

معلمان ریاضی چگونه از تاریخ تابع در تدریس ریاضی استفاده می کنند؟

ابوالفضل رفیع پور* و مریم محسنی

چکیده. مفهوم تابع یکی از مفاهیم مهم ریاضیات مدرسه‌ای است، به گونه ای که یک ایده متحد کننده در کل ریاضیات است. توابع، ابزار اصلی توصیف دنیای واقعی به زبان ریاضی هستند. تقریباً همه دانش‌آموزانی که در رشته تحصیلی خود واحدهایی از درس ریاضی را می‌گذرانند، با مفهوم تابع آشنا می‌شوند. این در حالی است که پژوهش‌های مختلف نشان می‌دهند، اغلب دانش‌آموزان، درک ضعیفی از مفهوم تابع دارند. هدف اصلی در مقاله حاضر، به تصویر کشیدن تاریخ شکل‌گیری مفهوم تابع در گذر زمان؛ و سپس بررسی نحوه تدریس گروهی از معلمان ریاضی استان کرمان می‌باشد. به عبارت دیگر در این مقاله به این سوال پرداخته شده است که معلمان ریاضی دبیرستانی، مفهوم تابع را چگونه تدریس می‌کنند؟ و نحوه تدریس‌شان با کدام رویکرد تاریخی همخوانی دارد؟ شرکت کنندگان در این مطالعه ۲۰ نفر از معلمان ریاضی دبیرستانی در استان کرمان هستند که به صورت موردی انتخاب شده‌اند. نتایج حاصل از مشاهده کلاس درس نشان داد که معلمان شرکت کننده در این مطالعه، غالباً از سیر تحول و شکل‌گیری مفهوم تابع در تدریس‌شان استفاده نمی‌کردند. آنها تدریس تابع را از تعریف صوری شروع کرده و پس از بیان چند مثال، ویژگی‌های تابع را برمی‌شمردند. همچنین تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از مطالعه نشان داد که مفهوم تابع بر مبنای آخرین بازنمایی شناخته شده از تابع، یعنی بر مبنای رویکرد تناظر میان مجموعه‌ها (زوج مرتبی)، ارایه می‌شد.

۱. مقدمه

بخش قابل ملاحظه‌ای از کتاب‌های ریاضی در دبیرستان و دانشگاه در رشته‌های مختلف؛ به مفهوم تابع، ویژگی‌ها و انواع آن اختصاص یافته است. در واقع دامنه گسترده کاربردهای مفهوم تابع در زمینه‌های گوناگون و نقش محوری و اساسی این مفهوم در شاخه‌های مختلف ریاضیات، برنامه‌ریزان آموزشی را متقاعد کرده است که نمی‌توان مفهوم تابع را از آموزش دبیرستانی حذف کرد [۲]. با این حال و با وجود اهمیت و کاربردهای متعدد مفهوم تابع در ریاضیات، در سایر علوم و در زندگی واقعی، نتایج تحقیقات صورت گرفته در این حوزه، نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در درک مفهوم تابع ضعیف هستند [۶].

همچنین بررسی رویکرد آموزشی مفهوم تابع نشان می‌دهد بر خلاف قدمت و تاریخ غنی این مفهوم در ریاضیات، آن‌گونه که شایسته است به این مفهوم بها داده نشده است. به طوری که کتاب‌های درسی ریاضی، تابع را یک ارزشی معرفی کرده‌اند، معلمان در تدریس آن سطحی عمل می‌کنند و دانش‌آموزان، از تابع و اهمیت آن درک محدودی دارند. استفاده از «رویکرد معرفی تابع بر پایه تاریخ گسترش آن»، می‌تواند یکی از راه‌های موثر در برطرف کردن این مشکلات باشد که

عبارت و کلمات کلیدی. تابع، تاریخ ریاضی، روش تدریس، دبیران ریاضی.

دبیر تخصصی رابط: امیدعلی کرمزاده

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۵/۰۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۲

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118430.1333>

در این مقاله به آن پرداخته شده است. در ادامه این مقاله به تاریخ گسترش مفهوم تابع، تعاریف ارائه شده در این سیر تاریخی، جایگاه تابع در ریاضیات مدرسه‌ای و چگونگی تدریس معلمان از تابع، پرداخته شده است.

۲. تاریخ گسترش مفهوم تابع

• قبل از قرن ۱۷ و قرن ۱۷:

تابع یکی از مفاهیم مهم و زیربنایی ریاضیات است که تاریخی متنوع و غنی دارد. سیر تکامل مفهوم تابع به ۴۰۰۰ سال قبل برمی‌گردد [۹]. به عنوان مثال، بابلی‌های باستان از جدول برای پیدا کردن دو طرفه مربع و جذر مربع^۱، مکعب و ریشه مکعب استفاده می‌کردند که این موارد نشان دهنده مفهوم تابع هستند [۱۱]. به گفته اینسوک^۲ [۷] مفهوم تابع یک اختراع جدید از ریاضیدانان قرن ۱۷ و ۱۸ نیست. در عوض، مفهوم تابع را می‌توان به ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد نسبت داد. اما ظهور توابع در تحقیقات ریاضی به عنوان یک مفهوم روشن منحصر به فرد، و به عنوان یک موضوع مطالعه، به پایان قرن ۱۷ برمی‌گردد [۱۱].

