

آنالیز سازنده بیشاپ و مقایسه آن با آنالیز کلاسیک

رضا ستوده و حمیدرضا گودرزی*

چکیده. در این مقاله، منطق شهودی برآور در ریاضیات و آنالیز ریاضی سازنده بیشاپ مبتنی بر این منطق را معرفی کرده و تفاوت‌های آن‌ها با منطق و آنالیز ریاضی کلاسیک را بیان می‌کنیم. تفاوت بنیادی آنالیز سازنده با آنالیز کلاسیک در این است که در آنالیز سازنده بر خلاف آنالیز کلاسیک، همواره راهکار و الگوریتم یافتن عناصر مطلوب در قضایای وجودی، ارائه می‌شود و لذا می‌توان این نوع از آنالیز ریاضی را یک نوع زبان برنامه‌نویسی سطح بسیار بالا قلمداد کرد. به منظور آشنایی دقیق با روش‌های استدلال سازنده، ابتدا دستگاه اعداد حقیقی را با یک روش سازنده ساخته و تفاوت‌های اصولی آنالیز سازنده نسبت به آنالیز کلاسیک را که ریشه در خواص شناخته شده اعداد حقیقی دارد، تبیین می‌نماییم. در ادامه، چند قضیه وجودی در آنالیز کلاسیک و معادل سازنده آنها را بیان می‌کنیم. خواهیم دید که در اکثر مواقع، قضایای وجودی دقیق در آنالیز کلاسیک، به قضایای وجودی تقریبی در آنالیز سازنده تبدیل می‌شوند.

۱. مقدمه

از جمله مهم‌ترین و کاربردی‌ترین قضیه‌های ریاضی، آن‌هایی هستند که تحت شرایطی خاص، وجود یک شیء ریاضی را تضمین می‌کنند. از جمله این قضایای وجودی می‌توان به قضیه مقدار میانی، قضیه رول و قضیه مقدار میانگین در آنالیز ریاضی مقدماتی، قضیه نقطه ثابت برآور و قضیه انقباضی باناخ در نظریه نقطه ثابت و قضایای نمایشی ریس در نظریه اندازه و عملگر اشاره کرد. یک رویه رایج در اثبات قضایای وجودی در آنالیز کلاسیک، استفاده از برهان خلف است. یعنی نشان دادن اینکه فرض عدم وجود شیء مورد ادعای قضیه، به تناقض انجامیده و غیرممکن است. در گزاره بعد، نمونه‌ای از این روش اثبات آورده می‌شود.

۱.۱. گزاره. اعداد گنگ a و b وجود دارد به طوری که a^b گویا باشد.

اثبات. به برهان خلف فرض کنیم چنین نباشد. پس برای هر دو عدد گنگ a و b ، عدد a^b گنگ است. به خاطر گنگ بودن عدد $\sqrt{2}$ و بنا به فرض خلف، عدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ هم گنگ خواهد بود. با استفاده مجدد از فرض خلف، عدد

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

□

هم گنگ خواهد بود که تناقض است. لذا فرض خلف باطل بوده و گزاره برقرار است.

عبارات و کلمات کلیدی. منطق شهودی برآور، آنالیز سازنده بیشاپ، اصل طرد شق میانی، قضیه وجودی.

دبیر تخصصی رابط: محمد صالح مصلحیان

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۰۷

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.110442.1274

در اثبات با روش برهان خلف، یک برهان سازنده یعنی یک روش مستقیم یا الگوریتم معین برای یافتن شیء مورد ادعا ارائه نمی‌شود. در این‌جا منظور از یک الگوریتم، تعدادی متناهی فرآیند یا پردازش مرحله به مرحله با استفاده از فرضیات موجود است، به طوری که بتوان با انجام آن‌ها به شیء مورد نظر دست یافت. اگر الگوریتمی به این معنا وجود داشته باشد، می‌توان با استفاده از زبان‌های برنامه‌نویسی، برنامه‌های کامپیوتری از آن استخراج کرد و در موارد کاربردی، کار یافتن آن اشیاء را به دستگاه‌های قابل برنامه‌ریزی سپرد که برای همان منظور خاص طراحی می‌شوند. از این تکنیک به‌طور نظری می‌توان در طیف وسیعی از کاربردها، نظیر حل معادلات دیفرانسیل، یافتن نقاط ثابت توابع، توسعه نرم‌افزارهای محاسباتی و فن‌آوری‌های کامپیوتری مبتنی بر هوش مصنوعی بهره برد.

آنالیز سازنده^۱ دیدگاهی نو و کاربردگرا است که از درون آنالیز کلاسیک برای پاسخ‌گویی به نیازهای واقعی در دنیای امروزی به وجود آمده است. در آنالیز سازنده، هرگاه ادعایی درباره وجود یک شیء می‌شود، باید در حین اثبات آن ادعا، راهکار و الگوریتم رسیدن به آن شیء هم بیان شود. در واقع آنالیز سازنده را می‌توان یک نوع زبان برنامه‌نویسی سطح بسیار بالا قلمداد کرد. تاکنون برنامه‌های کامپیوتری زیادی از قضایای آنالیز سازنده استخراج شده است (به عنوان نمونه، [۳] و [۱۳] را ببینید). همین مسأله باعث توجه بیشتر در سال‌های اخیر به دیدگاه سازنده در ریاضیات، به خصوص در کشورهایی مانند ژاپن شده و تاکنون مقالات زیادی از پژوهشگران این حوزه منتشر شده است.

در آنالیز سازنده، آن دسته از قضایای وجودی آنالیز کلاسیک که اثبات آنها سازنده باشد یا بتوان اثباتی سازنده برای آنها ارائه کرد، پذیرفته می‌شوند و در غیر این صورت مورد پذیرش قرار نمی‌گیرند. مثلاً اثبات آورده شده برای گزاره ۱.۱ سازنده نیست، در حالی که اثبات زیر برای همین گزاره، سازنده است.

