ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۵، شماره ۴ (۱۳۹۹)، صص. ۱۲-۱
© ۱۴۰۰ دانشگاه اصفهان

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

مسئله ازدواج پایدار

جواد طیبی*، مرضیه فلاحت و ابوالفضل عبدالله‌زاده

چکیده. تخصیص پایدار نوعی مفهوم پایداری در جواب مسائل بهینه‌سازی است. با استفاده از این مفهوم می‌توان مسائل متنوعی از جمله مسئله ازدواج پایدار را مطرح کرد. این مسائل کاربردهای زیادی در جهان واقعی دارند تا جایی که مقاله‌ای با موضوع کاربردهای تخصیص پایدار در حوزه اقتصاد موفق به دریافت جایزه نوبلِ اقتصاد شده است. در این مقاله، مسئله ازدواج پایدار و چند مسئله مرتبط دیگر را که از مفهوم تخصیص پایدار استفاده می‌کنند معرفی و در مورد فرمول‌بندی و روش حل آن‌ها بحث می‌کنیم.

۱. مقدمه

جامعه‌ای را در نظر بگیرید که شامل n مرد و n زن است؛ مجموعه مردان را با $M = \{m_۱, m_۲, \ldots, m_n\}$ و مجموعه زنان را با $W = \{w_۱, w_۲, \ldots, w_n\}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید همه افراد این جامعه بخواهند ازدواج کنند و هریک برای ازدواج فهرستی از همه افراد جنس مخالف با ترتیب اولویت دارند. سوالات زیر در مورد این مسئله مطرح است

- هدف از حل این مسئله چیست؟
- آیا هرگونه تخصیص مردان به زنان می‌تواند جوابی مناسب تلقی شود؟

در پاسخ به این سوالات مفهوم «تخصیص پایدار[۱]» را به کار می‌بریم. بدین منظور ابتدا تعریف «زوج ناپایدار[۲]» را در یک تخصیص بیان می‌کنیم. فرض کنید در این جامعه به شیوه‌ای دلخواه مردان برای ازدواج به زنان تخصیص داده شده باشند. منظور از یک زوج ناپایدار در این تخصیص زوجی است که با هم نیستند؛ اما اگر با هم بودند هر دو رضایت بیشتری داشتند. به بیان دقیق‌تر، زوج $\{m_i, w_j\}$ در این تخصیص ناپایدار نامیده می‌شود اگر فرد m_i فرد w_j را بیشتر از زوج فعلی‌اش و w_j نیز m_i را بیشتر از زوج فعلی‌اش ترجیح دهد. اگر در تخصیص مورد نظر هیچ زوج ناپایداری وجود نداشته باشد، آن را یک تخصیص پایدار نامیم. این مسئله را «مسئله ازدواج پایدار[۳]» می‌نامند و هدف آن پیدا کردن یک تناظر یک‌به‌یک از مجموعه زنان به مجموعه مردان است به گونه‌ای که مفهوم پایداری برآورده شود. اجازه دهید با ذکر مثالی مفهوم پایداری را بیشتر توضیح دهیم.

عبارات و کلمات کلیدی: مسئله ازدواج پایدار، تخصیص پایدار، مسئله هم‌اتاقی، زوج ناپایدار
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای ولی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۱۰
نوع مقاله: ترویجی
* نویسنده مسئول

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127930.1420

[1]stable assignment [2]instable pair [3]stable marriage problem

جدول ۱: یک نمونه از مسئله ازدواج پایدار

شخص	m_1	m_2	w_1	w_2
فهرست اولویت‌های شخص	w_1 w_2	w_1 w_2	m_1 m_2	m_1 m_2

مثال ۱.۱. فرض کنید جامعه‌ای شامل ۲ مرد و ۲ زن و فهرست الویت‌های آن‌ها برای ازدواج به صورت جدول ۱ باشد. طبق اطلاعات داده‌شده، تخصیص $\{\{m_1, w_2\}, \{m_2, w_1\}\}$ پایدار نیست؛ زیرا m_1 و w_1 برای ازدواج یکدیگر را به زوج‌هایی که دارند ترجیح می‌دهند. از طرفی واضح است تخصیص $\{\{m_1, w_1\}, \{m_2, w_2\}\}$ پایدار است؛ زیرا هیچ‌یک از افراد، زوج دیگری را برای ازدواج ترجیح نمی‌دهند.

از این مثال دو سوال کلیدی در ذهن شکل می‌گیرد. اول این که آیا هر مسئله ازدواج پایدار دارای حداقل یک تخصیص پایدار است یا خیر؟ سوال دوم این است که در صورت وجود یک تخصیص پایدار چگونه می‌توان آن را به دست آورد؟ در بخش‌های بعد به این سوالات پاسخ خواهیم داد.

مفهوم تخصیص پایدار و همچنین مسئله ازدواج پایدار را اولین‌بار شاپلی[۴] در سال ۱۹۶۲ مطرح کرد [۸]. شاپلی ریاضیدانان و اقتصاددانان برجسته معاصراست و در زمینه اقتصاد ریاضی و به‌ویژه نظریه بازی‌ها تحقیقات مهمی انجام داده است. دو نکته برجسته در زندگی علمی وی به چشم می‌خورد. اولین مورد معرفی کمیتی به اسم ارزش شاپلی [۵] در زمینه بازی‌های همکارانه[۶] در سال ۱۹۵۱ است که امروزه در بیشتر کتاب‌های نظریه بازی‌ها به چشم می‌خورد [۴، ۹]. دومین مورد این است که او در سال ۲۰۱۲ به دلیل مطالعات و پژوهش‌های خود در زمینه «نظریه تخصیص‌های پایدار و اجرای طراحی بازار» برنده جایزه نوبل اقتصاد شد [۱۷]. این مطالعات کاربرد تخصیص پایدار در مسئله ازدواج پایدار را در علم اقتصاد تشریح می‌کند.