قبل از قرن ۱۷ نمونه‌هایی از تابع، بیشتر به صورت منحنی، در دسترس بود. پیدایش مفهومی از تابع به عنوان یک مفهوم ریاضی منحصر به فرد را، می‌توان شروعی برای حساب اولیه پیش‌بینی کرد [۱۱]. حساب دیفرانسیل اولیه، حساب دیفرانسیلی از منحنی‌های هندسی بود تا حساب دیفرانسیلی از توابع [۸] به طوری که دکارت^۳ (۱۶۵۰-۱۵۹۶) به روشنی منحنی هندسی یک معادله با دو متغیر و وابستگی بین مقادیر متغیر را به نمایش می‌گذارد [۱۱]. در این دوره حساب و هندسه از هم جدا نبودند. با ورود هندسه تحلیلی، دانش ریاضی توابع به طور چشمگیری افزایش یافت و اکنون زمان ظهور مفهوم انتزاعی از تابع فرا رسیده بود [۹]. پونته^۴ [۱۱] بیان می‌کند لایب‌نیتز^۵ (۱۶۴۶-۱۷۱۶) اولین کسی بود که اصطلاح تابع را در سال ۱۶۷۳، برای توصیف وابستگی کمیت‌های هندسی مثل شیب، به شکل منحنی استفاده کرد، همچنین اصطلاحات «ثابت»^۶، «متغیر»^۷ و «پارامتر»^۸ توسط لایب‌نیتز معرفی شدند. البته مطالعه تابع در این دوره با ایده‌های هندسی همراه بود.

بنابراین با گسترش مطالعه منحنی‌ها به روش جبری، استفاده از یک عبارت تحلیلی برای نشان دادن مقادیر^۹ وابسته به یک متغیر لازم بود و در نهایت، تابع برای مبادله این منظور توسط لایب‌نیتز و ژان برنولی^{۱۰} بین سال‌های ۱۶۹۴ و ۱۶۹۸ پذیرفته شد [۱۱].

• قرن ۱۸:

هم‌زمان با تغییر دیدگاه‌های ریاضیدانان از ایده‌های هندسی به ایده‌های جبری، نماد تابع نیز تغییر کرد [۴]. برنولی در سال ۱۷۱۸ اولین تعریف رسمی از تابع را ارائه کرد. برنولی یک تابع یک متغیری را، کمیتی تشکیل شده به هر شیوه دلخواه از این متغیر و تعدادی ثابت می‌داند [۱۵].

در دهه‌های اولیه قرن ۱۸ حساب به تدریج از هندسه جدا شد و به جبری قدرتمند (الگوریتم، تحلیلی) تبدیل شد. با ابداع نظریه مجموعه‌ها توسط کانتور^{۱۱} (۱۹۱۸-۱۸۴۵) مفهوم تابع به تکامل خود ادامه داد. در قرن ۱۸ تابع یک فرمول مجرد، به صورت عبارت تحلیلی در نظر گرفته می‌شد. در اواسط قرن ۱۸، مفهوم تابع به دو یا چند عبارت تحلیلی در قسمت‌های مختلف مثل کشیدن منحنی‌های دست-آزاد^{۱۲} توسعه داده شد [۹]. قرن ۱۷ و ۱۸ بیشتر ریاضیدانان تابع را به عنوان یک کمیت، عمل، فرمول، عبارت، و یا رابطه تعریف می‌کردند [۷].

^۱جدول‌هایی که با داشتن طول ضلع مربع، مساحت محاسبه می‌شود و برعکس.

^۲Insook ^۳Descartes ^۴Ponte ^۵Leibniz ^۶Constant ^۷Variable ^۸Parameter ^۹Quantities ^{۱۰}Bernoulli ^{۱۱}Cantor ^{۱۲}Freehand

• قرن ۱۹:

اما دهه‌های اول قرن ۱۹ شاهد ظهور مفهومی از تابع تحت عنوان تناظری دلخواه بود. با این تغییر دیدگاه، ریاضیدانان در حساب دیفرانسیل و انتگرال، تحولاتی به وجود آوردند [۹] و ریاضیدانان برای صورت‌بندی همه ریاضیات با استفاده از نظریه مجموعه‌ها تلاش کردند. در قرن نوزدهم و اوایل قرن ۲۰ تابع از سوی ریاضیدانان به عنوان قوانین تناظر - بین مجموعه‌ها - تعریف شده است [۷]. بررسی قرن نوزدهم نشان می‌دهد در سراسر قرن ۱۸ دیدگاه جبری در مورد تابع برقرار بود. اما در قرن ۱۹ دیدگاهی جدید وجود داشت که در آن یک قانون با تمرکز بر تناظر میان اعداد برقرار بود [۹]. مفهوم تابع با مجموعه‌هایی به عنوان دامنه و برد، نیز، به تدریج در قرن ۱۹ توسعه داده شد [۹].

در سال ۱۹۳۹ یک گروه ریاضیدان با نام مستعار بورباکی^{۱۳} تابع را رابطه‌ای بین دو مجموعه تعریف کردند [۷]. به گفته اینسوک [۷] تعریف ارائه شده به این صورت بود: فرض کنید E و F دو مجموعه باشند، یک رابطه بین x از E و y از F یک تابع است اگر در آن به هر x از E یک y منحصر به فرد از F نسبت داده شود. بنابراین در قرن ۱۹ تابع به عنوان رابطه‌ای میان دو مجموعه تعریف شده است.