اثباتی سازنده برای ۱.۱. با توجه به گنگ بودن اعداد e (عدد نپر) و $\log_e 2$ ، قرار می‌دهیم $a = e$ و $b = \log_e 2$. در این صورت عدد $2 = e^{\log_e 2} = a^b$ گویا است. □

معیار رسمی سازنده بودن یا نبودن یک اثبات، منطق حاکم بر آنالیز سازنده است که منطق شهودی^۲ نام دارد. در بخش بعد، آنالیز سازنده مبتنی بر منطق شهودی را به اختصار شرح داده و تفاوت‌های آن با آنالیز مبتنی بر منطق کلاسیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲. تاریخچه‌ای مختصر از منطق شهودی و آنالیز سازنده

براور^۳، ریاضی‌دان، عارف و فیلسوف مشهور هلندی که بیشتر به خاطر قضیه نقطه ثابت منسوب به او معروف است، در سال ۱۹۰۷ در رساله دکترای خود با عنوان “در مورد اصول ریاضی^۴” از منطق افلاطونی و دو ارزشی ریاضیات کلاسیک (که اصل طرد شق میانی^۵ به منزله قلب تپنده آن است) انتقاد کرد. او منطق مورد نظر خود را که امروزه منطق شهودی نامیده می‌شود، معرفی کرده و پیشنهاد داد که این منطق جایگزین منطق دو ارزشی کلاسیک شود.

در منطق شهودی، اشیاء ریاضی موجودیت نمی‌یابند مگر وقتی که ساخته شوند. براور از قضیه نقطه ثابت خودش (بخش ۶ را ببینید) احساس رضایت نمی‌کرد، چون نمی‌توانست نقطه ثابت بسیاری از توابع را که در شرایط این قضیه صدق می‌کنند، بیابد^۶. این مسأله باعث به وجود آمدن این اعتقاد در او شد که وجود قابل شدن برای یک موجود ذهنی و ایده‌آل که در عمل واقعاً قابل ساختن نباشد، کاری ارزشمند در ریاضیات نیست.

این دیدگاه براور، موجی عظیم از مخالفت‌ها را از سوی بسیاری از ریاضی‌دانان بر علیه او به راه انداخت. از جمله مشهورترین آنها دیوید هیلبرت، ریاضی‌دان و هندسه‌دان مشهور انگلیسی و بزرگ‌ترین مدافع منطق کلاسیک بود. درگیری‌های بسیار تلخ

^۴On the Foundations of Mathematics. ترجمه انگلیسی رساله در منبع [۷] صفحات ۱۳ تا ۱۰۱ آمده است.

^۵Law of Excluded Middle. بر اساس این اصل در منطق کلاسیک، اگر P یک گزاره باشد، $P \vee \neg P$ همواره درست است. درستی اثبات با روش برهان خلف، نتیجه‌ای از پذیرش این اصل است.

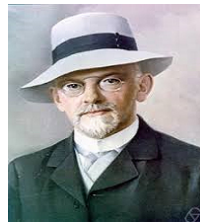
^۶نقطه ثابت یک تابع حقیقی، طول محل برخورد نمودار آن تابع با نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات است. به سادگی و با رسم نمودار تقریبی، قابل بررسی است که توابع پیوسته $f(x) = \cos(x) - x$ و $f(x) = 2^x - x$ نقطه ثابت دارند، اما یافتن این نقاط به شیوه تحلیلی بحثی چالش برانگیز است.



کولموگوروف



هیتینگ



هیلبرت



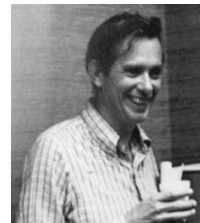
براور



هالموس



بریجز



بیشاپ

این ریاضی‌دانان بزرگ، فصلی ناگوار در تاریخ ریاضیات و فلسفه علم رقم زد. بررسی دلائل فلسفی این اختلاف نظرها خارج از حوصله این مقاله است، لذا به منظور آشنایی بیشتر با زندگی و افکار براور و فلسفه شهودی، خواننده علاقه‌مند را به [۱]، [۲]، [۱۴] و [۹] ارجاع می‌دهیم.

با وجود این مخالفت‌ها، براور همواره در دفاع از منطق شهودی مورد نظر خود می‌کوشید، اما هیچ وقت آن را به صورت رسمی شرح نداد. بعدها شاگردان و پیروان او از جمله آرنه هیتینگ^۷ و آندری کولموگوروف^۸ سعی کردند با بیان اصولی در این منطق، آن را رسمیت ببخشند [۱۱].

با وجود تلاش براور، هیتینگ و دیگر همفکران و پیروان براور برای گسترش منطق شهودی، تا اواخر دهه ۱۹۶۰ پیشرفت قابل توجهی برای این منطق در مقایسه با منطق کلاسیک حاصل نشد. تا اینکه در سال ۱۹۶۷ با انتشار کتاب اِرت بیشاپ^۹ ریاضی‌دان آمریکایی با عنوان "اصول آنالیز سازنده [۴]" اوضاع به شکل قابل توجهی تغییر کرد. بیشاپ در این کتاب که بعدها در سال ۱۹۸۵ توسط داگلاس بریجز^{۱۰} ریاضی‌دان اسکاتلندی تحت عنوان "آنالیز سازنده [۵]" تکمیل و باز نشر شد، به طور دقیق آنالیز سازنده را در طیف وسیعی از مفاهیم و مباحث از ساخت اعداد حقیقی گرفته تا نظریه اندازه و انتگرال، فضاهای باناخ، فضاهای هیلبرت و نظریه عملگرها معرفی و تبیین می‌نماید.

بیشاپ که درجه دکترای ریاضی خود را در زمینه نظریه عملگرها در سال ۱۹۵۵ زیر نظر پُل هالموس^{۱۱} ریاضی‌دان معروف آمریکایی کسب کرده بود، تا سال ۱۹۶۴ مطالعات عمیقی در زمینه نظریه عملگرها، آنالیز مختلط و آنالیز تابعی داشت. اما از این سال به بعد به آنالیز سازنده متمایل شد و بقیه عمر خود را صرف توسعه و ترویج آن نمود.

امروزه دیدگاه سازنده بیشاپ به آنالیز، مکتب BISHOP و منطق استفاده شده در آن به افتخار پیشگامان شهودگرای آن یعنی براور، هیتینگ و کولموگوروف، به اختصار منطق BHK خوانده می‌شود.

