

زیبایی‌های مثلث خیام- پاسکال

سید محمد امین خاتمی

چکیده. مثلث خیام- پاسکال خواص زیبایی بسیاری دارد که حتی در مواردی می‌توان آن‌ها را با شکل نمایش داد. در این مقاله منتخبی از این خواص را مطالعه خواهیم کرد. الگوها و روابط عددی مختلف، اتحادهایی مربوط به ضرایب بسط دوجمله‌ای، و ارتباط این مثلث با ساختارهای فراکتالی از جمله این خواص است.

۱. مقدمه

شهرت مثلث عددی خیام- پاسکال به انتشار چند نوشته از بلز پاسکال به سال ۱۶۶۵ برمی‌گردد. تقارن تحقیقات پاسکال با انقلاب علمی بعد از قرون وسطی و هم‌عصر بودن پاسکال با بسیاری از بزرگان دنیای ریاضی و اشاره به بعضی از کاربردهای این مثلث باعث شهرت این مثلث به نام مثلث پاسکال شد. اما اکنون می‌دانیم که ایتالیایی‌ها (قرن ۱۶ میلادی)، چینی‌ها (قرن ۱۱ میلادی)، ایرانی‌ها (قرن ۱۰ میلادی)، و هندی‌ها (قرن ۸ میلادی) نیز قبل از پاسکال با این مثلث عددی آشنایی داشته‌اند [۸، ۱۹، ۲۳]. به نظر می‌رسد اولین بار هندی‌ها در قرن سوم قبل از میلاد به تعداد راه‌های انتخاب r شی از n شی اشاره کرده‌اند و همچنین در نوشته‌ای در قرن هشتم میلادی نیز این مثلث عددی را آورده‌اند [۱۳]. در ایران اولین کسی که به این مثلث عددی و نیز بسط دوجمله‌ای اشاره کرده است کرجی است [۲۳]، ولی از آنجایی که خیام در محاسبه ضرایب دوجمله‌ای نتایج مهمی به دست آورده است آن را مثلث خیام می‌نامند. در این مقاله، گزیده‌ای از خواص محاسباتی و بصری مثلث خیام- پاسکال را مطالعه خواهیم کرد. الگوها و روابط عددی مختلف، اتحادهایی درباره ضرایب بسط دوجمله‌ای، و ارتباط این مثلث با ساختارهای فراکتالی از جمله این خواص اند.

۲. مثلث عددی خیام

اولین جایی که مثلث خیام ظاهر می‌شود در ضرایب بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ است. یونانیان باستان با این بسط برای توان ۲ و هندی‌ها برای توان ۳ آشنا بوده‌اند [۸]. با توجه به دانش فعلی ما از متون باستانی، کرجی اولین شخصی بود که ضرایب بسط دوجمله‌ای را به صورت یک مثلث عددی توصیف کرد و اثباتی برای قضیه دوجمله‌ای ارائه داد [۱۹، ۲۳]. قضیه دوجمله‌ای نیوتن به صورت $(x+y)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ نوشته می‌شود که در آن $\binom{n}{k}$ تعداد راه‌های انتخاب k شی از n شی است؛ یعنی $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ، و واضح است که $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. این ضرایب عددی در مثلث

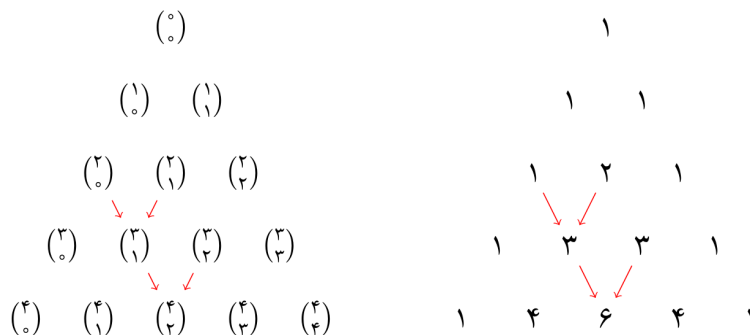
عبارات و کلمات کلیدی: مثلث خیام، مثلث خیام- پاسکال، مثلث عددی، تاریخ ریاضیات

دبیر تخصصی رابط: مسعود آرین نژاد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۱۸

نوع مقاله ترویجی

خیام روابطی با هم دارند. همان‌طور که در تصویر ۱ دیده می‌شود، همه اعداد روی دو ضلع مثلث خیام برابر ۱ اند و سپس اعداد هر سطر با جمع زدن اعداد واقع در سطر بالاتر آن‌ها به دست می‌آید. اگر سطرهای مثلث را به ترتیب $\{0, 1, 2, \dots\}$ بنامیم، آنگاه اعداد واقع در سطر n ام، ضرایب بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ اند.



شکل ۱. مثلث خیام

۳. خاصیت‌های اولیه مثلث خیام

الگوهای عددی نمایش داده شده در شکل ۲ به شرح زیرند:

۱.۳. بنابر الگوی مثلث خیام، برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر عدد طبیعی $k, k \leq n$ ، $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. اثبات جبری آن خیلی ساده و آسان است. یک اثبات جبری و یک اثبات ترکیبیاتی را در [۳۶، قضیه ۲.۳.۲] مطالعه کنید. اثبات جبری دیگری نیز در [۲۸] آمده است.

۲.۳. اگر سطرهای مثلث را به ترتیب $\{0, 1, 2, \dots\}$ بنامیم، آنگاه جمع اعداد روی سطر n ام مثلث خیام برابر 2^n است، یعنی

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

این رابطه با قرار دادن $x = y = 1$ در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ نتیجه می‌شود. روش دیگر اثبات، شمردن زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی به ازای هر $0 \leq k \leq n$ است (به عنوان مثال [۳۶، قضیه ۲.۲.۲] را ببینید). اگر $x = 1$ و $y = -1$ را در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ قرار دهیم اتحاد کاربردی دیگری نتیجه می‌شود. در اصل، داریم

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

و چون جمع عناصر سطر n ام برابر 2^n است، خواهیم داشت

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}.$$

با توجه به اینکه $11^n = (10+1)^n$ ، توان‌های عدد ۱۱ به راحتی از روی اعداد سطر n ام به دست می‌آیند. مثلاً داریم $11^3 = 1331 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$ که می‌توان گفت چون ۱، ۳، ۳، ۱ اعداد روی سطر سوم مثلث خیام هستند، پس $11^3 = 1331$. البته وقتی اعداد دورقمی و بالاتر در سطرها ظاهر می‌شوند، روش محاسبه کمی فرق می‌کند. مثلاً

که در آن‌ها $[x]$ به معنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است. مثلاً با توجه به اعداد سطر ششم مثلث خیام داریم

$$\cos(6\theta) = \cos^6 \theta - 15 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 15 \cos^2 \theta \sin^4 \theta - \sin^6 \theta,$$

$$\sin(6\theta) = 6 \cos^5 \theta \sin \theta - 20 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + 6 \cos \theta \sin^5 \theta.$$

از روی اتحادهای فوق به راحتی می‌توان اتحادهایی برای $\tan(n\theta)$ و $\cot(n\theta)$ نیز به دست آورد. مثلاً

$$\tan(n\theta) = \frac{\binom{n}{1} \tan \theta - \binom{n}{2} \tan^3 \theta + \binom{n}{5} \tan^5 \theta - \dots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2} \tan^2 \theta + \binom{n}{4} \tan^4 \theta - \dots}.$$

توجه دارید که در اتحاد $\tan(n\theta)$ ، همه اعداد سطر n ام مثلث خیام یکی در میان ابتدا در مخرج و سپس در صورت کسر ظاهر شده‌اند.