• قرن ۲۰: در قرن بیستم، تابع همه تناظرهای دلخواهی را که در شرط یکتایی بین مجموعه‌های عددی صدق می‌کردند را شامل می‌شد [۱۱]. مفهوم تابع در این قرن با نظریه مجموعه‌ها و مفاهیم دامنه، برد و قانونی که به هر عضو از دامنه یک عضو منحصر به فرد از برد را نسبت می‌دهد، معرفی شده است. به گفته کلاینر [۸] این قرن را می‌توان حضور یک دیدگاه مفهوم منطقی جدید (مجرد، ترکیبی و اصل موضوعی) از توابع تلقی کرد. در حقیقت مفهوم تابع یکی از ویژگی‌های ریاضیات مدرن در برابر ریاضیات کلاسیک است.

با توجه به تاریخ گسترش تابع می‌توان تکامل مفهوم تابع را به صورت زیر خلاصه کرد.

- در قرن ۱۷ و ۱۸ ریاضیدانان بیشتر تابع را به عنوان یک کمیت، عمل، فرمول، عبارت، و یا رابطه تعریف می‌کردند و در قرن ۱۹ و اوایل قرن ۲۰ ریاضیدانان تابع را به عنوان قوانین تناظر تعریف کرده‌اند [۷].
- در قرن ۱۷ و ۱۸ تعاریف وابسته به طبیعت تابع هستند - مبتنی بر مفهوم و کاربرد تابع - و در قرن ۱۹ و ۲۰ یک طبیعت دلخواه و یک ارزشی از تابع - دیدگاهی مجرد بر اساس مجموعه‌ها - دیده می‌شود [۷].
- تاریخ تابع نشان می‌دهد در مورد تابع در قرن ۱۷ دیدگاه هندسی و در قرن ۱۸ دیدگاه جبری برقرار بوده است و در قرن ۱۹ و ۲۰ دیدگاه تناظر میان مجموعه‌ها در مورد تابع برقرار می‌باشد.

کلاینر^{۱۴} [۹] بیان می‌کند شاید تعجب آور باشد که این مفهوم ابتدایی به نام تابع، چنین تاریخ غنی و متنوعی دارد. از طرف دیگر، محوریت این مفهوم در تجزیه و تحلیل و به طور کلی، در ریاضیات باعث می‌شود پیچیدگی تاریخ تابع قابل قبول باشد.

۳. مفاهیم و تعاریف تابع در گذر زمان

به گفته پونته [۱۱] مفهوم تابع و موارد خاص از توابع را می‌توان در دوره باستان یافت. به عنوان مثال، شمارش، که بر تناظر میان مجموعه‌ای از اشیاء و یک دنباله از اعداد دلالت می‌کند یا چهار عمل اصلی، که توابع دو متغیره هستند. مطالعه تاریخ تابع نشان می‌دهد، لایب نیتز اولین کسی بود که اصطلاح تابع را در سال ۱۶۷۳، معرفی کرد. یعنی پیش از بیان اصطلاح صریح تابع، مفهوم تابع مورد استفاده بوده است.

¹³Bourbaki ¹⁴Kleiner

در جدول ۱ ماهیت‌ها و تعاریف وابسته به تابع به‌کار برده شده توسط ریاضیدانان بیان شده است. این مفاهیم و تعاریف، تاریخ و اهمیت این مفهوم را نشان می‌دهد.

جدول ۱: ماهیت وابسته از تابع - تعاریف تابع (برگرفته از [۷])

سال	توسط چه کسی	تعریف
۱۵ (۱۶۴۲ - ۱۵۶۴)	گالیله	نیاز به ابزار ریاضی برای مطالعه کمی پدیده‌های طبیعی.
۱۶ (۱۵۷۱ - ۱۶۳۰)	کپلر	نیاز به ابزار ریاضی برای مطالعه کمی پدیده‌های طبیعی.
۱۶۶۵	نیوتن	هر رابطه بین متغیرها.
۱۶۶۷	گرگوری	مقداری به دست آمده از مقداری دیگر توسط جانشینی جبری و انجام عملیات یا با هر عملیات دیگر (مثلاً: حدس زدن).
۱۶۷۳	لایب نیتز	هر مقادیر متفاوت نقطه به نقطه از منحنی.
۱۶۹۷	برنولی	مقادیر تشکیل شده با استفاده از روابط جبری و غیرجبری از متغیرها و ثابت‌ها می‌باشد.
۱۷۱۴	لایب نیتز	کمیتی که به یک متغیر بستگی دارد.
۱۷۱۸	برنولی	تابع یک کمیت از یک متغیر معینی است که در بعضی مواقع از آن متغیر و ثابت‌ها تشکیل شده است.
۱۷۴۸	اویلر	فرمول یا عبارت تحلیلی که در آن مقدار متغیر و اعداد یا مقدار ثابت، نشان دهنده رابطه بین متغیرهاست.
۱۷۹۷	لاگرانژ	هر گونه عبارتی که برای محاسبه مفید باشد که در آن متغیرها به هر روش وارد شوند.
۱۸۰۶	لاگرانژ	ترکیبی از مقدار شناخته شده و انجام عملیات برای بدست آوردن مقادیر مقدار ناشناخته، و آخرین نتیجه محاسبه اهمیت دارد.
۱۸۲۹	دیریکله	y تابعی از متغیر x ، در بازه $a < x < b$ است اگر متناظر با هر مقدار متغیر x در این فاصله یک مقدار معین y وجود داشته باشد. همچنین فرقی نمی‌کند به چه روشی این تناظر ایجاد شده باشد.
۱۹۱۷	کاراتئودوری	قانون تناظر از یک مجموعه به اعداد حقیقی.
۱۹۳۹	بورباکی	قانون تناظر میان دو مجموعه.
۱۹۳۹	بورباکی	فرض کنید E و F دو مجموعه باشند، که ممکن است متمایز باشند یا نباشند. ارتباط بین یک متغیر x از E و یک متغیر y از F یک رابطه تابعی در y نامیده می‌شود اگر، برای هر x در E ، y منحصر به فرد در F ، وجود داشته باشد (در رابطه داده شده با x).
پایان نیمه اول	دیریکله/بورباکی	هر گونه تناظر میان دو مجموعه که به هر عنصر در دامنه دقیقاً یک عنصر در برد نسبت داده شود.