لازم به تذکر است که تاکنون علاوه بر مکتب سازنده BISHOP، مکتب سازنده و متفاوت دیگری موسوم به مکتب ریاضیات سازنده روسی^{۱۲} ارائه شده و توسعه یافته است. بررسی مکتب اخیر خارج از حوصله این مقاله است و خوانندگان علاقه‌مند به [۶] ارجاع داده می‌شوند.

⁷Arend Heyting ⁸Andrei N. Kolmogorov ⁹Erret A. Bishop ¹⁰Douglas S. Bridges ¹¹Paul R. Halmos ¹²Russian Constructive Mathematics

۳. منطق شهودی

منطق شهودی را اولین بار آرنه هیتینگ با بیان مجموعه‌ای از اصول رسمیت بخشید که امروزه به افتخار بانیان آن به اختصار منطق BHK خوانده می‌شود. در این منطق از رابط^{۱۳} های \vee (به معنی یا)، \wedge (به معنی و)، \Rightarrow (به معنی نتیجه می‌دهد) و \neg (به معنی نه) و همچنین سور^{۱۴} های \exists (به معنی وجود دارد) و \forall (به معنی برای هر، برای همه) استفاده می‌شود که برای گزاره‌های دلخواه P و Q به صورت زیر، تفسیر می‌شوند [۶]:

- منظور از $P \wedge Q$ این است که هم اثباتی سازنده برای P و هم اثباتی سازنده برای Q داریم.
- منظور از $P \vee Q$ این است که اثباتی سازنده برای P یا اثباتی سازنده برای Q داریم (و معین است که کدام یک).
- منظور از $P \Rightarrow Q$ این است که اگر اثباتی سازنده برای P داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از آن، اثباتی سازنده برای Q ارائه دهیم.
- منظور از $\neg P$ این است که فرض P به تناقض منجر می‌شود. منظور از تناقض، نتیجه‌ای است که با عبارات درست از قبل دانسته ما سازگار نباشد. مثلاً اگر x یک عدد صحیح باشد، عبارتی به صورت $x > 2 \wedge x < 1$ یک تناقض است. تناقض را به اختصار به صورت $\circ = 1$ نشان می‌دهیم. لذا $\neg P$ معادل است با $P \Rightarrow \circ = 1$.
- منظور از $\exists xP(x)$ این است که الگوریتم و یا روشی سازنده داریم که نشان می‌دهد شیء x وجود دارد و الگوریتمی داریم که نشان می‌دهد شیء x در شرایط P صدق می‌کند.
- منظور از $\forall xP(x)$ این است که الگوریتم و یا روشی سازنده داریم که روی هر شیء x که اعمال شود، شرایط P محقق می‌شود.

این منطق در واقع همان منطق کلاسیک است به استثناء اصل طرد شق میانی که این استثناء از تفسیر سور وجودی نتیجه می‌شود. زیرا در دیدگاه سازنده اگر روشی برای اثبات یک گزاره وجود نداشته باشد، معلوم هم نیست که لزوماً بتوان نقیض آن را ثابت کرد. ذکر این نکته لازم است که منطق شهودی ادعا نمی‌کند که اصل طرد شق میانی همواره نادرست است، بلکه درستی آن را به عنوان یک اصل برای هر گزاره‌ای نمی‌پذیرد. بنابراین هر گزاره‌ای در ریاضیات کلاسیک که در اثبات آن از اصل طرد شق میانی و یا نتایج و معادل‌های آن استفاده شده باشد، سازنده نیست. در چنین وضعیتی یا آن گزاره رد می‌شود و یا با ارائه اثباتی سازنده برای آن، پذیرفته می‌شود. عدم پذیرش اصل طرد شق میانی در آنالیز سازنده باعث محدودیت‌ها و تفاوت‌های زیادی در ارائه برهان نسبت به آنالیز کلاسیک شده است. همچنین بسیاری از نتایج رایج و بدیهی در مورد دستگاه اعداد حقیقی به دلیل غیرسازنده بودن، قابل استناد نیستند. جزئیات بیشتر در این مورد را در بخش ۵ هنگام ساخت دستگاه اعداد حقیقی بیان می‌کنیم.

۴. اصل طرد شق میانی، یک اصل همه چیز دان

بر اساس اصل طرد شق میانی که آن را در این مقاله به اختصار با LEM نشان می‌دهیم، اگر P یک گزاره منطقی باشد، $P \vee \neg P$ همواره درست است. اولین نتیجه این اصل این است که P و $\neg P$ هم‌ارز هستند. دیدگاه شهودی برآور با پذیرش این اصل مشکل داشت. اگر نتوانیم درستی گزاره‌ای را ثابت کنیم، معلوم هم نیست که لزوماً بتوانیم از پذیرش آن به تناقض برسیم. برآور خود در این باره می‌گوید [۶]:

”از دیدگاه شهودی، اعتقاد به درستی همیشگی اصل طرد شق میانی در ریاضیات، همانند اعتقاد به گویا بودن عدد π و یا اعتقاد به گردش آسمانها به دور زمین در روزگاران گذشته است.“

مثال‌های جالبی برای تأیید دیدگاه شهودی برآور وجود دارد. مثلاً فرض کنید P گزاره‌ای منطقی نظیر حدس گلدباخ^{۱۵} باشد که هنوز امکان اثبات یا رد آن در ریاضیات کلاسیک وجود نداشته باشد. در این صورت درستی $P \vee \neg P$ به این معناست که یا اثباتی برای این حدس و یا مثال نقضی برای رد این حدس وجود دارد که در هر حالت درست نبوده و لذا LEM قابل پذیرش نیست. در ادامه، تعاریف و گزاره‌هایی از آنالیز سازنده که آن را از آنالیز کلاسیک متمایز می‌کند، آورده می‌شود. اصطلاحات و نتایج مطرح شده در این مقاله از منابع [۵]، [۶] و [۱۰] استخراج و یا استنباط شده است.

^{۱۵}Goldbach's Conjecture. براساس این حدس، هر عدد طبیعی زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

¹³Connective ¹⁴Quantifier

۱.۴. **تعریف.** یک دنباله را دودویی^{۱۶} می‌نامیم اگر فقط بتواند مقادیر صفر یا یک را اختیار کند.