۳.۳. به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، $n^2 = \binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{1} - \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{1} - \binom{n}{0}$. اثبات این اتحاد از روش جبری خیلی ساده است و آن‌را به خواننده واگذار می‌کنیم. توجه دارید اعدادی که در اتحاد آمده‌اند دقیقاً ۶ عددی هستند که در اطراف $\binom{n}{2}$ قرار گرفته‌اند. الگوهای دیگری نیز برای محاسبه n^2 در مثلث خیام وجود دارد که نه تنها جستجوی آن‌ها خالی از لطف نیست، بلکه ممکن است رابطه‌های جدیدی نیز به دنبال بیاورد. برای نمونه می‌توانید [۱۵]، بخش پنجم فصل ۶ یا [۱۶] را ببینید.

۴.۳. به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، $n^3 = \binom{n}{2} \times \binom{n-1}{1} + \binom{n}{1} \times \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} \times \binom{n-1}{n-2} + \dots + \binom{n}{1} \times \binom{n-1}{n-1}$. در اینجا نیز با محاسبه جبری حکم را می‌توان ثابت کرد. در اصل، چون $\binom{a}{1} = a$ و $\binom{a}{a} = 1$ داریم

$$\binom{n+1}{2} \times \binom{n-1}{1} \times \binom{n}{0} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} \times (n-1) = \frac{n(n^2-1)}{2},$$

و

$$\binom{n+1}{1} \times \binom{n}{2} \times \binom{n-1}{0} = (n+1) \times \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n^2-1)}{2},$$

که فوراً حکم را نتیجه می‌دهد. در اینجا نیز شبیه **۳.۳**، شش عدد اطراف $\binom{n}{2}$ در اتحاد ظاهر شده‌اند. برای n^3 نیز الگوهای دیگری در مثلث خیام وجود دارد که یافتن آن‌ها را به خواننده مشتاق واگذار می‌کنیم.

۵.۳. خاصیتی که گاهی اوقات آن‌را «خاصیت چوب چوگانی» می‌نامند بیان می‌کند که برای هر عدد طبیعی n ،

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

و با توجه به متقارن بودن مثلث خیام به صورت $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n-1} + \dots + \binom{n+k}{n-k} = \binom{n+k+1}{n-k}$ نیز قابل بیان است. در واقع با قرار دادن $\binom{n}{0}$ به جای $\binom{n}{k}$ و k بار استفاده از خاصیت **۱.۳** به راحتی نتیجه حاصل می‌شود. با استقراء ریاضی نیز می‌توان حکم را ثابت کرد. یک اثبات ترکیباتی نیز برای این اتحاد به این صورت است. تعداد جواب‌های صحیح معادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k, \quad x_i \geq 0$$

برابر است با تعداد راه‌های توزیع k تا عدد ۱ در n ظرف x_i و یا تعداد جایگشت‌های مختلف k تا نماد ۱ و $n-1$ تا نماد $+$ ، که برابر $\binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ است. اکنون با استفاده دو تعبیر برای تعداد جواب‌های صحیح نامعادله

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} \leq k, \quad x_i \geq 0$$

اتحاد مطلوب نتیجه می‌شود. اولاً تعداد جواب‌های نامعادله مذکور برابر است با تعداد جواب‌های صحیح $k + 1$ معادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = m, \quad x_i \geq 0$$

به ازای $0 \leq m \leq k$ ، که برابر است با $\binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1} + \dots + \binom{k+n}{n}$ که همان سمت چپ رابطه مورد بحث است. ثانیاً تعداد جواب‌های صحیح نامعادله (۱) برابر تعداد جواب‌های صحیح معادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} + A = k, \quad x_i \geq 0, \quad A \geq 0$$

است که برابر $\binom{k+n+1}{k}$ است و همان سمت راست آن رابطه است. برای مطالعه بیشتر و نیز مشاهده تعمیمی از این خاصیت به [۱۶] مراجعه کنید.

۶.۳. دنباله اعداد فیبوناتچی $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ که در علوم دیگر نیز به کرات ظاهر می‌شود، به این صورت تعریف می‌شود: $F_1 = F_2 = 1$ و برای $n \geq 3$ ، $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، یکی از الگوهای ظاهر شده در مثلث خیام، تشکیل دنباله فیبوناتچی است. در واقع، اگر برای $n < r$ فرض کنیم $\binom{n}{r} = 0$ ، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-i-1}{i}.$$

برای اثبات این رابطه از استقرای تعمیم‌یافته و خاصیت ۱.۳ استفاده می‌کنیم. به‌وضوح برای $n = 1$ حکم درست است، زیرا $\binom{0}{0} = 1$. فرض کنید برای هر عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی k حکم درست باشد. برای اثبات درستی حکم برای $k + 1$ ، با در نظر گرفتن دو حالت زوج و فرد برای k می‌توان حکم را ثابت کرد. مثلاً چنانچه k زوج باشد، چون داریم $\lfloor k/2 \rfloor = k/2$

$$\sum_{i=0}^{k/2} \binom{k-i-1}{i} = \sum_{i=0}^{k/2-1} \binom{k-i-1}{i} + \binom{k/2-1}{k/2} = \sum_{i=0}^{k/2-1} \binom{k-i-1}{i}.$$

از طرفی با تعویض متغیر در اندیس مجموع بالا داریم

$$\sum_{i=1}^{k/2} \binom{k-i-1}{i-1} = \sum_{i=0}^{(k-2)/2} \binom{k-i-2}{i}.$$

از آنجا که $\binom{k-i}{i} = \binom{k-i-1}{i-1} + \binom{k-i-1}{i}$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} &= \sum_{i=1}^{k/2} \binom{k-i-1}{i-1} + \sum_{i=0}^{k/2} \binom{k-i-1}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{(k-2)/2} \binom{k-i-2}{i} + \sum_{i=0}^{k/2-1} \binom{k-i-1}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \binom{k-i-2}{i} + \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-i-1}{i} \\ &= F_{k-1} + F_k = F_{k+1}. \end{aligned}$$

اثبات حالتی را که k فرد است به خواننده واگذار می‌کنیم.

