985) 532–541.

[36] E. Hairer, C. Lubich and M. Schlichte, Fast numerical solution of weakly singular Volterra integral equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **23** (1988) 87–98.

[37] P. Henrici, Fast Fourier methods in computational complex analysis, *SIAM Rev.*, **21** (1979) 481–527.

[38] R. Garrappa, Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial, *Mathematics*, **6** (2018) pp. 16.

[39] R. Garrappa, *Mathworks Author's Profile*, 2020.

[40] D. Baffet, A Gauss-Jacobi kernel compression scheme for fractional differential equations, *J. Sci. Comput.*, **79** (2019) 227–248.

[41] D. Baffet and J. S. Hesthaven, A kernel compression scheme for fractional differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **55** (2017) 496–520.

[42] D. Baffet and J. S. Hesthaven, High-order accurate adaptive kernel compression time-stepping schemes for fractional differential equations, *J. Sci. Comput.*, **72** (2017) 1169–1195.

[43] K. Diethelm, An investigation of some nonclassical methods for the numerical approximation of Caputo-type fractional derivatives, *Numer. Algorithms*, **47** (2008) 361–90.

[44] M. López-Fernández, C. Lubich, and A. Schädle, *Adaptive, fast, and oblivious convolution in evolution equations with memory*, SIAM J. Sci. Comput., 30 (2008), pp. 1015–1037.

[45] *C. Lubich and A. Schädle,Fast convolution for nonreflecting boundary conditions, SIAM J. Sci. Comput.*, **24** (2002) 161–182.

[46] A. Schädle, M. López-Fernández and C. Lubich, Fast and oblivious convolution quadrature, *SIAM J. Sci. Comput.*, **28** (2006) 421–38.

[47] L. Banjai and M. López-Fernández, Efficient high order algorithms for fractional integrals and fractional differential equations, *Numer. Math.*, **141** (2019) 289–317.

[48] M. Fischer, Fast and parallel Runge-Kutta approximation of fractional evolution equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, **41** (2019) A927–A947.

[49] S. Jiang, J. Zhang, Q. Zhang, and Z. Zhang, Fast evaluation of the Caputo fractional derivative and its applications to fractional diffusion equations, *Commun. Comput. Phys.*, **21** (2017) 650–678.

[50] J. R. Li, A fast time stepping method for evaluating fractional integrals, *SIAM J. Sci. Comput.*, **31** (2010) 4696–4714.

[51] F. Zeng, I. Turner and K. Burrage, A stable fast time-stepping method for fractional integral and derivative operators, *J. Sci. Comput.*, **77** (2018) 283–307.

[52] L. Guo, F. Zeng, I. Turner, K. Burrage and G. E. M. Karniadakis, Efficient multistep methods for tempered fractional calculus: Algorithms and simulations, *SIAM J. Sci. Comput.*, **41** (2019) 2510–2535.

[53] M. Stynes, Too much regularity may force too much uniqueness, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **19** (2016) 1554–1562.

شاهرخ اسماعیلی
گروه ریاضی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران
sh.esmaeili@uok.ac.ir

شاهرخ اسماعیلی دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی را به‌ترتیب در سال‌های ۱۳۷۷ و ۱۳۷۹ در دانشگاه صنعتی امیرکبیر و دانشگاه تربیت مدرس به اتمام رساند و در سال ۱۳۸۶ وارد دورهٔ دکتری ریاضی کاربردی دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. وی از سال ۱۳۹۰ تاکنون در گروه ریاضی دانشگاه کردستان مشغول به‌کار است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130716.1471

Good (and not so good) practices in computational methods for fractional calculus

Kai Diethelm, Roberto Garrappa* and Martin Stynes
Translator: Shahrokh Esmaeili

Abstract: The solution of fractional-order differential problems requires in the majority of cases the use of some computational approach. In general, the numerical treatment of fractional differential equations is much more difficult than in the integer-order case, and very often non-specialist researchers are unaware of the specific difficulties. As a consequence, numerical methods are often applied in an incorrect way or unreliable methods are devised and proposed in the literature. In this paper we try to identify some common pitfalls in the use of numerical methods in fractional calculus, to explain their nature and to list some good practices that should be followed in order to obtain correct results.

Keywords: fractional differential equations; numerical methods; smoothness assumptions; persistent memory.

Shahrokh Esmaeili
Shahrokh Esmaeili: Shahrokh Esmaeili: Department of Mathematics, Kurdistan University, Sanandaj, Iran.
Email: sh.esmaeili@uok.ac.ir

Communicated by Soghra Nobakhtian.
Article Type: Translation.
Received: 2021/11/24, Accepted: 2022/01/03.
*Corresponding author.