دنباله‌های دودویی ابزار بسیار مفیدی برای ساخت مثال‌های نقض در آنالیز سازنده هستند، هم‌چنان که در اثبات گزاره‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. گاه این‌گونه مثال‌های نقض، مثال‌های نقض برابری^{۱۷} خوانده می‌شوند.

۲.۴. **گزاره.** گزاره زیر، موسوم به اصل همه چیز دانی محدود^{۱۸} و یا به اختصار LPO، برقرار نیست.

– فرض کنید $\{a_n\}_{n \geq 1}$ یک دنباله دودویی باشد. در این صورت برای هر عدد طبیعی n ، $a_n = 0$ و یا اینکه عدد طبیعی k موجود است که $a_k = 1$.

اثبات. دنباله دودویی $\{a_n\}_{n \geq 1}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر حدس گلدباخ در مورد $2n + 2$ درست باشد، $a_n = 0$ و در غیر این صورت $a_n = 1$. در این صورت اگر برای هر عدد طبیعی n ، $a_n = 0$ برقرار باشد به معنی وجود یک اثبات برای حدس گلدباخ است و اگر عدد طبیعی k موجود باشد که $a_k = 1$ ، به معنی وجود یک مثال نقض برای رد حدس گلدباخ است که در هر صورت نادرست است. □

LPO را می‌توان این‌گونه توصیف کرد که الگوریتمی وجود دارد که روی هر دنباله دودویی که اعمال شود، شماره جمله‌ای از دنباله که مقدار ۱ را به خود می‌گیرد، معین می‌کند و یا اینکه تشخیص می‌دهد که همه جملات صفر هستند. کمی آشنایی با برنامه‌نویسی کامپیوتری، ناصحیح بودن چنین ادعایی را تأیید می‌کند. به بیان دقیق، اگر یک دنباله دودویی با جملات ثابت صفر به چنین الگوریتمی داده شود، الگوریتم وارد یک حلقه بینهایت شده و هیچ پاسخی را بر نمی‌گرداند. با استدلالی مشابه، داریم:

۳.۴. **گزاره.** گزاره زیر موسوم به اصل همه چیز دانی کمتر محدود شده^{۱۹} و یا به اختصار LLPO، برقرار نیست.

– فرض کنید $\{a_n\}_{n \geq 1}$ یک دنباله دودویی با حداکثر یک جمله برابر با ۱ باشد. در این صورت برای هر عدد طبیعی n ، $a_{2n} = 0$ و یا اینکه برای هر عدد طبیعی n ، $a_{2n+1} = 0$. اصل دیگری که آن را نمی‌توان با منطق شهودی ثابت کرد، به صورت زیر است.

۴.۴. **گزاره.** گزاره زیر موسوم به اصل مارکوف^{۲۰} و یا به اختصار MP، برقرار نیست.

– فرض کنید $\{a_n\}_{n \geq 1}$ یک دنباله دودویی بوده و امکان نداشته باشد که همه جملات آن صفر باشد. در این صورت عدد طبیعی k وجود دارد که $a_k = 1$.

لازم به تذکر است که هر کدام از گزاره‌های LPO، LLPO و MP (موسوم به اصول همه چیز دان^{۲۱}) در آنالیز کلاسیک با استناد به LEM بدیهی هستند، اما در آنالیز سازنده هر حکمی که به یکی از آنها منجر شود، غیر سازنده و لذا غیر قابل قبول است. از آنجا که سرمنشأ پیدایش آنالیز ریاضی، مطالعه بر روی اعداد حقیقی و بررسی ویژگی‌های آن در ارتباط با سایر مفاهیم ریاضی است، یک ورود مطلوب به آنالیز سازنده هم می‌تواند با ساخت اعداد حقیقی همراه باشد. لذا در بخش بعدی، اعداد حقیقی را با دیدگاهی سازنده معرفی کرده و نشان می‌دهیم که بعضی از اصول و نتایج به ظاهر بدیهی در آنالیز کلاسیک، مستلزم یکی از اصول همه چیز دان بوده و لذا غیرسازنده است.

۵. ساخت دستگاه اعداد حقیقی

پس از آشنایی با منطق حاکم بر آنالیز سازنده BISHOP، اولین کار لازم ساخت عدد و توصیف اعمال حسابی روی اعداد است. در قدم اول، اعداد صحیح و گویا با همان ویژگی‌های حسابی حاکم بر آنها در آنالیز کلاسیک پذیرفته می‌شوند. قدم بعد، ساخت اعداد حقیقی است. تاکنون روش‌های متعددی برای ساخت دستگاه اعداد حقیقی ارائه شده است. شرحی از این روش‌ها را می‌توان در [۱۵] و [۱۶] دید. با این که این روش‌ها کاملاً منطقی بوده و نیازمندی‌های یک میدان مرتب به همراه خاصیت کوچکتزین کران بالایی را به شکل مطلوبی برطرف می‌سازند [۱۲]، اما بعضی از آنها غیرسازنده بوده و به علاوه همان‌طور که در ادامه نشان می‌دهیم، پذیرش خاصیت کوچکتزین کران بالایی برای اعداد حقیقی منجر به LEM می‌شود. خوشبختانه معروف‌ترین روش‌ها برای ساخت اعداد حقیقی، یکی روش موسوم به برش ددکیند^{۲۲} و دیگری روش استفاده از دنباله‌های کوشی از اعداد گویا، هر دو سازنده هستند. در اینجا اعداد حقیقی با استفاده از دنباله‌های کوشی از اعداد گویا و با رویکردی سازنده معرفی می‌شوند.

¹⁶Binary ¹⁷Brouwerian Counterexamples ¹⁸Limited Principle of Omniscience ¹⁹Lesser Limited Principle of Omniscience ²⁰Markov's Principle ²¹Omniscience Principles ²²Dedekind Cut

۱.۵. **تعریف.** دنباله $\{x_n\}_{n \geq 1}$ از اعداد گویا، منظم^{۲۳} خوانده می‌شود اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad (\forall m, n \geq 1).$$

هر دنباله منظم از اعداد گویا را یک عدد حقیقی می‌نامیم. به طور سنتی، مجموعه اعداد حقیقی را با \mathbb{R} نشان می‌دهیم.