ذکر رابطه دیگری که در [۲۸] آمده است خالی از لطف نیست. دنباله فیوناتچی نوعی دنباله بازگشتی خطی است. با حل این معادله بازگشتی خطی به طریق معمول می‌توان دید که

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1 + \sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{2^n}$$

(مثلاً [۳۶، مثال ۸.۲.۴] را ببینید). نکته جالب این است که با استفاده از بسط دوجمله‌ای و حذف جملات مثبت و منفی خواهیم داشت

$$F_n = \frac{2^{\binom{n}{1}} + 2^{\binom{n}{3}} 5 + 2^{\binom{n}{5}} 5^2 + \dots + 2^{\binom{n}{2k+1}} 5^k + \dots + 2^{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}} 5^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}}{2^n}$$

حالا با توجه به اینکه $2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$ می‌نویسیم

$$F_n = \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{3} 5 + \binom{n}{5} 5^2 + \dots}{\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots}$$

در اینجا نیز مشابه $\tan(n\theta)$ می‌بینید که همه اعداد سطر n ام مثلث خیام به صورت یکی درمیان ابتدا در مخرج و سپس در صورت و البته همگی با علامت مثبت ظاهر شده‌اند. برای مطالعه بیشتر در مورد ارتباط دنباله فیوناتچی با مثلث خیام می‌توانید مثلاً [۲۰، فصل ۱۱] و [۳۱] را مطالعه کنید.

۴. دنباله‌های عددی و عدد پی در مثلث خیام

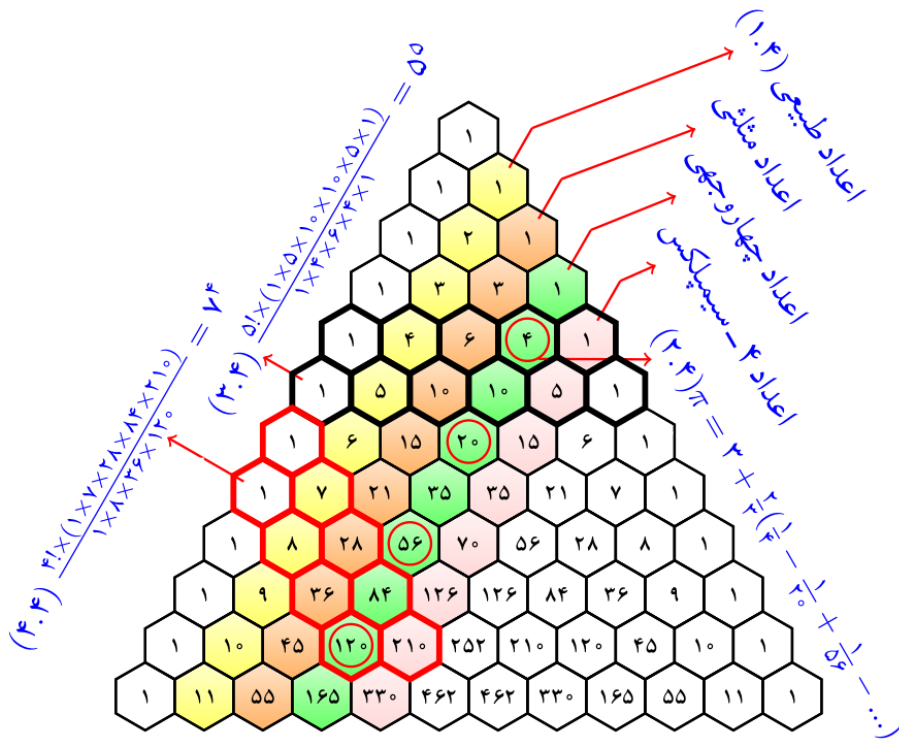
دنباله‌های عددی و خاصیت‌هایی که در شکل ۳ آمده‌اند به شرح زیرند:

۱.۴. دنباله‌های اعداد طبیعی و اعداد مثلثی در قطرهای مثلث خیام دیده می‌شوند. بجاست تذکر دهیم که بجز بعضی از اعداد روی دو قطر مربوط به اعداد طبیعی، یعنی بجز بعضی از اعداد به صورت $\binom{n}{1}$ و $\binom{n}{n-1}$ ، سایر اعداد مثلث خیام عدد اول نیستند؛ زیرا به ازای هر $1 < i < j < n - 1$ ، کسر $\binom{n}{j} / \binom{n}{i}$ به کسر با صورت و مخرج کوچک‌تر به صورت $\binom{n-i}{n-j} / \binom{j}{i}$ ساده می‌شود، پس بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک $\binom{n}{i}$ و $\binom{n}{j}$ بیشتر از یک است. حالا مسئله‌ای ساده و حل نشده، که احتمالاً حل آن خیلی سخت است، را در مورد نحوه توزیع اعداد در مثلث خیام بیان می‌کنیم.

اگر برای عدد طبیعی n ، تعداد دفعاتی که عدد n در مثلث خیام ظاهر می‌شود را با $s(n)$ نمایش دهیم آنگاه واضح است که هر عدد $n > 1$ حداکثر در $n + 1$ سطر ابتدایی ظاهر می‌شود. حدس سینگماستر^۱ بیان می‌کند که ثابتی مثل C وجود دارد که به ازای هر $n > 1$ ، $s(n) \leq C$ ، خود سینگماستر حدس زده است که $10 \leq C \leq 12$ ؛ ولی بزرگ‌ترین عددی که تاکنون با بیشترین تعداد ظاهر شدن یافته‌اند عدد $n = 3003$ بوده است با ۸ بار تعداد ظاهر شدن. به‌علاوه بجز 3003 عدد دیگری نمی‌شناسیم که ۸ بار در مثلث ظاهر شده باشد [۱، ۲۷]. بهترین کران بالایی که برای $s(n)$ تاکنون پیدا شده است را می‌توانید در [۱۸] ببینید.

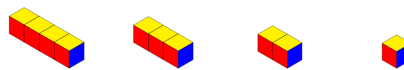
علاوه بر اعداد طبیعی و اعداد مثلثی، اعداد چهاروجهی یا ۳-سیمپلکس، و به‌طور کلی اعداد n -سیمپلکس نیز در قطرهای مثلث خیام دیده می‌شوند. شکل ۴ به‌خوبی تعریفی از اعداد n -سیمپلکس برای $1 \leq n \leq 3$ عرضه می‌کند. توجه دارید عدد n -سیمپلکس k ام برابر است با حاصل جمع همه اعداد $(n-1)$ -سیمپلکس اول تا k ام.