در این مقاله به معرفی و تشریح کامل مسئله ازدواج پایدار و انواع مختلف آن (ازجمله مسئله هم‌اتاقی) می‌پردازیم و الگوریتم‌هایی را برای حل این مسائل ارایه می‌کنیم. سازماندهی بخش‌های مقاله به شرح ذیل است. بخش ۲ به بیان فرمول‌بندی ریاضی از مسئله ازدواج پایدار می‌پردازد. بخش ۳ چندین توسیع از مسئله را معرفی می‌کند. بخش ۴ الگوریتم‌های حل مسئله ازدواج پایدار و مسئله هم‌اتاقی را تشریح می‌کند. بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۵ انجام می‌گیرد.

۲. فرمول‌بندی مسئله

در این بخش می‌خواهیم مسئله ازدواج پایدار را به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی کنیم. فرمول‌بندی ارائه شده این امکان را فراهم می‌آورد تا از روش‌های مشهوری همانند سیمپلکس استفاده کنیم و بتوانیم یک تخصیص پایدار از مسئله بیابیم.

یک نمونه دلخواه از مسئله ازدواج پایدار شامل مجموعه‌های M و W به‌ترتیب شامل n مرد و n زن را در نظر بگیرید. در این بخش به‌ازای هر مرد $m \in M$ یک رابطه ترتیب کلی $<_m$ را به صورت زیر روی مجموعه W تعریف می‌کنیم

$$(\forall w, w' \in W)\, w' <_m w \longleftrightarrow \text{مرد } m \text{ زن } w \text{ را بر } w' \text{ ترجیح می‌دهد}$$

[4]Shapley [5]Shapley value [6]cooperative games

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127930.1420

به طور مشابه می‌توان رابطه ترتیب $<_w$ را بر مجموعه M به‌ازای هر زن $w \in W$ تعریف کرد؛ این روابط ترتیب، همان فهرست اولویت‌های افراد از جنس مخالف را معین می‌کند.

به منظور فرمول‌بندی مسئله به‌ازای هر زوج مرتب $(m,w) \in M \times W$ یک متغیر تصمیم $x_{mw} \in \{۰,۱\}$ را تعریف می‌کنیم. چنانچه مقدار این متغیر برابر یک شود بدان معناست که مرد m با زن w ازدواج می‌کند و صفر بودن آن به معنای عدم ازدواج این زوج است. با این تعریف می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه ۱.۲ (لم ۱ در [۱۸]). *هر تخصیص پایدار* $\mathbf{x} = (x_{mw})_{n\times n}$ *در دستگاه نامعادلات*

$$\begin{cases} \sum_{w\in W} x_{mw} = ۱ & (m \in M) \\ \sum_{m\in M} x_{mw} = ۱ & (w \in W) \\ \sum_{m'\in M: m <_w m'} x_{m'w} + \sum_{w'\in W: w <_m w'} x_{mw'} + x_{mw} \geq ۱ & ((m,w) \in M \times W) \\ x_{mw} \geq ۰ & ((m,w) \in M \times W). \end{cases} \quad (۱)$$

صدق می‌کند. به‌علاوه، هر جواب از این دستگاه نامعادلات یک تخصیص پایدار است هرگاه هر مولفه آن برابر صفر یا یک باشد.

توجه کنید که اگر به جای شرط چهارم در دستگاه نامعادلات (۱) شرط $x_{mw} \in \{۰,۱\}$ را به‌ازای $(m,w) \in M\times W$ جایگزین کنیم، قضیه به‌صورت دو طرفه (اگر و تنها اگر) برقرار خواهد بود و می‌توان با حل دستگاه یک تخصیص پایدار به دست آورد؛ در عین حال این تغییر باعث می‌شود که دستگاه نامعادلات از حالت خطی (با متغیرهای پیوسته) خارج شود و نتوان آن‌را به سادگی حل کرد. خوشبختانه در قضیه ۱ از [۱۸] ثابت شده است که چند وجهی حاصل از این دستگاه دارای نقاط راسی (گوشه‌ای) با مختصات صحیح است. پس هر جواب پایه‌ای از این دستگاه لزوما شرط صحیح بودن را برای مجهولات برآورده می‌کند (برای اطلاع بیشتر به فصل یازدهم از [۱] مراجعه نمایید). بنابراین می‌توان نتیجه زیر را به دست آورد.

نتیجه ۲.۲. *هر جواب پایه‌ای بهینه از مسئله برنامه‌ریزی خطی*

$$\begin{aligned} LP(\mathbf{c}): \quad & \max \sum_{m\in M}\sum_{w\in W} c_{mw}x_{mw} \\ & \text{s.t.}(۱), \end{aligned}$$

به ازای هر بردار ضرایب تابع هدف $\mathbf{c}$ *یک تخصیص پایدار است.*

بر اساس نتیجه ۲.۲ می‌توان تخصیص‌های پایدار مختلف را با تغییر بردار ضرایب $\mathbf{c}$ به دست آورد. در عمل این بردار می‌تواند مثلا بیانگر روابط اجتماعی بین مردان و زنان باشد؛ پس می‌توان با مشخص کردن آن به تخصیص‌های پایداری رسید که دارای حداکثر روابط اجتماعی‌اند. توجه به این نکته الزامی است که تنها جواب‌های پایه‌ای بهینه را می‌توان تخصیص‌های پایدار در نظر گرفت و لزوما جواب‌های غیرپایه‌ای شرط صفر و یک بودن متغیرها را ایجاب نمی‌کنند. بنابراین برای حل این مسئله برنامه‌ریزی خطی بایستی فقط از روش‌هایی همانند روش سیمپلکس استفاده کنیم؛ زیرا جواب بهینه را فقط در بین جواب‌های پایه‌ای جستجو می‌کند و نمی‌توان از روش‌هایی همانند روش‌های نقطه درونی که دارای پیچیدگی زمانی کمتری‌اند استفاده کرد.