۲.۵. **مثال.** با تعریف $x_n = 10^{-n}$ ، دنباله $\{x_n\}_{n \geq 1}$ یک عدد حقیقی است، زیرا برای هر $m \geq n \geq 1$ داریم:

$$|x_m - x_n| = |10^{-m} - 10^{-n}| = 10^{-n} - 10^{-m} < 10^{-n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

هم‌چنین اگر q یک عدد گویا باشد، دنباله ثابت $\{q\}_{n \geq 1}$ یک عدد حقیقی است.

۳.۵. **تعریف.** دنباله‌های منظم $\{x_n\}_{n \geq 1}$ و $\{y_n\}_{n \geq 1}$ را مساوی یا هم‌ارز^{۲۴} می‌خوانیم اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad (\forall n \geq 1).$$

رابطه بالا یک رابطه هم‌ارزی روی اعداد حقیقی تعریف می‌کند. لازم به ذکر است که در آنالیز سازنده، رابطه تساوی یا هم‌ارزی به عنوان بخشی از تعریف یک مجموعه باید برای اعضای آن مجموعه تعریف شود و یک مجموعه با مشخص کردن اعضاء به همراه رابطه تساوی تعریف شده روی آن اعضاء، معین می‌شود. این امکان وجود دارد که روی یک مجموعه، رابطه‌های تساوی متفاوتی تعریف شود.

۴.۵. **تعریف.** عدد حقیقی $\{x_n\}_{n \geq 1}$ را در نظر بگیرید. اگر عدد صحیح K_x طوری اختیار شود که

$$|x_n| < K_x \quad (\forall n \geq 1),$$

آنگاه K_x را یک کران کانونی^{۲۵} برای $\{x_n\}_{n \geq 1}$ می‌نامیم.

K_x همیشه موجود است و لزوماً منحصر به فرد نیست. مثلاً می‌توان آن را کوچکترین عدد صحیح در نظر گرفت که بزرگتر از $|x_1| + 2$ باشد، زیرا با توجه به تعریف ۱.۵ برای هر $n \geq 1$ داریم:

$$|x_n| \leq |x_n - x_1| + |x_1| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{1} + |x_1| \leq 1 + 1 + |x_1| = |x_1| + 2.$$

۵.۵. **تعریف.** فرض کنید $\{x_n\}_{n \geq 1}$ و $\{y_n\}_{n \geq 1}$ اعداد حقیقی با کران‌های کانونی K_x و K_y بوده و α یک عدد گویا باشد. قرار

می‌دهیم $K = \text{Max}\{K_x, K_y\}$ و اعمال حسابی مقدماتی در \mathbb{R} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(أ) \quad x \pm y = \{x_{2n} \pm y_{2n}\}_{n \geq 1}$$

$$(ب) \quad xy = \{x_{2kn} y_{2kn}\}_{n \geq 1}$$

$$(پ) \quad \text{Max}\{x, y\} = \{\text{Max}\{x_n, y_n\}\}_{n \geq 1}$$

$$(ت) \quad -x = \{-x_n\}_{n \geq 1}$$

$$(ث) \quad |x| = \text{Max}\{x, -x\}$$

$$(ج) \quad \alpha^* = \{\alpha\}_{n \geq 1}$$

بررسی خوش تعریف بودن هر کدام از موارد بالا با توجه به تعریف ۱.۵ به سادگی قابل بررسی است. به عنوان نمونه، در مورد (آ) با

قرار دادن $z_n = x_{2n} + y_{2n}$ ، برای هر $m, n \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} |z_m - z_n| &= |x_{2m} + y_{2m} - x_{2n} - y_{2n}| \leq |x_{2m} - x_{2n}| + |y_{2m} - y_{2n}| \\ &\leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{m} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

پس $z = \{z_n\}_{n \geq 1} = \{x_{2n} + y_{2n}\}_{n \geq 1}$ یک عدد حقیقی است. اثباتی مشابه برای سایر موارد را می‌توان در [۵] دید.

²³Regular ²⁴Equal ²⁵Canonical Bound

۶.۵. تعریف. عدد حقیقی $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$ مثبت خوانده می‌شود، اگر برای یک $n \geq 1$ داشته باشیم $x_n > \frac{1}{n}$. در این حالت می‌نویسیم $x > 0$. عدد نامنفی خوانده می‌شود، اگر برای هر $n \geq 1$ داشته باشیم $x_n \geq \frac{1}{n}$. در این حالت می‌نویسیم $x \geq 0$.

۷.۵. تعریف. فرض کنید $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$ و $y = \{y_n\}_{n \geq 1}$ اعداد حقیقی باشند. روابط زیر را تعریف می‌کنیم:

(آ) $x > y$ یا $y < x$ اگر $x - y$ مثبت باشد.

(ب) $x \geq y$ یا $y \leq x$ اگر $x - y$ نامنفی باشد.

(پ) x منفی است اگر $-x$ مثبت باشد.

(ت) x مخالف y است اگر $x - y$ مثبت یا منفی باشد. در این حالت می‌نویسیم $x \neq y$.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، خواص مثبت، نامنفی و منفی بودن یک عدد حقیقی و همچنین روابط مساوی و نامساوی بودن دو عدد حقیقی، مستقل از یکدیگر تعریف می‌شوند. علت این کار پرهیز از LEM است. به سادگی و با استفاده از تعاریف قابل بررسی است که هر عدد مثبت، نامنفی است. هم‌چنین اگر $x = y$ یا $x > y$ آنگاه $x \geq y$ ، اما همان‌طور که در گزاره بعد نشان می‌دهیم، عکس گزاره اخیر منجر به LEM شده و لذا غیرسازنده است.