¹D. Singmaster

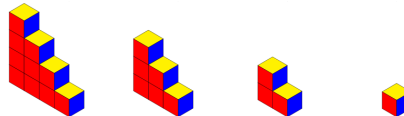


شکل ۳. دنباله‌های عددی و عدد پی در مثلث خیام

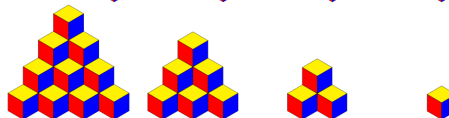
(آ) اعداد ۱-سیمپلکس



(ب) اعداد ۲-سیمپلکس



(ج) اعداد ۳-سیمپلکس



شکل ۴. اعداد n -سیمپلکس

۲.۴. عدد پی را می‌شود از روی بعضی از دنباله‌های عددی در ۱.۴ ساخت: مشهورترین آن‌ها زیردنباله اعداد فرد است. همان‌طور که می‌دانید رابطه لایبنتیس برای عدد π به صورت

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

است. لایبنتیس و البته چند سال زودتر از او گرگوری^۲ با روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال این سری را یافته بودند. اثبات فرمول لایبنتیس به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال چندان سخت نیست. در واقع چون سری هندسی

^۲J. Gregory

$$\begin{aligned} & \text{است، لذا با کمی تسامحه ریاضی داریم} \\ & \frac{\pi}{4} = \arctan(1) - \arctan(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ & = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\int_0^1 x^{2k} dx \right) \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \end{aligned}$$

ریاضیدانان هندی هم در قرن چهاردهم سری‌های دیگری، که به لحاظ سرعت همگرایی نسبت به فرمول لاینیتس برتری دارند، برای عدد پی پیدا کرده بودند [۲۵، فصل ۱] و [۲۶، ۵]. یکی از این سری‌ها، سری نیلاکانتا سومایاجی^۳ است که صورت تغییر یافته آن نشان می‌دهد عدد پی به کمک اعداد چهاروجهی نیز قابل محاسبه است. این سری را در شکل ۳ مشخص کرده‌ایم:

$$\begin{aligned} \pi &= 3 + \frac{4}{2 \times 3 \times 4} - \frac{4}{4 \times 5 \times 6} + \frac{4}{6 \times 7 \times 8} - \dots \\ &= 3 + \frac{4}{6} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} - \frac{1 \times 2 \times 3}{4 \times 5 \times 6} + \frac{1 \times 2 \times 3}{6 \times 7 \times 8} - \dots \right) \\ &= 3 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\binom{4}{3}} - \frac{1}{\binom{6}{3}} + \frac{1}{\binom{8}{3}} - \dots \right). \end{aligned}$$

همچنین π را به صورت زیر برحسب اعداد مثلثی می‌توان نوشت [۴، ۱۱]:

$$\pi = 2 + \frac{1}{\binom{2}{2}} + \frac{1}{\binom{3}{2}} - \frac{1}{\binom{4}{2}} - \frac{1}{\binom{5}{2}} + \frac{1}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{\binom{7}{2}} - \dots$$

حالا این سوال مطرح می‌شود که: آیا برای هر دنباله از اعداد n -سیمپلکس، می‌توان سری‌ای نوشت که به عدد پی همگرا باشد؟

۳.۴. دنباله اعداد $\{n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ نیز به کمک حاصل ضرب اعدادی که روی سطرهاى مثلث خیام‌اند قابل محاسبه

است [۴]. چنانچه حاصل ضرب اعداد واقع در سطر n ام مثلث خیام، یعنی $\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}$ را با $\Pi(n)$ نمایش دهیم، آنگاه

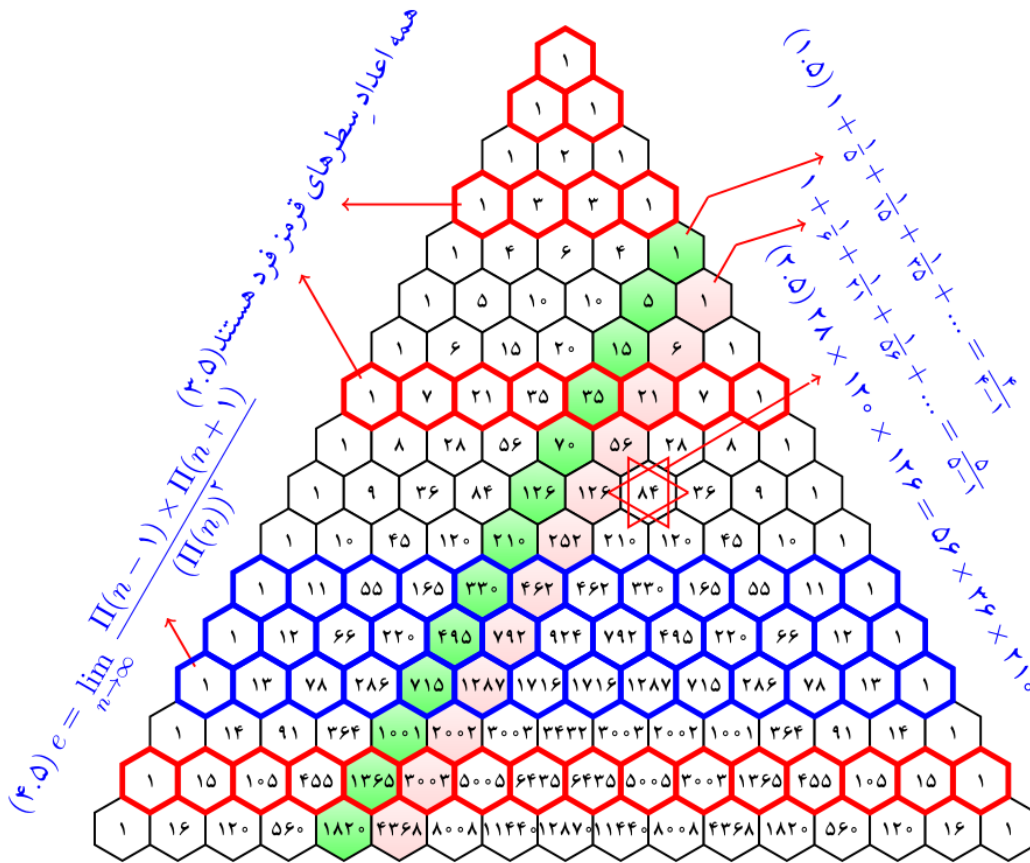
همان‌طور که شکل ۳ نشان می‌دهد برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $n^n = \frac{n! \times \Pi(n)}{\Pi(n-1)}$ در اصل، چون

$$\Pi(n) = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k} = \prod_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = (n!)^{n+1} \prod_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} = (n!)^{n+1} \prod_{k=0}^n \frac{1}{(k!)^2},$$