هرچند نتیجه ۲.۲ این امکان را فراهم می‌آورد که بتوان از روش سیمپلکس استفاده کرده و تخصیصی پایدار از مسئله ازدواج پایدار به دست آورد، از آنجا که روش سیمپلکس الگوریتمی با پیچیدگی زمانی بالاست [۱۰]، بهتر است به ارائه الگوریتم‌هایی بپردازیم که بتواند مسئله را در زمان کوتاه‌تری حل کند. این کار را در بخش ۴ انجام می‌دهیم.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127930.1420

۳. توسیع‌های مسئله ازدواج پایدار

با توجه به بخش قبل مسئله ازدواج پایدار از ساختار نظری قابل توجهی برخوردار است. این ساختار باعث می‌شود که بتوان آن را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل و حل کرد. با وجود این، مسئله به دلیل شکل خاصش به‌ندرت در کاربردهای واقعی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در این بخش به بیان چند توسیع مهم از این مسئله می‌پردازیم که می‌توان آن‌ها را در موقعیت‌های عملی مختلف به کار برد.

۱.۳. مسئله پذیرش مدارس. در اواخر قرن بیستم و اوایل قرن بیست و یکم، هر ساله ۷۵۰۰۰ دانش‌آموز کلاس هشتم شهر نیویورک برای پذیرش در یکی از ۴۲۶ دبیرستان دولتی این شهر اقدام می‌کردند. در این روند پذیرش، هر دانش‌آموز بر اساس اولویت خود ۵ مدرسه را انتخاب می‌کرد. اولویت‌ها به مدارس ارسال می‌شد و مدیران مدارس تصمیم می‌گرفتند که کدام‌یک از متقاضیان را قبول و یا در فهرست ذخیره قرار دهند. پس از بررسی درخواست‌ها، دانش‌آموزان از وضعیت خود مطلع و مجاز به انتخاب یک مدرسه برای ثبت‌نام می‌شدند. سپس اگر ظرفیت خالی وجود داشت، مدارس برای پر کردن این ظرفیت‌ها اولویت‌ها را برای دور دوم یا سوم بررسی می‌کردند.

این روند پذیرش معایب بسیاری داشت. در پایان دور سوم بررسی اولویت‌های دانش‌آموزان، تقریبا نیمی از دانش‌آموزان که معمولا دانش‌آموزان با عملکرد پایین بودند، در هیچ مدرسه‌ای پذیرفته نمی‌شدند. بسیاری از این دانش‌آموزان در تابستان منتظر می‌ماندند تا شاید در مدرسه‌ای که جزء انتخاب آن‌ها نیست، پذیرفته شوند. همچنین این روند پذیرش سبب شد که بسیاری از دانش‌آموزان و والدین به جای علاقه‌مندی ترجیح دهند اولویت‌های خود را بر اساس احتمال پذیرش تنظیم کنند. از طرف دیگر، برای رضایت‌مندی دانش‌آموزان، مدارس معمولا ظرفیت خود را کم اعلام می‌کردند. در نتیجه بی‌اعتمادی گسترده‌ای در نتایج نهایی این روند پذیرش وجود داشت. برای حل این مشکلات در سال ۲۰۰۴ پژوهشگران روشی برای پذیرش پیشنهاد دادند تا بیشتر دانش‌آموزان در اولین اولویت خود پذیرفته شوند و نتیجه پذیرش‌ها برای آن‌ها رضایت‌بخش باشد [۱۹]. ایده کلی روش جدید بر اساس مفهوم پایداری است. مسئله بیان‌شده را مسئله پذیرش مدارس می‌نامیم. در حل این مسئله با توجه به شرایط ذکر شده بازهم به دنبال یافتن یک تخصیص پایدار هستیم. پس این مسئله یک توسیع از مسئله ازدواج پایدار است با این تفاوت که

- هر مدرسه می‌تواند چندین نفر را پذیرش کند. بنابراین در این مسئله با یک تخصیص چندبه‌یک روبه‌رو هستیم.
- اولویت‌های دانش‌آموزان شامل همه مدارس نیست؛ بلکه فقط تعداد محدودی از مدارس را می‌توان در فهرست قرار داد.
- مدارس دارای فهرست اولویت مشخصی برای همه دانش‌آموزان از ابتدا نیستند؛ بلکه فقط هر مدرسه دانش‌آموزان متقاضی خود را اولویت‌بندی می‌کند.

علی‌رغم این که مسئله پذیرش مدارس حالت کلی‌تری از مسئله ازدواج پایدار است، خوشبختانه این مسئله از نظر ساختاری شبیه به مسئله ازدواج پایدار است.مثلا، اگر مدارس اولویت‌های خود را از همه دانش‌آموزان بر اساس معیارهای قابل سنجشی مثل معدل، نمرات دروس تخصصی، و غیره آماده کنند، فرمول‌بندی (۱) ارائه‌شده در بخش قبل با یک تغییر جزئی در اعداد سمت راست شرط اول در (۱) می‌تواند برای این مسئله نیز مورد استفاده قرار گیرد. به‌علاوه، الگوریتم حلی را که در بخش بعد برای مسئله ازدواج پایدار تشریح خواهیم کرد، نیز می‌توان با کمی تغییر برای حل این مسئله به کار برد.