۸.۵. گزاره. گزاره زیر، غیر سازنده است:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \geq 0 \Rightarrow x > 0 \vee x = 0).$$

اثبات. برای هر عدد طبیعی n ، فرض کنید $G(n)$ حدس گلدباخ در مورد $2n + 2$ باشد. دنباله $\{a_n\}_{n \geq 1}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که برای هر n ، $a_n = 0$ اگر و فقط اگر برای n هر $k \leq n$ داشته باشیم $G(k)$. در این صورت $\{a_n\}_{n \geq 1}$ یک دنباله دودویی صعودی است. حال دنباله $\{x_n\}_{n \geq 1}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر برای هر $k \leq n$ داشته باشیم $a_k = 0$ ، آنگاه $x_n = 0$ و در غیر این صورت $x_n = 2^{-N}$ که در آن N کوچکترین عدد صحیح مثبت است که $a_N = 1$. به سادگی قابل بررسی است که $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$ یک عدد حقیقی نامنفی (با توجه به تعاریف ۱.۵ و ۶.۵) است. نشان می‌دهیم که x نه می‌تواند صفر و نه می‌تواند مثبت باشد. زیرا اگر داشته باشیم $x = 0$ ، در این صورت برای هر n طبیعی خواهیم داشت $a_n = 0$ و این یعنی اثبات حدس گلدباخ. اگر داشته باشیم $x > 0$ ، آنگاه بنا به تعریف ۶.۵، عدد طبیعی N وجود دارد، به طوری که $x_N > \frac{1}{N}$. به وضوح این x_N صفر نیست، لذا N کوچکترین عدد طبیعی است که $a_N = 1$. این یعنی وجود یک مثال نقض برای حدس گلدباخ. بنابراین درستی گزاره منجر به LPO یا LEM شده و سازنده نیست. \square

مشابه با اثبات گزاره ۸.۵ و با در نظر گرفتن دنباله‌های دودویی مناسب، می‌توان نشان داد که گزاره‌های زیر هم سازنده نیستند. جزئیات اثبات را می‌توان در [۵] یا [۶] دید:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \geq 0 \vee x \leq 0).$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\neg(x = 0) \Rightarrow x \neq 0).$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x = 0 \vee x \neq 0).$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{Q} \vee x \notin \mathbb{Q}).$$

قضیه بعد، وجود وارون ضربی اعداد حقیقی ناصفر را اثبات می‌کند. اثبات این قضیه را می‌توان در [۵] دید.

۹.۵. قضیه. فرض کنید عدد حقیقی $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$ مخالف صفر باشد (یعنی $|x| > 0$). در این صورت عدد صحیح و مثبت N وجود دارد به طوری که برای هر عدد صحیح و مثبت n که $n \geq N$ ، داشته باشیم $x_n \geq \frac{1}{N}$. به علاوه دنباله $y = \{y_n\}_{n \geq 1}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، منظم است:

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{x_N n^2}, & n < N, \\ \frac{1}{x_n n^2}, & n \geq N. \end{cases}$$

هم‌چنین x و y هم‌علامت (یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی) بوده و $xy = yx = 1^*$.

۱۰.۵. **تعریف.** با مفروضات قضیه ۹.۵، y را وارون x نامیده و می‌نویسیم $x^{-1} = y$.

مفاهیم مجموعه کراندار، کران بالا و پایین یک مجموعه، کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین یک مجموعه، مشابه آنالیز کلاسیک تعریف می‌شوند. حال آمادگی داریم قضیه اصلی این بخش را ارائه کنیم.

۱۱.۵. **قضیه.** مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} با اعمال جمع و ضرب آمده در تعریف ۵.۵ یک میدان جبری با عضو خنثای جمعی 0^* و عضو خنثای ضربی 1^* است. \mathbb{R} خاصیت کوچکترین کران بالایی ندارد.

اثبات. برای مشاهده اثبات میدان بودن \mathbb{R} ، [۵] را ببینید. برای اثبات حکم دوم قضیه، دنباله دودویی معرفی شده در اثبات گزاره ۲.۴ به وضوح کراندار است، اما کوچکترین کران بالا ندارد. زیرا کوچکترین کران بالا برای آن در صورت وجود، فقط می‌تواند صفر یا یک باشد که این منجر به LPO می‌شود. □

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، اختلاف دیدگاه آنالیز سازنده با آنالیز کلاسیک در عمل و در همان ابتدا خود را در حین ساخت دستگاه اعداد حقیقی که پایه‌ای‌ترین مفهوم در هر دو نوع دیدگاه در آنالیز است، نشان می‌دهد. بررسی این وضعیت در مورد بعضی از مهم‌ترین قضایای شناخته شده آنالیز را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

۶. چند قضیه وجودی از آنالیز کلاسیک و معادل سازنده آن‌ها

در این بخش چند قضیه وجودی مهم در آنالیز کلاسیک و معادل سازنده آنها بیان می‌شود. همان‌طور که در بخش ۵ دیدیم، بسیاری از نتایج سودمند در آنالیز کلاسیک در مورد خواص اعداد حقیقی، سازنده نیستند. به همین جهت برای بیان معادل سازنده قضایای وجودی آنالیز کلاسیک، اغلب نیاز به اعمال شرایط قوی‌تر بر مفروضات این قضایا و تضعیف احکام آن‌ها داریم. همچنین نیاز به تغییر برخی از تعاریف رایج در آنالیز کلاسیک و یا آوردن تعاریف جدید با رویکرد سازنده داریم. با این دیدگاه، در این بخش چند قضیه وجودی مهم در آنالیز کلاسیک ذکر شده و سپس با استفاده از تعاریف مناسب و با تغییرات لازم، معادل سازنده آن‌ها هم آورده می‌شود. در هر مورد، یک قضیه کلاسیک با معادل سازنده آن در کنار یکدیگر ذکر می‌گردد تا مقایسه آنها ساده‌تر باشد. از آن‌جا که اثبات شکل کلاسیک این قضایا در اغلب کتاب‌های درسی استاندارد دانشگاهی یافت می‌شود و همچنین اثبات حالت سازنده آن‌ها اغلب پیچیده و لذا خارج از حوصله این مقاله مروری است، در هر مورد خوانندگان علاقه‌مند را به منابعی مفید ارجاع خواهیم داد.

۱.۶. **تعریف.** یک مجموعه را ناتهی یا مسکونی^{۲۶} می‌نامیم اگر عضوی در آن وجود داشته باشد.

متذکر می‌شویم که مفهوم مسکونی بودن یک مجموعه در منطق شهودی به مراتب قوی‌تر از مفهوم ناتهی بودن آن در منطق کلاسیک است. زیرا در مورد یک مجموعه مسکونی، حداقل باید یکی از اعضای آن را بشناسیم. در واقع می‌توانیم مجموعه‌هایی بسازیم که مطمئن باشیم که تهی نیستند، اما هیچ عضو مشخص آن را نشناسیم (به [۵] مراجعه شود).