لذا

$$\frac{n! \Pi(n)}{\Pi(n-1)} = \frac{(n!)(n!)^{n+1} \prod_{k=0}^n \frac{1}{(k!)^2}}{((n-1)!)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k!)^2}} = \frac{(n!)^n (n!)^2 \frac{1}{(n!)^2}}{((n-1)!)^n} = n^n.$$

³Nilakantha Somayaji



$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2+k}{k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{2+k}{k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + 2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

البته برای $n \geq 3$ و به ویژه برای $n = 3$ ، تجزیه کسر به صورت زیر سریع تر ما را به جواب می‌رساند:

$$\frac{1}{\binom{3+k}{k}} = \frac{3!k!}{(3+k)!} = \frac{3!}{(k+1)(k+2)(k+3)} = 3! \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right).$$

دو اثبات دیگر برای این خاصیت را در [۹] و [۲۴] ببینید. اثبات دیگری برای این خاصیت را که مبتنی بر خواص توابع گاما و بتا است می‌آوریم: برای اثباتی مشابه [۲۹، اتحاد ۱۰۶ و ۱۰۷] را ببینید. تابع گاما که به نوعی تعمیم تابع فاکتوریل به اعداد حقیقی مثبت است و کاربردهایی در آمار، معادلات دیفرانسیل، و ریاضیات مهندسی دارد، به صورت

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

تعریف می‌شود. به راحتی با انتگرال گیری جزء به جزء می‌توان دید که $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. چون $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ ، برای هر عدد طبیعی n داریم

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots = (n-1)(n-2)\dots\Gamma(1) = (n-1)!.$$

تابع بتا نیز برای اعداد حقیقی مثبت x و y به صورت

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

تعریف می‌شود. با یک تعویض متغیر ساده $t = 1-s$ می‌توان دید تابع بتا متقارن است. به علاوه $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. حکم اخیر با تعویض متغیر $t = uv$ و $s = u(1-v)$ در انتگرال دوگانه $\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(s+t)} t^{x-1} s^{y-1} dt ds$ نتیجه می‌شود. اکنون برای $n \geq 2$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{k}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!k!}{(n+k)!} = n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)} = n \sum_{k=0}^{\infty} B(k+1, n) \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 t^k (1-t)^{n-1} dt = n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) dt \\ &= n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \left(\frac{1}{1-t} \right) dt = n \int_0^1 (1-t)^{n-2} dt = \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

۲.۵. این خاصیت که گاهی آنرا «ستاره داوود» می‌نامند بیان می‌کند که برای هر $n \geq 2$ و هر $1 \leq k \leq n-1$ ، برای شش راس دور مرکز $\binom{n}{k}$ در مثلث خیام داریم

$$\binom{n}{k-1} \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} \binom{n+1}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

توجه دارید که خاصیت ۴.۳ فقط برای ستاره داوود به مرکز $\binom{n}{k}$ است؛ در حالی که ۲.۵ برای ستاره داوود حول $\binom{n}{k}$ است. همچنین علاوه بر تساوی ذکر شده، چنانچه (a, b, c) را به معنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد a و b و c بگیریم، آنگاه

$$\left(\binom{n}{k-1}, \binom{n-1}{k}, \binom{n+1}{k+1} \right) = \left(\binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}, \binom{n-1}{k-1} \right).$$

اثبات هر دو اتحاد ساده است و به خواننده واگذار می‌شود [۱۷].

نتایج و تعمیم‌های مختلفی از خاصیت ستاره داوود ارائه شده است. مثلاً برای هر $n \geq 2$ و هر $1 \leq k \leq n-1$ و هر $r_1, r_2 \geq 1$ به شرط معنی‌دار بودن عبارتهای زیر داریم

$$\binom{n}{k-r_2} \binom{n-r_1}{k} \binom{n+r_2}{k+r_1} = \binom{n}{k+r_1} \binom{n+r_2}{k} \binom{n-r_1}{k-r_2}.$$

برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۱۶، ۱۲، ۲، ۳۰] مراجعه کنید.

۳.۵. به ازای هر $n \geq 0$ همه درایه‌های سطرها به شماره $2^n - 1$ اعداد فردند. این حکم نیز اثبات‌های زیادی ارائه شده است. یک اثبات مقدماتی این است که با استقراء روی k نشان دهیم برای هر $0 < k < 2^n$ ، ضریب بسط دوجمله‌ای $\binom{2^n}{k}$ عددی زوج است. سپس با توجه به اینکه $\binom{2^n}{k} = \binom{2^n}{2^n-k}$ نتیجه می‌شود که در سطر $2^n - 1$ ام همه اعداد فردند. با راهنمایی زیر اثبات را به خواننده واگذار می‌کنیم:

$$\binom{2^n}{k} = \frac{2^n!}{k!(2^n-k)!} = \frac{2^n!(k+1)}{(k+1)!(2^n-k-1)!(2^n-k)} = \binom{2^n}{k+1} \frac{k+1}{2^n-k}.$$

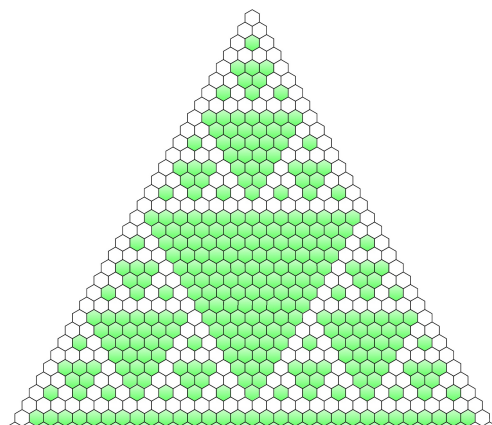
این حکم البته به صورت قوی‌تری نیز برقرار است. در واقع برای هر $n \geq 0$ ، همه اعداد روی سطر n ام مثلث خیام فردند اگر و فقط اگر به ازای k ای $n = 2^k - 1$. یکی از راه‌های اثبات این حکم استفاده از قضیه لوکاس^۴ است. قضیه لوکاس بیان می‌کند اگر p عددی اول باشد و نمایش اعداد n و m در مبنای p به صورت $n = \sum_{i=0}^k n_i p^i$ و $m = \sum_{i=0}^k m_i p^i$ باشد، آنگاه $\binom{n}{m} \equiv \prod_{i=0}^k \binom{n_i}{m_i} \pmod{p}$ که در آن برای $n_i < m_i$ ، $\binom{n_i}{m_i} = 0$. لوکاس این قضیه را در سال ۱۸۷۸ اثبات کرد و تاکنون اثبات‌های متنوعی برای آن بیان منتشر شده است؛ به عنوان نمونه دو اثبات ساده و مقدماتی را در [۳، بخش چهارم فصل ۸] و یا [۱۰] ببینید.