۲.۳. مسئله هم‌اتاقی. اگر بخواهیم با استفاده از مفاهیم نظریه گراف مسئله ازدواج پایدار را به‌صورت بصری نمایش دهیم، کافی است به‌ازای هر مرد یک راس و به‌ازای هر زن راسی دیگر را در نظر بگیریم. هر یال از این گراف

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127930.1420

جدول ۲: یک نمونه از مسئله هم‌اتاقی (فاقد جواب)

	اولویت اول	اولویت دوم	اولویت سوم
شخص ۱	۳	۲	۴
شخص ۲	۳	۴	۱
شخص ۳	۴	۲	۱
شخص ۴	۲	۳	۱

از یک مرد $m \in M$ به یک زن $w \in W$ کشیده می‌شود. وزن هر یال را می‌توان یک زوج مرتب در نظر گرفت که مولفه اول درجه اولویت مرد نسبت به زن و مولفه دوم درجه اولویت زن نسبت به مرد را نشان می‌دهد. قابل توجه است که در این طریقه نمایش با یک گراف دوبخشی کامل [۷] مواجه می‌شویم که مجموعه راس‌های بخش اول آن همان M و مجموعه راس‌های بخش دیگر W خواهد بود. به صورت تعمیمی از مسئله ازدواج پایدار می‌توان حالتی را در نظر گرفت که گراف زمینه دوبخشی نباشد. در این صورت مسئله جدیدی به نام مسئله هم‌اتاقی [۸] حاصل می‌شود که روی یک گراف کامل تعریف می‌شود [۱۲]. در ادامه در قالب یک کاربرد به تشریح این مسئله می‌پردازیم.

یک دانشگاه برای اسکان دانشجویان پسر مجهز به یک خوابگاه است که دارای k اتاق دو نفره است. این دانشگاه می‌خواهد $n = ۲k$ پسر را به این اتاق‌ها تخصیص دهد. بدین منظور هر پسر یک فهرستِ اولویت از $n - ۱$ پسر دیگر را به دانشگاه تحویل می‌دهد و بر اساس آن دانشگاه اتاق هر فرد را مشخص می‌کند. هدف از حل این مسئله به دست آوردن جفت‌های هم‌اتاقی از پسرها است به طوری که تخصیص حاصل پایدار باشد؛ یعنی هیچ دو پسری وجود نداشته باشند که هم‌دیگر را به هم‌اتاقی انتخاب شده خود ترجیح دهند.

در بخش بعد با ارائه الگوریتمی ثابت می‌کنیم که هر نمونه از مسئله ازدواج پایدار دارای حداقل یک تخصیص پایدار است. برخلاف این مسئله، ممکن است مسئله هم‌اتاقی دارای هیچ جوابی نباشد؛ یعنی نتوان هیچ تخصیص پایداری در آن یافت. برای نمونه به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۳. یک نمونه از مسئله هم‌اتاقی شامل ۴ نفر را در نظر بگیرید. جدول ۲.۳ اولویت‌های این افراد را نشان می‌دهد. در این مثال فقط سه تخصیص مختلف وجود دارد که می‌توان به سادگی مشاهده کرد که هیچ‌یک از آن‌ها پایدار نیست.

الگوریتم‌هایی برای به دست آوردن جواب و یا تشخیص عدم وجود جواب برای مسئله هم‌اتاقی ارائه شده است که در بخش بعد به بیان یکی از آن‌ها می‌پردازیم.

۳.۳. مسئله با اولویت‌های یکسان. یک تعمیم دیگر از مسئله ازدواج پایدار حالتی است که برای هر فرد، امکان انتخاب تمایلات برابر نسبت به چند نفر وجود داشته باشد. این حالت را مسئله ازدواج پایدار با اولویت‌های یکسان می‌نامیم [۱۳، ۱۶]. در این حالت، می‌توان مفهوم پایداری را به دو صورت مختلف (پایداری ضعیف، پایداری قوی) بیان کرد. در پایداری ضعیف باز هم همان نتیجه مسئله ازدواج پایدار کلاسیک (که بیان می‌کند همواره یک جواب برای مسئله موجود است) برقرار است. اما در مورد پایداری قوی ممکن است مسئله دارای جواب نباشد. در [۱۳] برای بررسی وجود و به دست آوردن یک جواب پایدار قوی یک الگوریتم زمان‌چندجمله‌ای ارائه شده است.

[7]complete bipartite graph [8]roommate problem

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127930.1420

۴. الگوریتم‌های حل

در این بخش الگوریتم‌هایی را برای به دست آوردن جواب مسئله ازدواج پایدار و مسئله هم‌اتاقی بیان می‌کنیم و در هر مورد با استفاده از یک مثال عددی به تشریح الگوریتم ارائه شده می‌پردازیم.

۱.۴. الگوریتم مسئله ازدواج. گیل و شاپلی در مقاله مشهور خود الگوریتمی را برای حل مسئله ازدواج پایدار معرفی کردند [۸]. ایده اصلی این الگوریتم، استفاده از رویکرد پذیرش معوق [9] است. در ادامه به تشریح این الگوریتم می‌پردازیم.

الگوریتم ۱.۴.

گام ۱: در آغاز همه زنان و مردان مجردند.

گام ۲: تا زمانی که مرد مجردی وجود دارد که به خواستگاری همه زنان نرفته است، اعمال زیر را انجام بده:

(۱) فرض کنید m چنین مردی مجردی است.

(۲) فرض کنید w بالاترین زن در فهرست اولویت m باشد که m هنوز به خواستگاری وی نرفته است.