^{۱۵} به گفته پونته [۱۱] به جدول اضافه شده است.

^{۱۶} به گفته پونته [۱۱] به جدول اضافه شده است.

با توجه به قدمت تاریخ، تنوع دیدگاه‌ها و تلاش‌ها برای معرفی تابع، که می‌توان آن را به عنوان یک محور اصلی و پیوند دهنده موضوعات مختلف در درون ریاضیات و همچنین یکی از پل‌های ارتباطی میان پدیده‌های طبیعی و علم ریاضی در بسیاری از موقعیت‌ها در نظر گرفت [۲] و از آن به عنوان عملی برای تشخیص تغییرات در جهان اطراف و شناسایی روابط بین تغییرات استفاده کرد [۷] که یکی از اهدافش نشان دادن چگونگی تغییرات است [۱۳]، و نیز با توجه به نقش مهم آن در ریاضیات مدرسه‌ای، این سوال پیش می‌آید که آیا ریاضیات مدرسه‌ای آن‌گونه که شایسته است برای آشنایی و استفاده دانش‌آموزان از مفهوم تابع، شرایط لازم را فراهم نموده است؟ به عبارت دیگر، تا چه اندازه از تاریخ تکامل مفهوم تابع در معرفی آن در ریاضی مدرسه‌ای بهره گرفته شده است؟

۴. تابع و ریاضیات مدرسه‌ای

با توجه به آن‌چه که گفته شد مشخص می‌شود در هر دوره از سیر تاریخی مفهوم تابع یک بازنمایی از بازنمایی‌های مربوط به تابع، شناخته شده است. به این ترتیب که قبل از قرن ۱۷ و در قرن ۱۷ تابع با بازنمایی نموداری شناخته شده بود و در قرن ۱۸ با بازنمایی جبری و در قرن‌های ۱۹ و ۲۰ تابع با بازنمایی مجموعه‌ای، تعریف شده است و این رویکرد در قرن حاضر نیز همچنان برقرار است. نکته قابل توجه در مورد تاریخ گسترش تابع این است که اگر چه مثلاً در مورد مسائلی نظیر «روش‌های حل معادله درجه دوم» با دستیابی به روش‌های کلی حل معادله درجه دوم، (روش دلتا) این روش‌ها جایگزین راه حل‌های گذشته (نظیر روش خوارزمی) شده‌اند^{۱۷}. اما این مسئله در مورد مفهوم تابع نمی‌تواند به این روند باشد. یعنی مفهوم تکامل یافته جدید، نمی‌تواند جایگزین مفهوم قبلی شود، زیرا در هر دوره از تاریخ غنی تابع، تنها بعدی از ابعاد این مفهوم شناخته شده است و همه این دوره‌ها، با هم کمک می‌کند تا مفهوم تابع، کامل شناخته شود. بنابراین برای بهبود آموزش تابع، توجه به تاریخ گسترش مفهوم تابع، به عنوان یک رویکرد تاریخی باید در نظر گرفته شود تا زمینه فهم و درک بهتر این مفهوم پیچیده و مهم ریاضی را برای دانش‌آموزان فراهم کند. در واقع، کنار گذاشتن تعاریف و تعبیرهای گوناگونی از تابع که در طی قرن‌ها متمادی توسط ریاضی‌دانان به دست آمده است، و بسنده کردن به رویکرد تناظری بین مجموعه‌ها (به عنوان آخرین بازنمایی شناخته شده در سیر تاریخ شکل‌گیری مفهوم تابع)، سبب می‌شود تا همه ابعاد تابع نمایان نشده و در نتیجه زمینه را برای درک محدود از تابع و عدم آگاهی بر از کاربردهای متنوع مفهوم تابع در ریاضیات، فراهم نماید.

در دوره «ریاضیات جدید^{۱۸}» که از دهه ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ شروع شد، مفهوم تابع در دوره متوسطه با استفاده از نظریه مجموعه‌ها و مفاهیم دامنه، برد و قانونی که به هر عضو از دامنه یک عضو منحصر به فرد از برد را نسبت می‌داد، معرفی شد. آموزش تابع با استفاده از دیدگاه تناظر بین مجموعه‌ها در ریاضیات مدرسه‌ای، باعث شده است که سایر تعاریف و ابعاد مفهوم تابع نادیده گرفته شود و این باعث شده که آموزش مفهوم تابع در مدرسه، امری دشوار باشد [۱۲]. به گفته پولاک^{۱۹} [۱۰] بسیاری از دانش‌آموزان مفهوم تابع را بطور عمیق درک نمی‌کنند. در واقع حذف تاریخ گسترش تابع در آموزش آن باعث بیان ناقص و درک محدود این مفهوم می‌شود. مسئله‌ای که در بررسی روش تدریس معلمان و چگونگی یادگیری دانش‌آموزان به خوبی می‌توان آن را مشاهده کرد.