۲.۶. **قضیه (خاصیت کوچکترین کران بالا).** شکل کلاسیک: فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی و از بالا کراندار از اعداد حقیقی باشد. در این صورت $\sup A$ موجود است.

شکل سازنده: فرض کنید A یک زیرمجموعه مسکونی و از بالا کراندار از اعداد حقیقی باشد. در این صورت $\sup A$ موجود است اگر و فقط اگر برای هر x و y در \mathbb{R} که $x < y$ ، یا y یک کران بالا برای A باشد و یا اینکه عضوی در A باشد که از x بزرگتر باشد.

اثبات. [۵] و [۱۲] را ببینید. □

۳.۶. **تعریف.** تابع حقیقی مقدار f تعریف شده روی بازه بسته I را روی I پیوسته می‌خوانیم اگر برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه، $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر x و y در I اگر $|x - y| \leq \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. تابع f را روی بازه باز (a, b) پیوسته می‌خوانیم اگر روی هر بازه بسته I که $I \subset (a, b)$ ، پیوسته باشد.

²⁶Inhabited

۴.۶. **تعریف.** فرض کنید f و g دو تابع حقیقی مقدار پیوسته روی بازه بسته I بوده و برای هر x و y در I و هر $\epsilon > 0$ دلخواه، عدد $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که اگر $|x - y| \leq \delta$ داشته باشیم:

$$|f(x) - f(y) - g(x)(x - y)| \leq \epsilon|x - y|.$$

در این صورت می‌گوییم تابع f روی بازه I مشتق‌پذیر است و می‌نویسیم $f' = g$ روی I . تابع f را روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر می‌خوانیم اگر روی (a, b) پیوسته بوده و روی هر بازه بسته I که $I \subset (a, b)$ ، مشتق‌پذیر باشد.

ملاحظه می‌شود که تعاریف پیوستگی و مشتق‌پذیری در آنالیز سازنده معادل تعاریف پیوستگی و مشتق‌پذیری یکنواخت در آنالیز کلاسیک هستند. دلیل این کار این است که پیوستگی و مشتق‌پذیری نقطه‌وار یک تابع فقط از جنبه نظری جالب بوده و کاربردی در آنالیز سازنده ندارند. همچنین نمی‌توان از پیوسته بودن یک تابع حقیقی روی یک بازه بسته، پیوستگی یکنواخت آن را به صورت سازنده نتیجه گرفت [۵].

۵.۶. **قضیه (مقدار میانی).** شکل کلاسیک: اگر f یک تابع حقیقی مقدار پیوسته روی بازه $[a, b]$ و k یک عدد حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه عدد حقیقی $c \in [a, b]$ وجود دارد به طوری که $f(c) = k$.

شکل سازنده: اگر f یک تابع حقیقی مقدار پیوسته روی بازه $[a, b]$ و k یک عدد حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$ بوده و $\epsilon > 0$ باشد، آنگاه عدد حقیقی $c \in [a, b]$ وجود دارد به طوری که $|f(c) - k| < \epsilon$.

اثبات. [۵] و [۱۲] را ببینید. □

۶.۶. **قضیه (رول^{۲۷}).** شکل کلاسیک: اگر f یک تابع حقیقی مقدار پیوسته روی بازه $[a, b]$ و مشتق‌پذیر روی بازه (a, b) بوده و $f(a) = f(b)$ باشد، آنگاه عدد حقیقی $c \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که $f'(c) = 0$.

شکل سازنده: اگر f یک تابع حقیقی مقدار مشتق‌پذیر روی بازه $[a, b]$ بوده و $f(a) = f(b)$ باشد، آنگاه برای هر $\epsilon > 0$ عدد حقیقی $c \in [a, b]$ وجود دارد به طوری که $|f'(c)| \leq \epsilon$.

اثبات. [۵] و [۱۲] را ببینید. □

یکی از مشهورترین قضایای وجودی در آنالیز کلاسیک، قضیه نقطه ثابت برآور است که تضمین می‌کند که یک تابع پیوسته تعریف شده از یک بازه بسته به همان بازه، یک نقطه ثابت دارد. این قضیه اگرچه از دیدگاه نظری قدرتمند بوده و باعث ایجاد و گسترش روزافزون نظریه نقطه ثابت و آنالیز غیرخطی شده، اما همان‌طور که برآور خود متوجه شده بود، برهانی سازنده ندارد. اهمیت این نقص زمانی آشکار می‌شود که بخواهیم در علوم مانند اقتصاد و کامپیوتر از نتایج آن استفاده کنیم. در این علوم نقاطی در فضای مورد مطالعه ارزش واقعی دارند که قابل دسترسی بوده و بتوان براساس یک الگوریتم معین و ملموس به آنها رسید. تمرکز بر این مطلب باعث شده که در سال‌های اخیر، ریاضی‌دانان سعی کنند معادل‌های هرچند محدودتر اما سازنده برای قضیه نقطه ثابت برآور ارائه کنند.

۷.۶. **تعریف.** تابع $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته دنباله‌ای^{۲۸} خوانده می‌شود، اگر برای دنباله‌های $\{x_n\}_{n \geq 1}$ و $\{y_n\}_{n \geq 1}$ در $[a, b]$ که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - y_n| = 0$$

داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0.$$

۸.۶. **قضیه (برآور).** شکل کلاسیک: اگر $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ یک تابع پیوسته باشد، آنگاه عدد حقیقی $c \in [a, b]$ (موسوم به نقطه ثابت تابع f) وجود دارد به طوری که $f(c) = c$.

شکل سازنده: اگر $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ یک تابع به طور یکنواخت پیوسته دنباله‌ای باشد، آنگاه برای هر $\epsilon > 0$ عدد حقیقی $c \in [a, b]$ (موسوم به نقطه ثابت تقریبی تابع f) وجود دارد به طوری که $|f(c) - c| \leq \epsilon$.

اثبات. [۸] و [۱۰] را ببینید. □

²⁷Rolle ²⁸Uniformly Sequentially Continuous

همانطور که ملاحظه می‌شود، اغلب قضیه‌های وجودی در آنالیز کلاسیک به قضایای وجودی تقریبی سازنده تبدیل می‌شوند. شاید این مربوط به ذات اشیاء طبیعی باشد که در اغلب اوقات نمی‌توان مکان آن‌ها را به طور دقیق مشخص کرد.