برگردیم به اثبات حکم ۳.۵. برای هر $0 < k < 2^n$ ، ضریب بسط دوجمله‌ای $\binom{2^n}{k}$ عددی زوج است اگر و فقط اگر $\binom{2^n}{k} \equiv 0 \pmod{2}$. اما $2^n = 1 \times 2^n + 0 \times 2^{n-1} + \dots + 0 \times 2^0 + k_0$ و $k = 0 \times 2^n + k_{n-1} 2^{n-1} + \dots + k_0$ و با توجه به قضیه لوکاس چون حداقل یکی از k_i ها ناصفر است،

$$\binom{2^n}{k} \equiv \binom{0}{0} \times \binom{0}{k_{n-1}} \times \dots \times \binom{0}{k_0} = 0.$$

همان‌طور که استفاده از قضیه لوکاس به اثبات ساده‌ای برای حکم گفته شده منتهی شد، استفاده از این قضیه در اثبات بسیاری از احکام درباره ضرایب بسط دوجمله‌ای مفید است. به عنوان تمرین خواننده مشتاق می‌تواند برای اثبات

⁴E. Lucas



شکل ۶. فراکتال شریپینسکی در مثلث خیام

حکمی که در مورد غیراول بودن ضرایب بسط دو جمله‌ای در ۱.۴ بیان کردیم، با استفاده از قضیه لوکاس نشان دهد به ازای هر عدد غیراول $n > 1$ و هر $0 < k < n$ بر مقسوم‌علیه اولی از n بخش پذیر است و به علاوه به ازای هر عدد اول n ، $n | \binom{n}{k}$.

اجازه دهید به قضیه دیگری از نظریه اعداد اشاره کنیم که اثبات دیگری برای ۳.۵ به دست می‌دهد. لژاندر در سال ۱۸۳۰ برای تجزیه فاکتوریل‌ها اتحادی به صورت زیر به دست آورد: به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد اول p ، توان p در تجزیه $n!$ به عوامل اول برابر $\sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$ است. از روی اتحاد لژاندر می‌توان اتحادی موسوم به قضیه کومر را ثابت کرد که بیان می‌کند توان عدد اول p در تجزیه $\binom{n}{m}$ به عوامل اول برابر

$$\frac{\sigma_p(m) + \sigma_p(n-m) - \sigma_p(n)}{p-1}$$

است که در آن $\sigma_p(n)$ جمع ارقام نمایش عدد n در مبنای p است. برای دیدن نمونه‌ای از اثبات این حکم به [۲۱]، قضیه [۷,۶,۲] مراجعه کنید. اکنون با توجه به اینکه نمایش دودویی عدد $2^n - 1$ دارای n رقم ۱ است، پس اگر برای $0 \leq k \leq 2^n - 1$ داشته باشیم $k = (k_{n-1}k_{n-2} \dots k_0)_2$ آنگاه $k = (a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0)_2$ که در آن $a_i = 1 - k_i$ و لذا

$$\frac{\sigma_p(k) + \sigma_p(2^n - 1 - k) - \sigma_p(2^n - 1)}{2-1} = t + (n-t) - n = 0.$$

این یعنی بزرگ‌ترین توان ۲ در تجزیه $\binom{2^n - 1}{k}$ صفر است که به معنی فرد بودن آن است. خاصیت ۳.۵ بسیار جالب است و به همین دلیل قصد داریم دو مطلب دیگر مرتبط با آن بیان کنیم. مطلب اول در مورد ظاهر شدن فراکتال شریپینسکی در مثلث خیام و مطلب دوم در مورد تعداد اعداد فرد ظاهر شده در مثلث خیام است.

همان‌طور که در شکل ۶ مشخص است، اگر خانه‌های فرد و زوج مثلث خیام را با دو رنگ متمایز رنگ کنیم، نتیجه به دست آمده چیزی جز مثلث شریپینسکی یا فراکتال شریپینسکی نیست. می‌توان همین کار را با رنگ آمیزی مثلث خیام به پیمانانه ۳ و پیمانانه‌های بالاتر نیز انجام داد، که البته منجر به تولید فراکتال‌های مثلثی شکل متنوع دیگری می‌شود. برای مطالعه بیشتر مقاله [۳۲] را توصیه می‌کنیم.



شکل ۷. پنج مرحله از ساخت مثلث شریپینسکی

مثلث شریپینسکی با در نظر گرفتن یک مثلث متساوی‌الاضلاع و سپس تقسیم آن به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع و حذف مثلث وسطی و ادامه دادن این فرایند روی مثلث‌های باقی‌مانده به‌دست می‌آید. شکل ۷ شامل پنج گام از مراحل ساختن مثلث شریپینسکی است.

مطلب دوم در مورد توزیع اعداد فرد در مثلث خیام است. با نگاهی به شکل ۶ معلوم می‌شود که تعداد اعداد فرد ظاهر شده (تعداد خانه‌های سفید) در مثلث خیام از سطر صفرم تا سطر $2^n - 1$ برابر است با 3^n . در واقع اگر تعداد اعداد فرد از سطر صفرم تا سطر n ام را با $f(n)$ نمایش دهیم، آنگاه $f(0) = 1$ ، $f(1) = 3$ ، $f(2k) = 2f(k-1) + f(k)$ و $f(2k+1) = 3f(k)$. اثبات اینکه $f(2^n - 1) = 3^n$ را به خواننده واگذار می‌کنیم. همچنین از این شکل معلوم می‌شود که تعداد اعداد فرد ظاهر شده در هر سطر از مثلث خیام برابر توانی از ۲ است. در واقع تعداد اعداد فرد ظاهر شده در هر سطر برابر است با ۲ به توان تعداد «۱»‌های ظاهر شده در بسط دودویی n ؛ اثبات را به خوانندگان مشتاق واگذار می‌کنیم. اثباتی ترکیبیاتی از این موضوع را می‌توانید در [۲۲، صفحه ۲۴] ببینید.

و بالاخره، با توجه به اینکه در شکل ۶، اعداد زوج به رنگ سبزند، از شکل ۷ به‌نوعی می‌توان نتیجه گرفت که بیشتر اعداد مثلث خیام زوج‌اند و اعداد فرد پراکنده‌گی خیلی کمی در مثلث خیام دارند. به بیان دقیق‌تر، اگر تعداد اعداد زوج قبل از سطر n ام را با $g(n)$ و تعداد همه اعداد قبل از سطر n ام را با $h(n)$ نمایش دهیم، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/h(n) = 1$. اثبات این رابطه خیلی سخت نیست و مثلاً می‌توانید [۱۴] را ببینید. برای مطالعه بیشتر در مورد توزیع اعداد در مثلث خیام، به [۷، ۱۰] نیز می‌توانید مراجعه کنید.