۵. معلمان تابع را چگونه تدریس می‌کنند؟

بسیاری از مدرسان و استادان ریاضی معتقدند استفاده از تاریخ ریاضی در فرآیند یاددهی و یادگیری ریاضی مفید است. تاریخ ریاضی، جاذبه‌های زیادی برای یادگیرندگان ریاضی ایجاد می‌کند و ابزار مناسبی برای معلم ریاضی در کلاس

^{۱۷} اگرچه در آموزش ریاضی مدرسه‌ای برخی کشورها، روش دلتا آموخته نمی‌شود و دانش‌آموزان برای حل معادله درجه ۲ از روش مربع کامل کردن، استفاده می‌کنند.
^{۱۸} برای آگاهی بیشتر از دوره «ریاضی جدید» به مقاله «واکنش‌های پس از ریاضی جدید» در شماره ۵۴ از مجله علمی-ترویجی فرهنگ و اندیشه ریاضی مراجعه شود

درس ریاضی است تا از طریق آن، دانش‌آموزان را با چهره انسانی ریاضی آشنا کند. در آموزش تابع عدم آگاهی معلمان مدرسه و مدرسان دانشگاهی از تاریخ تکامل مفهوم تابع، سبب شده تا تدریس تابع در اغلب موارد به صورت یک بعدی (عدم توجه به بازنمایی های مختلف تابع و توجه صرف به تناظر بین مجموعه ها) باشد و یادگیرندگان نیز درک عمیقی از مفهوم تابع کسب نکنند. برای درک بهتر این مسئله، روش تدریس ۲۰ معلم از دبیرستان های استان کرمان، از طریق مشاهده مورد بررسی قرار گرفت. تجزیه و تحلیل داده های حاصل از مطالعه نشان داد که معرفی مفهوم تابع در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، بر مبنای آخرین بازنمایی شناخته شده از تابع، یعنی بر مبنای رویکرد تناظر میان مجموعه‌ها (زوج مرتبی)، ارایه می شود. استفاده از این رویکرد سبب شده تا این مفهوم مهم ریاضی به درستی درک نشود. در واقع حذف تاریخ تکامل مفهوم تابع، موجب شده تا یادگیرندگان، به اهمیت و کاربردهای تابع آگاه نشوند و درک عمیقی نیز از این مفهوم نداشته باشد. تدریسی که در ریاضیات مدرسه‌ای صورت می‌گیرد، غالباً مجرد و بدون در نظر گرفتن ماهیت، اصالت و هدف اصلی تابع، بود. این روش علاوه بر آنکه دانش‌آموزان را در رسیدن به اهداف آموزش تابع کمک نمی کند، بلکه باعث می شود درک محدودی از مفهوم تابع پیدا کنند.

به نظر می رسد که رویکرد تناظر میان مجموعه‌ها (زوج مرتبی) برای معرفی تابع، برگرفته از کتاب درسی ریاضی پایه دهم باشد. چرا که در آخرین ویرایش کتاب درسی ریاضی پایه دهم در سال ۱۳۹۸، علاوه بر این که لوحه (صفحه اول) فصل مربوط به تابع با یک واقعیت اجتماعی مربوط به کاهش جمعیت جوان کشور در آینده، آغاز می شود؛ ولی معرفی تابع با استفاده از مفهوم مجموعه و زوج مرتب ارایه می گردد و خیلی زود، در صفحه دوم معرفی تابع، تعریف صوری تابع بر اساس مفهوم زوج مرتب ارایه می گردد. معلمان شرکت کننده در مطالعه حاضر نیز با تبعیت از همین رویکرد، تابع را در کلاس درس خود تدریس می کردند.

نتایج بررسی کلاس های درس این ۲۰ معلم نشان داد که معرفی تابع در کلاس درس ریاضی، به این صورت است که پس از ارایه تعریف تابع و بیان چند مثال، ویژگی های تابع مورد بررسی قرار می گیرد. بر اساس پیشینه نظری موجود، به نظر می رسد یکی از مهم ترین چالش ها در آموزش تابع، تعریف تابع است. تعریف تابع در یک گستره متنوع از زمینه ها می تواند ارائه شود. مثلاً نمودارهای پیکانی، توصیفات جبری و ... اما آیا با ارائه یک تعریف کار تمام است؟ [۴] آیا این مفهوم برای دانش‌آموزان قابل فهم و درک خواهد بود؟ آیا می توان انتظار داشت این مفهوم بدون در نظر گرفتن پیش نیازهای لازم، از سوی دانش‌آموزان درک شود؟

به گفته تال و وینر^{۲۰} [۱۴]، معمولاً معلم یک تعریف رسمی از تابع ارائه می دهد و فقط برای مدت زمان کوتاهی با این مفهوم کلی کار می کند؛ ولی برای یک دوره طولانی، تمام مثال هایی که برای توابع زده می شود به صورت فرمول خواهد بود. در این تدریس نوعی، توجه به دو نکته اهمیت دارد: اول این که دانش‌آموزان باید در این مدت کوتاهی، تعریف تابع را درک کرده و بتوانند از این مفهوم در حل مسائل مختلف استفاده نمایند. دانش‌آموزانی که موفق به درک مفهوم تابع نشوند، طبق نتایج مطالعات، برداشت های خود را جایگزین تعریف رسمی تابع می کنند و در کار کردن با این مفهوم حتی در سال های بعد نیز همچنان مشکل خواهند داشت. نکته دیگر، نوع تعریف ارائه شده از سوی معلم است. زیرا در آموزشی که تعاریف یکی از پایه های اصلی آن را تشکیل می دهند، توجه به نوع این تعاریف ضروری به نظر می رسد.