(۳) اگر w مجرد است، زوج (m, w) ایجاد می‌شود. در غیر این صورت، w با مردی قبلا ازدواج کرده است و یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: w همسر کنونی خود را به m ترجیح می‌دهد و پیشنهاد m را رد می‌کند. در نتیجه m مجرد باقی می‌ماند.

حالت دوم: w، m را به همسر کنونی خود ترجیح می‌دهد و پیشنهاد m را قبول می‌کند. در این حالت زوج جدید (m, w) ایجاد می‌شود و همسر قبلی w مجرد می‌شود.

گام ۳: فرض کنید S مجموعه زوج‌های موجود در انتهای حلقه بالا باشد. S را به عنوان جواب گزارش کن.

مثال ۲.۴. فرض کنید $W = \{w_۱, w_۲, w_۳, w_۴\}$ و $M = \{m_۱, m_۲, m_۳, m_۴\}$ دو مجموعه مجزا به‌ترتیب از زن‌ها و مردها باشند. فهرست اولویت هریک از مردان و زنان را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} m_۱ &= \{w_۱, w_۲, w_۳, w_۴\}, & m_۲ &= \{w_۱, w_۴, w_۳, w_۲\}, \\ m_۳ &= \{w_۲, w_۱, w_۳, w_۴\}, & m_۴ &= \{w_۴, w_۲, w_۳, w_۱\}, \\ w_۱ &= \{m_۴, m_۳, m_۱, m_۲\}, & w_۲ &= \{m_۲, m_۴, m_۱, m_۳\}, \\ w_۳ &= \{m_۴, m_۱, m_۲, m_۳\}, & w_۴ &= \{m_۳, m_۲, m_۱, m_۴\}. \end{aligned}$$

سه تکرار اول الگوریتم فوق برای حل این مثال به شرح زیر است

تکرار ۱: هر مرد به اولین زن در فهرست اولویت خود پیشنهاد ازدواج می‌دهد. در این صورت $m_۱$ به $w_۱$، $m_۲$ به $w_۱$، $m_۳$ به $w_۲$ و $m_۴$ به $w_۴$ پیشنهاد می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم $w_۱$ دو پیشنهاد ازدواج از $m_۱$ و $m_۲$ دارد. $w_۱$، $m_۱$ را با توجه به فهرست اولویتش برای ازدواج انتخاب می‌کند. در این تکرار زوج‌های $(m_۱, w_۱)$، $(m_۳, w_۲)$ و $(m_۴, w_۴)$حاصل می‌شود.

---
[9] deferred acceptance approach

تکرار ۲: مرد $m_۲$ مجرد است و پیشنهاد ازدواجش به $w_۱$ رد شده است. پس $m_۲$ به دومین زن در فهرست اولویت خود یعنی $w_۲$ پیشنهاد می‌دهد. در این صورت $w_۴$ دو پیشنهاد از $m_۲$ و $m_۴$ دریافت کرده است. طبق فهرست اولویت $w_۴$، $m_۲$ را برای ازدواج انتخاب می‌کند و زوج $(m_۲, w_۴)$ حاصل می‌شود.

تکرار ۳: مرد $m_۴$ مجرد است و پیشنهاد ازدواجش به $w_۴$ رد شده است. پس $m_۴$ به دومین زن در فهرست اولویت خود یعنی $w_۲$ پیشنهاد می‌دهد. در این صورت $w_۲$ دو پیشنهاد از $m_۴$ و $m_۳$ دریافت می‌کند. طبق فهرست اولویت $w_۲$، $m_۴$ را برای ازدواج انتخاب می‌کند و زوج $(m_۴, w_۲)$ حاصل می‌شود.

به طور مشابه می‌توان تکرارهای بعد الگوریتم را انجام داد. پس از شش تکرار جواب پایدار زیر برای مسئله به دست می‌آید:

$$S = \{(m_۱, w_۳), (m_۲, w_۴), (m_۳, w_۱), (m_۴, w_۲)\}.$$

تبصره ۳.۴. در الگوریتم ۱.۴ مشاهدات زیر به سادگی نتیجه می‌شود:

- در این الگوریتم فقط مردها به زن‌ها پیشنهاد ازدواج می‌دهند و همچنین یک مرد نمی‌تواند بیش از یک‌بار به یک زن پیشنهاد ازدواج بدهد.
- زن w از زمانی‌که برای اولین‌بار یک نامزد انتخاب می‌کند تا انتهای الگوریتم به وضعیت مجرد باز نمی‌گردد.
- دنباله نامزدهای w در طول الگوریتم بهتر و بهتر می‌شوند.
- دنباله زنانی که m به آن‌ها پیشنهاد ازدواج می‌دهد در طول الگوریتم بدتر و بدتر می‌شوند.

لم ۴.۴. (۱) *حلقه اصلی الگوریتم ۱.۴ (مرحله ۲) حداکثر $n^۲$ بار اجرا می‌شود.*

(۲) *اگر مردی در یک تکرار از الگوریتم مجرد باشد، آنگاه حتما زنی وجود دارد که آن مرد به او هنوز پیشنهاد ازدواج نداده است.*

اثبات. (۱). n مرد داریم و هر مرد حداکثر به n زن پیشنهاد ازدواج می‌دهد. پس حلقه اصلی حداکثر $n^۲$ بار اجرا می‌شود.

(۲). فرض کنید که مردی مجرد وجود دارد که به همه زن‌ها پیشنهاد ازدواج داده باشد. بنابه تبصره ۳.۴ در این وضعیت همه زنان باید متاهل باشند؛اما با توجه به برابری تعداد مردان و زنان این امکان‌پذیر نیست. □

قضیه ۵.۴. *جواب حاصل از الگوریتم ۱.۴ یک تخصیص پایدار است.*

اثبات. به برهان خلف فرض کنید که خروجی الگوریتم یک تخصیص پایدار نباشد؛ یعنی زوج‌های (m, w) و (m', w') در S وجود داشته باشند به طوری که

- m، w' را به w ترجیح دهد.
- w'، m را به m' ترجیح دهد.