۴.۵. آخرین اتحاد ظاهر شده در شکل ۵، الگویی در مثلث خیام را نشان می‌دهد که با آن می‌توان عدد نپر را نمایش داد [۶]. با نمادگذاری‌های قسمت ۳.۴، و با توجه به اینکه $\prod_{k=0}^n (k!)^{-2} = \Pi(n)$ ، به راحتی می‌توان دید که برای $n \geq 1$ ، $\Pi(n)/\Pi(n-1) = \frac{n^n}{n!}$ ، که فوراً از آن نتیجه می‌گیریم که

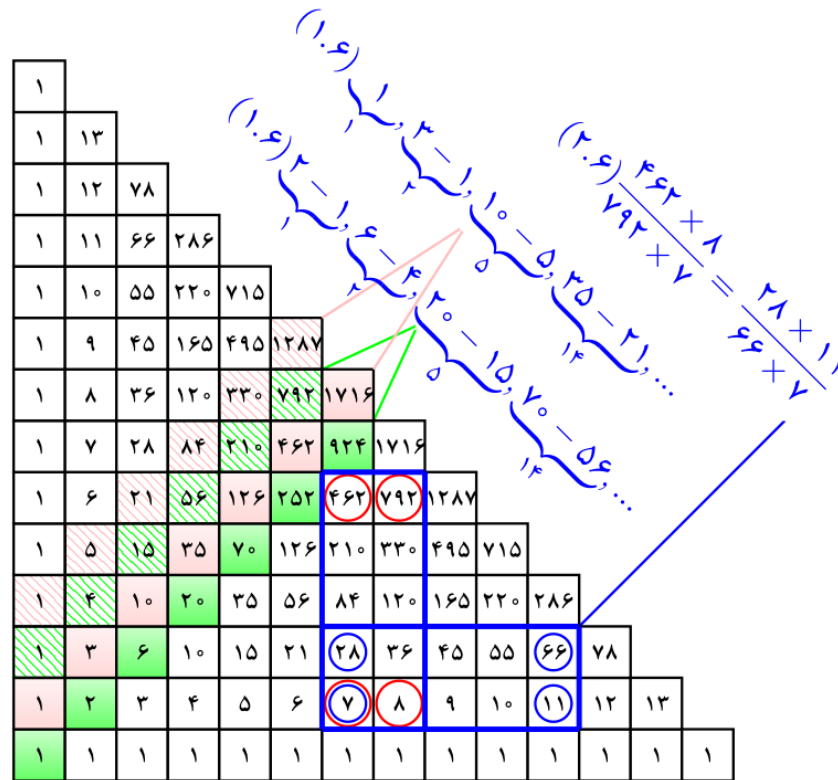
$$\frac{\Pi(n+1)/\Pi(n)}{\Pi(n)/\Pi(n-1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

اکنون چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ رابطه ۴.۵ در شکل ۵ به‌دست می‌آید.

۶. اعداد کاتالان و خاصیت بازتابی در مثلث خیام

الگوهای شکل ۸ به شرح زیرند:

۱.۶. دنباله اعداد کاتالان را اوایل در سال ۱۷۵۱ و بعد از او و مستقلاً کاتالان در سال ۱۸۳۸ معرفی کرد. اوایل در ضمن پاسخی که به این سوال داد اعداد کاتالان را به کار برده است: یک چندضلعی محدب به چند روش توسط قطرهای غیرمتقاطعش مثلث‌بندی می‌شود؟ سوالی که کاتالان مطرح کرد و در آن این اعداد را تعریف کرده است: در ضرب یک دنباله از n متغیر غیرمتمايز که ضرب آن‌ها خاصیت شرکت‌پذیری و جابجایی ندارد و لذا نیاز به پرانتزگذاری است، چند روش پرانتزگذاری درست برای همه حالت‌های مختلف ضرب آن‌ها وجود دارد؟



شکل ۸. دو الگوی دیگر در مثلث خیام

اگر در مسئله کاتالان فرض کنیم متغیرها متمایزند، آنگاه به راحتی به رابطه بازگشتی $C'_{n+1} = 2 + (4(n-1))C'_n$ برای پرانتزگذاری‌ها می‌رسیم و جواب آن به صورت زیر است $C'_n = (2n-2)!/(n-1)!$ (مثال ۳۶، [۱۲.۲.۱]) را ببینید). لذا در حالت غیرمتمایز، باید C'_n را بر $n!$ تقسیم کنیم تا تعداد پرانتزگذاری‌ها به دست آید. در واقع عدد کاتالان n عبارت است از

$$C_n = \frac{C'_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

اکنون، با توجه به اینکه در شکل ۸، عبارت‌های واقع روی قطر اصلی مثلث، اعداد به صورت $\binom{2n}{n}$ را نمایش می‌دهد، لذا اعداد کاتالان عبارت‌اند از

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{6}{3}, \frac{20}{4}, \frac{70}{5}, \frac{252}{6}, \dots$$

با توجه به دو مسئله‌ای که اعداد کاتالان جواب آن‌ها است معلوم است که هر عدد کاتالان عددی طبیعی است؛ اما طبیعی بودن $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ آن‌قدرها هم واضح نیست. دو رابطه‌ای که در شکل ۸ مشخص شده‌اند، اثباتی برای این حکم‌اند که به ازای هر $n \geq 0$ ، عدد $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ طبیعی است. آن دو رابطه به صورت زیرند

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \quad C_n = \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n+1}.$$

اثبات جبری هر دو رابطه آسان است ([۳۴] را ببینید). تعبیرهای دیگری نیز برای اعداد کاتالان وجود دارد. به عنوان مثال چهار تعبیر دیگر از این اعداد در [۳۴] آمده است.

$\binom{n-a}{k}$	$\binom{n-a}{k+b}$	
$\binom{n-b}{k}$		$\binom{n-b}{k+a}$
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+b}$	$\binom{n}{k+a}$

شکل ۹. خاصیت بازتابی

۲.۶. این خاصیت که آنرا «خاصیت بازتابی» می‌نامند، بیان می‌کند برای هر دو مستطیل به صورت شکل ۹ در مثلث خیام (که در شکل ۸ نیز مشخص شده است) اگر تعریف کنیم

$$W(n, k, a, b) = \frac{\binom{n-b}{k} \binom{n}{k+a}}{\binom{n-b}{k+a} \binom{n}{k}},$$

آنگاه، $W(n, k, a, b) = W(n, k, b, a)$. اثبات جبری این رابطه بسیار آسان است [۱۶].