معلمان برای تدریس کارآمدتر در کنار تعریف تابع از چند مثال - که عمدتاً بر پایه برداشت های خودشان از مفهوم تابع و یا از مثال های کتاب درسی است - برای دانش‌آموزان استفاده می کنند. این تدریس به گفته تال و باکار^{۲۱} [۱۲] با تجربه روزمره دانش‌آموزان برای درک مفاهیم در تضاد است زیرا در زندگی روزمره، توسعه مفاهیم با مذاکرات پیوسته، صورت می گیرد، تا یک قسمت ریشه دار از ذهن انسان شود. در غیر این صورت دانش آموز برداشت های خود را جایگزین مفهوم اصلی می کنند.

²⁰Tall & Vinner ²¹Tall & Bakar

تال و باکار [۱۲] مثالی از این گونه تدریس بیان می کنند که در آن برای توسعه مفهوم پرنده، ابتدا معلم چند مثال از پرنده ارائه می دهد و سپس بر ویژگی های برجسته یک پرنده تمرکز می کند. معلم مثال می زند کبوتر، گنجشک و ... پرنده هستند و یک پرنده « پرواز می کند، ... بال ... و پر ... و منقار دارد ... و تخم می گذارد ». با این تدریس اگر از دانش آموز سوال شود آیا مرغ پرنده است؟ دانش آموز فکر می کند مرغ بال، پر و منقار دارد، اما پرواز نمی کند. پس نمی تواند پرنده باشد. باز هم معلم به دانش آموز توضیح می دهد بعضی از پرندگان پرواز نمی کنند. انتظار می رود دانش آموز در برخورد با این سوال ها که آیا خفاش پرنده است؟ آیا پنگوئن پرنده است؟ چگونه پاسخ دهد؟ در واقع در این روش دانش آموز با توجه به توضیحات معلم - و نه بر اساس درگیر شدن خودش با مفهوم اصلی - یک طرحواره^{۲۲} ذهنی برای خودش می سازد که حتی ممکن است با مفهوم اصلی در تضاد باشد و وقتی با مثال های جدیدی مواجه می شود به علت تسلط نداشتن بر موضوع، دچار سردرگمی یا بدفهمی می شود.

روند آموزشی ما در تدریس تابع به همین گونه است. مثلاً معلم توضیح می دهد تابع یعنی پیروی یعنی یک متغیر از متغیر دیگری پیروی می کند. یعنی y از x پیروی می کند، و زمانی که از دانش آموز پرسیده می شود آیا $y = 4$ تابع است؟ دانش آموز نگاه می کند و می بیند که x در این عبارت نیست، پس جواب می دهد: خیر، این تابع نیست. پرهیزگار [۱] بیان می کند که بیش از ۸۰ درصد دانش آموزان، $y = 4$ را تابع به حساب نمی آورند. چون x در عبارت مشاهده نمی کنند. با اتخاذ چنین رویکردی در آموزش مفهوم تابع، دانش آموزان درکی ضعیف و متناقض از مفهوم تابع خواهند داشت. تال و باکار [۱۲] بیان می کنند تابع یک مفهوم پیچیده است وقتی تدریس این مفهوم پیچیده در ابتدا با مثال ها یا غیرمثال ها^{۲۳} معرفی می شود که نمونه های اولیه برای این مفهوم هستند، به طور طبیعی فهم آن ها محدود شده و ممکن است با مفهوم اصلی هم در تعارض باشد. در واقع بسیاری از مشکلات دانش آموزان در ریاضیات مدرسه ای نتیجه آموزش انتزاعی مفاهیم، بدون توجه به زمینه واقعی آنهاست [۱۱].

تال و باکار (۱۹۹۲) نشان دادند با این آموزش اگر چه دانش آموزان قادرند از توابع در ریاضیات کاربردی خود استفاده کنند اما برداشت آن ها از مفهوم تابع می تواند ضعیف و متناقض باشد. علاوه بر این ثابت شده اگر چه تعریف تابع، در کتاب درسی ارایه شده است، اما درک دانش آموزان از مفهوم تابع بیشتر به ویژگی های مثال های اولیه ای که با آن آشنا شده اند، مربوط می شود. غلام آزاد [۵] در این زمینه بیان می دارد که شهود دانش آموزان در مورد این که چه چیزی تابع است، بیشتر به اولین مثالی از تابع که دانش آموزان با آن برخورد می کنند بستگی دارد تا تعریف رسمی تابع.

اینسوک [۷] در تحقیقی به بررسی تعاریف ارائه شده از سوی معلمان در زمان تدریس تابع پرداخته است. او بیان می کند بسیاری از معلمان معمولاً بر این باورند که تعاریف باید در کلمات و عبارات آموزش داده شوند. او ابراز می کند معلمان در تدریس خود از سه نوع تعریف (به شرح ذیل) برای فهمیدن این مفهوم توسط دانش آموزان، استفاده می کنند.