به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که آخرین پیشنهاد ازدواج m به w بوده است. حال این سوال پیش می‌آید که آیا قبل از تشکیل زوج (m, w) آیا m به خواستگاری w' رفته است یا نه. چون m، w' را به w ترجیح می‌دهد پس باید قبل از w به w' پیشنهاد ازدواج داده باشد. پس فرض می‌کنیم m به w' پیشنهاد ازدواج داده باشد. حتما پیشنهاد m رد شده است و w' در ازدواج با مردی بوده که او را به m ترجیح داده است. طبق قسمت سوم از تبصره ۳.۴ نامزدهای هر زن رفته‌رفته بهتر می‌شوند پس همسر نهایی w' یعنی m' باید از نظر w' بهتر از m باشد. اما این با فرض خلف مبنی بر ناپایدار بودن ازدواج در تناقض است. □

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127930.1420

در ادامه این بخش به اثبات این نکته مهم می‌پردازیم که جواب حاصل از الگوریتم ۱.۴ کاملا به نفع مردان است.

تعریف ۶.۴. اگر زوج (m, w) در یک تخصیص پایدار موجود باشد، آنگاه گوییم w یک شریک معتبر برای m است. به طور مشابه، m یک شریک معتبر برای w نامیده می‌شود. زنی با بالاترین الویت از بین همه شریکان معتبر مرد m را با $\mathrm{best}(m)$ نمایش داده و وی را بهترین شریک m نامیم.

قضیه ۷.۴. *در انتهای الگوریتم ۱.۴ هر مرد با بهترین شریک خود ازدواج کرده است.*

اثبات. به برهان خلف فرض کنید در انتهای الگوریتم یک مرد m وجود دارد که با $\mathrm{best}(m)$ خود ازدواج نکرده است. فرض کنید $w = \mathrm{best}(m)$. چون مردان به ترتیب علاقه از خوب به بد پیشنهاد ازدواج می‌دهند، پس حتما زمانی m توسط w رد شده است. می‌توانیم فرض کنیم که این اولین باری است که یک شریک معتبر جواب رد می‌دهد. پس m اولین مردی است که توسط یک شریک معتبر خود در اجرای الگوریتم رد شده است. فرض کنید wمرد m' را به m ترجیح داده است.

از طرف دیگر چون w یک شریک معتبر برای m است پس یک ازدواج پایدار وجود دارد که شامل (m, w) می‌باشد. این ازدواج پایدار را با S' در نظر می‌گیریم. در این ازدواج پایدار فرض می‌کنیم m' با w' ازدواج کرده است. پس S' شامل دو زوج (m, w) و (m', w') است. چون فرض کردیم در طول اجرای الگوریتم m اولین مردی است که توسط یک شریک معتبر رد می‌شود پس هنگامی که m' با w ازدواج می‌کند، هنوز توسط شریک معتبری رد نشده است. چون S' پایدار است باید w' یک شریک معتبر برای m' باشد. از این نتیجه می‌شود که m'، w را به w' ترجیح داده است. بنابراین طبق دو حالت بیان شده، S' ناپایدار است. این در تناقض با فرض پایدار بودن S' است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

□

نتیجه ۸.۴. *به‌طورمشابه، می‌توان نشان داد که در پایان الگوریتم هر زن با بدترین شریک معتبر خود ازدواج کرده است.*

۲.۴. الگوریتم مسئله هم‌اتاقی. همان‌طورکه در بخش قبل بیان کردیم، مسئله هم‌اتاقی حالتی از مسئله ازدواج پایدار است که در آن گراف زمینه گرافی کامل است. الگوریتم‌هایی برای به دست آوردن جواب پایدار و یا تشخیص عدم وجود جواب از مسئله هم‌اتاقی ارائه شده است. در اینجا به بیان یک الگوریتم دو مرحله‌ای که ایروینگ[۱۰] در سال ۱۹۸۵ طراحی کرده است می‌پردازیم [۱۲]. توصیف این الگوریتم به صورت زیر است.

الگوریتم ۹.۴. یک الگوریتم دو مرحله‌ای برای حل مسئله هم‌اتاقی

مرحله اول: در آغاز تمام پسرها تنها هستند. تا زمانی‌که پسر تنها وجود دارد، اعمال زیر را انجام دهید:

(۱) فرض کنید p چنین پسری باشد.

(۲) فرض کنید q اولین پسر در فهرست اولویت p باشد. p به q پیشنهاد می‌دهد. در این صورت یکی از دو حالات زیر رخ می‌دهد:

(آ) q پیشنهاد p را رد می‌کند هرگاه او یک پیشنهاد بهتر در فهرست خود داشته باشد.

(ب) q پیشنهاد p را قبول می‌کند. در این صورت، تمام افراد بعد از p از فهرست اولویت q حذف می‌شوند. همچنین از فهرست اولویت فرد حذف‌شده q نیز حذف می‌شود.

(۳) به همین صورت، هر پسر تنهای p به افراد فهرست اولویت خود پیشنهاد می‌دهد و این فرآیند تا جایی ادامه می‌یابد که پیشنهاد p پذیرفته شود. در پایان مرحله اول سه حالت زیر امکان‌پذیر است:

[10] Irving

(آ) تمام پسرها با هم جفت شده‌اند که در این صورت جواب یکتا است.
(ب) یک نفر وجود دارد که پیشنهاد او توسط تمام افراد رد شده است که در این صورت جواب پایدار وجود ندارد.
(ج) اگر فهرست اولویتی وجود دارد که شامل بیش از یک نفر است، مرحله ۲ الگوریتم اجرا می‌شود.