۷. یادداشت پایانی

در این مقاله در مورد الگوهای عددی که در مثلث خیام ظاهر می‌شود بحث کردیم. همان‌طور که اشاره کردیم مطالب فراوان دیگری در این باره می‌توان بیان کرد. در ذکر الگوهای مشاهده‌شده در مثلث خیام، از بعضی الگوهای بدیهی و یا مشابه با سایر الگوها صرف‌نظر کردیم و در انتخاب اثبات‌ها نیز آن‌هایی را برگزیدیم که شباهت کمتری به هم داشتند. برای مطالعه بیشتر در مورد الگوهای موجود در مثلث خیام و همچنین خواص دیگری از ضرایب بسط دوجمله‌ای می‌توانید به [۳۳، ۳۵] مراجعه کنید. همچنین مرجع بسیار جدید [۲۹] که مشتمل بر ۳۳۳ اتحاد در مورد ضرایب دوجمله‌ای و شامل ایده‌های مختلف برای رسیدن به اتحادهای دیگر است می‌تواند مفید باشد.

تشکر و قدردانی

لازم است از زحمات فراوان داوران محترم در به سرانجام رسیدن مقاله حاضر تشکر کنیم.

مراجع

- [1] H. L. Abbott, P. Erdős and D. Hanson, On the number of times an integer occurs as a binomial coefficient, *Amer. Math. Monthly*, **81** (1974) 256-261.
- [2] S. Ando, A triangular array with hexagon property, dual to Pascal's triangle, *Applications of Fibonacci Numbers*, (San Jose, CA, 1986), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988 61-67.
- [3] A. T. Benjamin and J. J. Quinn, *Proofs that really count: The art of combinatorial proof*, The Dolciani Mathematical Expositions, **27**, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003.

- [4] A. Bogomolny, Patterns in Pascal's triangle-From Cut the Knot (1996-2018), <https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/PascalTriangleProperties.shtml>.
- [5] D. Brink, Nilakantha's accelerated series for π , *Acta Arith.*, **171** (2015) 293-308.
- [6] H. J. Brothers, Math bite: Finding e in Pascal's triangle, *Math. Mag.*, **85** (2012).
- [7] L. O. Cannon, Locating multiples of primes in Pascal's triangle, *College Math. J.*, **20** (1989) 324-328.
- [8] J. L. Coolidge, The story of the binomial theorem, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949) 147-157.
- [9] T. Edgar, Proof without words: sums of reciprocals of binomial coefficients, *Math. Mag.*, **89** (2016) 212-213.
- [10] N. J. Fine, Binomial coefficients modulo a prime, *Amer. Math. Monthly*, **54** (1947) 589-592.
- [11] T. Foster, Nilakantha's footprints in Pascal's triangle, *Math. Teacher*, **108** (2014) 247-248.
- [12] A. Gupta, Generalized hidden hexagon squares, *Fibonacci Quart.*, **12** (1974) 45-46.
- [13] R. C. Gupta, Varahamihira's calculation of nC_r and the discovery of pascal's triangle, *Ganita Bharati*, **14** (1992) 45-49.
- [14] H. Harborth, Number of odd binomial coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **62** (1977) 19-22.
- [15] P. Hilton, D. Holton and J. Pedersen, *Mathematical Reflections: In a Room with Many Mirrors*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [16] P. Hilton and J. Pedersen, Looking into Pascal's triangle, *Math. Mag.*, **60** (1987) 305-316.
- [17] V. E. Hoggatt and W. Hansell, The hidden hexagon squares, *Fibonacci Quart.*, **9** (1971) 120-133.
- [18] D. M. Kane, Improved bounds on the number of ways of expressing t as a binomial coefficient, *Integers*, **7** (2007) 1-7.
- [19] V. J. Katz and K. H. Parshall, *Taming the Unknown: A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century*, Princeton University Press, Princeton, 2014.
- [20] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, **1**, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2018.
- [21] V. H. Moll, *Numbers and Functions: From a Classical-Experimental Mathematician's Point of View*, AMS, Providence, Rhode Island, 2012.
- [22] G. Pólya, R. E. Tarjan and D. R. Woods, *Notes on Introductory Combinatorics*, Springer Science & Business Media, New York, 1983.
- [23] R. Rashed, *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*, translated from the 1984 French original by A. F. W. Armstrong, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [24] A. M. Rockett, Sums of the inverses of binomial coefficients, *Fibonacci Quart.*, **19** (1981) 433-437.
- [25] R. Roy, *Sources in the Development of Mathematics: Series and Products from the Fifteenth to the Twenty-First Century*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [26] R. Roy, The discovery of the series formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha, *Math. Mag.*, **63** (1990) 291-306.
- [27] D. Singmaster, How often does an integer occur as a binomial coefficient?, *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971) 385-386.
- [28] K. J. Smith, Pascal's triangle, *Two-Year College Math. J.*, **4** (1973) 1-13.
- [29] M. Z. Spivey, *The Art of Proving Binomial Identities*, CRC Press, New York, 2019.
- [30] Z. Usiskin, Perfect square patterns in the Pascal triangle, *Math. Mag.*, **46** (1973) 203-208.
- [31] J. Varnadore, Pascal's triangle and Fibonacci numbers, *Math. Teacher*, **84** (1991) 314-319.
- [32] S. Wolfram, Geometry of binomial coefficients, *Amer. Math. Monthly*, **91** (1984) 566-571.
- [۳۳] ج. بهبودیان، م. بیات، وح. تیموری فعال، مثلث عددی خیام- پاسکال و مثلثهای شبیه آن، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۸۵.
- [۳۴] ب. کوچک شوشتری، اعداد کاتالان، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۶ (۱۳۹۰) ۵۷-۷۲.
- [۳۵] ح. محمودیان، شگفتی‌های مثلث خیام: گذری بر آنالیز ترکیبی، امید کورش، تهران، ۱۳۸۶.

[۳۶] م. میرزاویزی، شمردنی‌ها را بشمار، آهنگ قلم، مشهد، ۱۳۹۰.

سید محمد امین خاتمی

گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

khatami@birjandut.ac.ir

سید محمد امین خاتمی، دانش‌آموخته سال ۱۳۹۴ دکتری منطق ریاضی از دانشگاه صنعتی امیرکبیر تحت راهنمایی دکتر مسعود پورمهدیان می‌باشد. نظریه مدل منطق پیوسته و منطق فازی، نظریه مجموعه‌ها، ترکیبیات، تاریخ و فلسفه ریاضی از علایق پژوهشی آقای خاتمی هستند.