- تعریف منطقی^{۲۴}: تعریف تابع با استفاده از تعریف زوج مرتب (تابع رابطه میان دو مجموعه P و Q است که در آن هر عنصر P دقیقاً به یک عنصر از Q مربوط می شود).
- تعریف قیاسی^{۲۵}: تعریف تابع به عنوان یک ماشین یا دستگاه (با ورودی و خروجی).
- تعریف ژنتیکی^{۲۶}: در این تعریف، تابع یک رابطه بین دو متغیر است به طوری که تغییر در یکی، موجب تغییر در دیگری می شود^{۲۷}.

^{۲۷} هدف از این تعریف توجه به تغییرات است. تعریف ژنتیکی بیان شده از سوی معلمان، در مطالعه اینسوک برای تابع، به این شکل یک تعریف ناقص می باشد. چرا که به عنوان مثال این تعریف، تابع ثابت را شامل نمی شود، یا $y^2 = x$ را شامل می شود، که البته این رابطه تابع نمی باشد.

نتایج مطالعه روش تدریس ۲۰ معلم شرکت کننده در مطالعه حاضر، نشان می‌دهد که معلمان مورد بررسی نیز از تعاریف منطقی، قیاسی و ژنتیکی در معرفی تابع، استفاده می‌کردند. در جدول شماره ۲ علت استفاده از هر تعریف توسط معلمان و معایب استفاده از آنها به تنهایی بیان شده است.

جدول ۲: علت استفاده از سوی معلمان و معایب استفاده از این تعاریف به تنهایی

تعریف	علت استفاده از سوی معلمان	معایب استفاده از تعریف به تنهایی
منطقی	قابل فهم‌تر است، چون بر اساس نظریه مجموعه‌ها تعریف می‌شود.	۱. تعریف منطقی اجازه نمی‌دهند دانش آموزان ارتباط مفهوم تابع را با زمینه‌های عملی کشف کنند. در واقع این تعریف بازدارنده پرورش ارزش کاربردی تابع در زندگی دانش‌آموزان است. ۲. این تعریف فقط بخشی از ویژگی‌های مفهوم تابع را نشان می‌دهد.
قیاسی	به آسانی قابل درک است، (هدف از این قیاس تشبیه یک مفهوم ناآشنا (تابع) به یک مفهوم آشنا (ماشین) برای دانش‌آموزان است)	۱. استفاده بد یا استفاده زیاد از تعریف قیاسی، برای یادگیری بیشتر و بعدی (به منظور ایجاد درک درست و عمیق از مفهوم تابع توسط دانش‌آموزان) مضر است. ۲. این تعریف فقط بخشی از ویژگی‌های مفهوم تابع را نشان می‌دهد.
ژنتیکی	این رویکرد در زندگی روزمره دانش‌آموزان کاربرد دارد.	وقتی به صورت سنتی از آن استفاده می‌شود، اکثر دانش‌آموزان نمی‌توانند آن را به راحتی درک نمایند.

نتیجه این‌که اگر چه معلمان باید با انواع تعاریف، مزایا و معایب هر نوع تعریف، برای استفاده در تدریس خود آشنا باشند؛ اما ارایه تعاریف به تنهایی، کافی نیست و لازم است با استفاده از مثال‌های دنیای واقعی، کاربردهای تابع به خوبی برای دانش‌آموزان تبیین شود.

۶. بحث و نتیجه‌گیری

در پاسخ به سوال اصلی پژوهش حاضر درباره چگونگی استفاده معلمان ریاضی از تاریخ تکامل مفهوم تابع در تدریس شان، باید اذعان داشت که معلمان شرکت کننده در این مطالعه غالباً از سیر تحول و شکل‌گیری مفهوم تابع در تدریس شان استفاده نمی‌کردند و غالباً با روش تدریس نوعی، مفهوم تابع را تدریس می‌کردند؛ که معمولاً از تعریف صوری شروع شده و به بیان چند مثال و بررسی ویژگی‌های تابع ختم می‌شود.

یکی از یافته‌های مطالعه حاضر این بود که برخی از معلمان، خودشان نیز درک عمیقی از مفهوم تابع نداشتند. این نتیجه با نتایج برخی از پژوهش‌های قبلی همسو بود. به عنوان مثال، پژوهش حیدری [۳] نیز نشان داد که معلمان ریاضی، درک درستی از تابع و ارتباط میان بازنمایی‌های آن ندارند. همچنین پژوهش ریحانی [۴] که به بررسی تصورات، برداشت‌ها و دیدگاه‌های معلمان ریاضی از مفهوم تابع پرداخته است، نشان می‌دهد که معلمان ریاضی، خودشان نیز تابع را خوب درک نکرده‌اند. در این زمینه لازم است در دوره‌های آموزش قبل از خدمت و ضمن خدمت معلمان ریاضی به آموزش مفهوم تابع با استفاده از رویکرد تاریخ تکاملی این مفهوم بیشتر توجه شود.