مرحله دوم: این مرحله شامل یک مجموعه از فهرست‌های کاهش یافته است. تا زمانی که فهرست کاهش‌یافته خالی وجود ندارد و طول حداقل یک فهرست بیشتر از ۱ است اعمال زیر تکرار می‌شود:

(۱) پسر p_i را که فهرست کاهش یافته وی بیش از یک عنصر دارد، انتخاب می‌کنیم.
(۲) q_i را دومین پسر در فهرست p_i و p_{i+1} را آخرین پسر در فهرست q_i در نظر می‌گیریم.
(۳) گام قبل را به ازای پسر p_{i+1} تا زمانی که افراد q_i و p_{i+1} تکراری از مراحل باشند و اصطلاحا یک دور به وجود آید، ادامه می‌دهیم.
(۴) پس از توقف، با افراد p_{i+1} دنباله‌ای به صورت $a_1, a_2, \dots, a_r$ را می‌سازیم.
(۵) حال دومین پسر در فهرست a_1 باید درخواست a_1 را رد کند، دومین پسر در فهرست a_2 باید درخواست a_2 را رد کند و به همین ترتیب حذفیات را انجام می‌دهیم.

اکنون روند الگوریتم ارائه‌شده را با مثالی تشریح می‌کنیم.

مثال ۱۰.۴. مسئله هم‌اتاقی شامل ۶ پسر را در نظر بگیرید. فرض کنید فهرست اولویت افراد به صورت جدول ۳ باشد. هر فرد مطابق فهرست اولویت خود به بقیه پیشنهاد می‌دهد. فرض کنید $\rightarrow$ بیانگر پیشنهاد و $\nrightarrow$ بیانگر رد پیشنهاد باشد. در این صورت داریم

$$۱ \rightarrow ۲,\ (۲,۱)$$
$$۲ \rightarrow ۳,\ (۳,۲)$$
$$۴ \rightarrow ۱,\ (۱,۴)$$
$$۵ \rightarrow ۱,\ (۱,۵),\ ۱ \nrightarrow ۴$$
$$۴ \rightarrow ۳,\ (۳,۴),\ ۳ \nrightarrow ۲$$
$$۲ \rightarrow ۶,\ (۶,۲)$$
$$۳ \rightarrow ۵,\ (۵,۳)$$
$$۳ \rightarrow ۴,\ (۴,۳)$$
$$۶ \rightarrow ۱,\ ۱ \nrightarrow ۶$$
$$۶ \rightarrow ۵,\ (۵,۶)$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127930.1420

جدول ۳: نمونه‌ای از مسئله هم‌اتاقی

اولویت	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
۱	۲	۳	۵	۴	۶
۲	۳	۶	۵	۴	۱
۳	۵	۴	۱	۲	۶
۴	۱	۳	۲	۵	۶
۵	۱	۲	۶	۳	۴
۶	۱	۵	۴	۳	۲

با حذف حالات ممکن فهرست‌های کاهش‌یافته به صورت زیر به دست می‌آیند

$$
\begin{aligned}
&۱ : ۵, ۲\\
&۲ : ۶, ۵, ۱\\
&۳ : ۴\\
&۴ : ۳\\
&۵ : ۱, ۲, ۶\\
&۶ : ۲, ۵
\end{aligned}
$$

اکنون پسر ۲ را که فهرست کاهش‌یافته وی شامل بیش از یک نفر است در نظر می‌گیریم ($p_۱ = ۲$). طبق الگوریتم داریم

$$q_۱ = ۵, \quad p_۲ = ۶, \quad q_۲ = ۲, \quad p_۳ = ۱, \quad q_۳ = ۵, \quad p_۴ = ۶.$$

با توجه به اینکه یک دور به وجود آمده است داریم: $a_۱ = ۶$ و $a_۲ = ۱$. حال دومین فرد در فهرست $a_۱$ باید پیشنهاد $a_۱$ را رد کند و هم‌چنین دومین فرد در فهرست $a_۲$ باید پیشنهاد $a_۲$ را رد کند. یعنی ۵ باید پیشنهاد ۶ را رد کند و ۲ باید پیشنهاد ۱ را رد کند. بنابراین زوج‌های هم‌اتاقی $(۴, ۳)$، $(۲, ۶)$ و $(۱, ۵)$ به دست می‌آید.

قضیه ۱۱.۴ ([۱۲]). *الگوریتم ۹.۴ به‌درستی مسئله هم‌اتاقی را در زمان چندجمله‌ای حل می‌کند.*

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به معرفی مفهوم پایداری در مسائل تخصیص پرداختیم و چندین مسئله مختلف از جمله مسائل ازدواج پایدار و هم‌اتاقی را مطرح کردیم. سپس الگوریتم‌هایی را تشریح کردیم که می‌تواند مسائل ازدواج پایدار و هم‌اتاقی را در زمان چندجمله‌ای حل نماید. به طور خلاصه، نتایج ارائه‌شده نشان می‌دهد که مسئله ازدواج پایدار همواره دارای جواب است؛ اما مسئله هم‌اتاقی ممکن است دارای جواب نباشد.

اگرچه در این مقاله فقط بحث‌های مقدماتی از موضوع تشریح گردید، در سال‌های اخیر محققان درباره این موضوع تحقیقات متنوعی انجام داده‌اند. برای مثال، یک توسیع طبیعی از مسئله ازدواج پایدار حالتی است که تخصیص برخی زوجین ممنوع و یا اجباری باشد؛ مقاله [۶] در این خصوص نتایج نظری قابل توجهی دارد. ازجمله گسترش‌های دیگر این مسئله حالتی است که فهرست اولویت افراد دارای عدم قطعیت است. مقاله [۲] سه نوع مدل غیرقطعی در این زمینه

را معرفی و رویکردهای حل آن‌ها را تشریح می‌کند. برای آشنایی با برخی تحقیقات دیگر در این زمینه، خواننده علاقه‌مند را به مقالات [۱۴، ۳، ۱۵] ارجاع می‌دهیم. برای کاربردهای اخیر این مسائل نیز خواننده را به مقالات [۵، ۱۱] درباره کاربردهای اقتصادی و مقاله [۷] درخصوص کاربردهای پیش‌بینی شبکه‌های اجتماعی ارجاع می‌دهیم.

مراجع

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti and J. B. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, New York, 1988.

[2] H. Aziz, P. Biró, S. Gaspers, R. de Haan, N. Mattei and B. Rastegari, Stable matching with uncertain linear preferences, *Algorithmica*, **82** (2020) 1410–1433.

[3] S. Bikhchandani, Stability with one-sided incomplete information, *Journal of Economic Theory*, **168** (2017) 372–399.

[4] G. Chalkiadakis, E. Elkind and M. Wooldridge, *Computational Aspects of Cooperative Game Theory*, Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning, Morgan & Claypool Publishers, Williston, 2011.

[5] Y. K. Che, J. Kim and F. Kojima, Stable matching in large economies, *Econometrica*, **87** (2019) 65–110.

[6] A. Cseh and K. Heeger, The stable marriage problem with ties and restricted edges, *Discrete Optim.*, **36** (2020).

[7] K. Dong, Z. Qin and T. Wan, *Many-to-One Stable Matching for Prediction in Social Networks*, in International Conference on Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems, Springer, New York, 2020, 345–356.

[8] D. Gale and L. S. Shapley, College admissions and the stability of marriage, *Amer. Math. Monthly*, **69** (1962) 9–15.

[9] R. P. Gilles, *The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies*, Springer, New York, 2010.

[10] D. Goldfarb, *On the complexity of the simplex method*, in Advances in Optimization and Numerical Analysis, S. Gomez and J. P. Hennart, eds., Springer, Dordrecht, 1994, 25–38.

[11] M. Greinecker and C. Kah, Pairwise stable matching in large economies, *Econometrica* (to appear).

[12] R. W. Irving, An efficient algorithm for the “stable roommates” problem, *J. Algorithms*, **6** (1985) 577–595.

[13] R. W. Irving, Stable marriage and indifference, *Discrete Appl. Math.*, **48** (1994) 261–272.

[14] C. K. Lam, *Algorithms for stable matching with indifferences*, Doctoral dissertation, The University of Texas at Austin, 2019.

[15] Q. Liu, G. J. Mailath, A. Postlewaite and L. Samuelson, Stable matching with incomplete information, *Econometrica*, **82** (2014) 541–587.

[16] D. F. Manlove, The structure of stable marriage with indifference, *Discrete Appl. Math.*, **122** (2002) 167–181.

[17] J. Masso, The theory of stable allocations and the practice of market design, The Nobel Prize in Economics 2012 for Alvin E. Roth and Lloyd S. Shapley, *Contributions to Science*, **11** (2015) 103–112.

[18] U. G. Rothblum, Characterization of stable matchings as extreme points of a polytope, *Math. Program.*, **54** (1992) 57–67.

[19] T. Tullis, *How game theory helped improve New York City’s high school application process*, The New York Times, 2014.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127930.1420

جواد طیبی
گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی کامپیوتر و صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران
javadtayyebi@birjandut.ac.ir

جواد طیبی در سال ۱۳۶۴ متولد شد. وی مقطع کارشناسی خود را در رشته ریاضی در دانشگاه بیرجند در سال ۱۳۸۶ به پایان رسانید و مقطع کارشناسی ارشد خود را در رشته ریاضی کاربردی در دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۸۸ با موفقیت به اتمام رساند. او تحصیلات خود را در مقطع دکتری در دانشگاه بیرجند ادامه داد و در سال ۱۳۹۴ از پایان نامه دکتری خود در زمینه مسائل جریان شبکه معکوس دفاع کرد. هم‌اکنون وی استادیار گروه مهندسی صنایع در دانشگاه صنعتی بیرجند است. زمینه‌های تحقیقاتی وی شامل مسائل جریان شبکه و نظریه بازی‌ها است.

مرضیه فلاحت
گروه ریاضی، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران
m.felahat@yahoo.com

مرضیه فلاحت متولد شهریور ۱۳۶۷ است. او در بهمن ماه ۱۳۸۵ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی و در سال ۱۳۹۰ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات در دانشگاه بیرجند شد. در سال ۱۳۹۳ دوره دکتری ریاضی کاربردی در گرایش آنالیز عددی را در دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان و تحت نظر استاد محمود محسنی‌مقدم آغاز و در سال ۱۳۹۹ از پایان‌نامه خود در زمینه موجک‌ها و معادلات دیفرانسیل دفاع کرد.

ابوالفضل عبدالله‌زاده
گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران
a.abdolahzadeh@birjand.ac.ir

ابوالفضل عبدالله‌زاده، دانشجوی مقطع دکتری رشته ریاضی کاربردی در دانشگاه بیرجند است. زمینه پژوهشی تخصصی او مسائل جریان شبکه است؛ اما علاوه بر این علاقه‌مند به پژوهش در حوزه‌های کاربرد ریاضیات و مطالعات بین‌رشته‌ای بوده و با تعامل با دانشجویان و استادان رشته‌های گوناگون به انجام امور پژوهشی و تحقیقاتی می‌پردازد.