استفاده از رویکرد تناظر میان مجموعه‌ها (به تنهایی) در تدریس تابع، سبب شده تا تابع به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب در ذهن دانش‌آموزان شکل بگیرد به طوری که اگر از دانش‌آموزان خواسته شود تابع را تعریف کنند، اغلب آنها بیان می‌کنند «مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که هیچ کدام از آنها مولفه اول یکسانی نداشته باشند» آیا این تعریف ناقص گویای همه ابعاد تابع هست؟ آیا با این برداشت کم و ناقص می‌توان انتظار داشت دانش‌آموزان در مقاطع بالاتر و با گذراندن درس‌های بیشتر در ریاضی، دچار بدفهمی‌های بیشتری نشوند و مطالب بعدی را به درستی بیاموزند؟ برای شکل‌گیری بهتر مفهوم تابع می‌توان از ظرفیت بی‌بدیل تاریخ تکامل مفهوم تابع استفاده کرد. رویکردی که برخی از آموزشگران بزرگ نیز به آن معتقد بودند که از جمله می‌توان به هانس فرودنتال^{۲۸} ریاضیدان و آموزشگر ریاضی هلندی اشاره کرد که خود مبدع روشی متفاوت تحت عنوان «آموزش ریاضی واقعیت مدار»^{۲۹} در دنیا بود.

مراجع

- [۱] ز. پرهیزگار، درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی تابع، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۸۷.
- [۲] م. توفیقی، بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه دوم رشته‌های تجربی و ریاضی در مورد مفهوم تابع در شهر استهبان در سال تحصیلی ۸۷-۸۶، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۳۸۷.
- [۳] ا. حیدری، دانش موضوعی و دانش پداگوژیکی محتوای معلمان آینده از مفهوم تابع، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۳۸۹.
- [۴] ا. ریحانی، آموزش تابع، برخی رویکردها و چالش‌ها، چاپ شده در مجموعه گزیده مقالات نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شهریور ۱۳۸۶، زاهدان، ایران. صص ۱۱۸-۱۱۱.
- [۵] س. غلام‌آزاد، دوباره‌نگری به برنامه جبر دبیرستانی، رشد آموزش ریاضی، شماره ۶۳، ۱۳۸۰، ۱۲-۴.
- [6] H. Akkoc and D. Tall, The Simplicity, Complexity and Complication of the Function Concept, In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematic Education*, **2** (2002) 25-32.
- [7] Ch. Insook, Mathematical and Pedagogical Discussions of the Function Concept, *Research in Mathematical Education*, **3** (1999) 35-56.
- [8] I. Kleiner, Evolution of the Function Concept: A Brief Survey, *The College Mathematics Journal*, **20** (1989) 282-300.
- [9] I. Kleiner, Functions: Historical and pedagogical aspects, *Science and Education*, **2** (1993) 183-209.
- [10] M. V. Polaki, Working with functions without understanding: an Assessment of the Perceptions of Basotho college mathematics specialists on the idea of function, *Eurasia journal of mathematics, Science and Technology Education*, **1** (2005).
- [11] J. P. Ponte, The History of the Concept of Function and Some Educational Implications, *The Mathematics Educator*, **3** (1992) 3-8.
- [12] D. Tall and M. Bakar, Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, **231** (1992) 39-50.
- [13] D. Tall, Functions and Calculus, In A. J. Bishop et al (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, (1997), 289-325.
- [14] D. Tall and Sh. Vinner, Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12** (1981) 151-169.
- [15] A. P. Youschkevitch, The concept of function up to the middle of the 19th century, *Archive for History of Exact Sciences*, **16** (1976) 37-85.

^{۲۹} برای آگاهی بیشتر از «آموزش ریاضی واقعیت مدار» به مقاله «واکنش‌های پس از ریاضی جدید» در شماره ۵۴ از مجله علمی-ترویجی فرهنگ و اندیشه ریاضی مراجعه شود

²⁸Hans Freudenthal ²⁹Realistic Mathematics Education

ابوالفضل رفیع پور

کرمان، دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش ریاضی

rafiepour@uk.ac.ir

ابوالفضل رفیع پور متولد سال ۱۳۵۸ در شهر تهران است. وی در سال ۱۳۷۶ وارد دوره کارشناسی دبیری ریاضی دانشگاه زنجان گردید. او در سال ۱۳۸۰ دوره کارشناسی ارشد خود را در رشته آموزش ریاضی، در دانشگاه شهید بهشتی آغاز کرد. ایشان فارغ التحصیل دوره دکتری ریاضی با تمرکز بر آموزش ریاضی از دانشگاه شهید بهشتی است و رساله خود را تحت نظر سرکار خانم دکتر زهرا گویا به پایان رسانیده اند. او از سال ۱۳۸۹ وارد بخش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان شد و هم اکنون به عنوان دانشیار بخش آموزش ریاضی به فعالیت های آموزشی و پژوهشی خود در این دانشگاه ادامه می دهد. یک دوره ریاست خانه ریاضیات کرمان، دو دوره نایب رییس شورای خانه های ریاضیات ایران و دو دوره همکاری در هیات تحریریه مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی از جمله سوابق علمی-اجرایی ایشان است. او هم اکنون نماینده انجمن ریاضی ایران در کمیسیون بین المللی تدریس ریاضی (ایکمای) است.



مریم محسنی

کرمان- زرند- اداره آموزش و پرورش زرند

m.mohseni@gmail.com

مریم محسنی متولد سال ۱۳۵۵ در شهر زرند از توابع استان کرمان است. وی در سال ۱۳۷۴ وارد دوره کارشناسی دبیری ریاضی در دانشگاه شهید باهنر کرمان شد. ایشان فارغ التحصیل دوره کارشناسی ارشد آموزش ریاضی از دانشگاه شهید باهنر کرمان است. او پایان نامه خود را تحت نظارت آقای دکتر ابوالفضل رفیع پور به پایان رسانیده است و هم اکنون مشغول تدریس در دبیرستان های شهرستان زرند می باشد.