سخن آخر

در بخش آخر این مقاله، گزیده‌هایی از نظرات اِرت بی‌شاپ، مبدع مکتب آنالیز سازنده BISHOP در مورد این مکتب را که تحت عنوان "بیانیه یک ساخت‌گرا^{۲۹}" در مقدمه [۴] آمده، نقل قول می‌کنیم.

"[امروزه] ریاضی‌دان محض در دنیایی که نیاز کمی به ابداعات درخشان [ذهنی] او دارد، منزوی شده است. او از نوعی بیگانگی [با دیگران] که به نظر غیر قابل اجتناب می‌رسد، رنج می‌برد.

ریاضیات آمیخته‌ای از واقعیت و ایده‌آل است. گاهی این و گاهی آن و بسیار مشکل است که تشخیص داد که کدام یک؟

ما [شهودگراها] مدعی نیستیم که ریاضیات ایده‌آل‌گرا از نقطه نظر سازنده، بی‌ارزش است. هر قضیه اثبات شده با روش‌های ایده‌آل‌گرایانه ارائه‌دهنده یک چالش است: یافتن یک نسخه سازنده و آوردن یک اثبات سازنده برای آن. برنامه ما ساده است: تا آنجا که ممکن است به آنالیز مجرد کلاسیک، معنای عددی بدهیم. [در ریاضیات سازنده] مجردترین گزاره‌ها هم مبنای محاسباتی دارند.

وظیفه سازنده کردن آنالیز به وسیله سه اصل پایه رهنمون می‌شود:

- هر مفهومی به صورت مثبت بیان شود (حتی مفهوم نامساوی هم یک مفهوم مثبت است).
- از تعاریف بی‌مورد پرهیز شود (مفهوم تابع پیوسته نقطه‌ای تعریفی بی‌مورد است).
- از کلی‌گویی پرهیز شود.

دغدغه اصلی ریاضیات، عدد است و منظور از آن، اعداد صحیح مثبت است. ما همان درکی از عدد داریم که کانت^{۳۰} از فضا داشت. اعداد صحیح مثبت و حساب آن‌ها توسط بینش بسیار طبیعی ما از پیش دانسته فرض شده و عموماً به وسیله هوش بسیار طبیعی خود وسوسه به باور شده‌ایم. توسعه نظریه اعداد صحیح مثبت از مفهوم اولیه یک، مفهوم الحاق یک و فرآیند استقرای ریاضی، یک اعتقاد کاملاً راسخ را به همراه دارد. به قول کرونگر^{۳۱}، اعداد صحیح توسط خدا خلق شده‌اند. کرونگر می‌توانست حتی این را به شکل بهتری بیان کند، اگر گفته بود که اعداد صحیح توسط خدا به نفع انسان خلق شده‌اند. ریاضیات به انسان تعلق دارد نه به خدا. ما به خواص اعداد صحیح مثبت که هیچ مصداقی در زندگی بشری ندارند، علاقه‌ای نداریم ..."

مراجع

- [۱] م. صال مصلحیان، فلسفه ریاضی، انتشارات واژگان خرد، ۱۳۸۴.
- [۲] م. فان آتن، فلسفه براوئر، ترجمه م. اردشیر، انتشارات هرمس، ۱۳۸۷.
- [3] P. Andersson, *Exact Real Arithmetic with Automatic Error Estimates in a Computer Algebra System*, Master's thesis, Uppsala University, Uppsala, Sweden, 2001.
- [4] E. A. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [5] E. A. Bishop and D. S. Bridges, *Constructive Analysis*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1985.
- [6] D. S. Bridges and L. S. Vita, *Techniques of Constructive Analysis*, Springer, New York, 2006.
- [7] L. E. J. Brouwer, *Collected Works I, Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [8] R. F. Brown, *Handbook of Topological Fixed Point Theory*, Springer, Dordrecht, 2005.
- [9] D. van Dalen, *L. E. J. Brouwer*, Springer-Verlag, London, 2013.
- [10] M. Hentlass, Fixed point theorems in constructive mathematics, *Journal of Logic & Analysis*, 4 (2012) 1-20.
- [11] A. Heyting, Die formalen regeln der intuitionistischen logik, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, (1930) 42-56.
- [12] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.
- [13] H. Schwichtenberg, Program extraction in constructive analysis, *Logicism, Intuitionism, and Formalism*, 341 (2009) 255-285.

²⁹A Constructivist Manifesto ³⁰Kant ³¹Kronecker

- [14] A. S. Troelstra, D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics An Introduction*, **1**, North-Holland, New York, 1988.
- [15] I. Weiss, The real numbers - a survey of constructions, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **45** (2015) 737-762.
- [16] I. Weiss, The reals as rational cauchy filters, *New Zealand Journal of Mathematics*, **46** (2016) 21-51.

رضا ستوده

یاسوج، خیابان دانشگاه، دانشگاه یاسوج، گروه ریاضی.
reza.sotoudeh@yahoo.com

رضا ستوده متولد آذر ماه ۱۳۵۵ در شهر شیراز است. وی در سال ۱۳۷۴ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه سمنان و در سال ۱۳۷۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران در گرایش آنالیز شد. او پس از چندین سال تدریس در مدارس شیراز، در سال ۱۳۹۳ وارد دوره دکترای ریاضی محض دانشگاه یاسوج در گرایش آنالیز شد و در حال حاضر ضمن مطالعه و پژوهش در مورد آنالیز سازنده مبتنی بر منطق شهودی زیر نظر استاد راهنمای خود دکتر حمیدرضا گودرزی، به تدریس در مدارس شیراز هم مشغول است.

**حمیدرضا گودرزی**

یاسوج، خیابان دانشگاه، دانشگاه یاسوج، گروه ریاضی.
goudarzi@yu.ac.ir

حمیدرضا گودرزی متولد شهریور ماه ۱۳۴۹ در نورآباد ممسنی در استان فارس است. وی مدرک کارشناسی ریاضی محض خود را در سال ۱۳۷۱ از دانشگاه کرمان و کارشناسی ارشد خود را در سال ۱۳۷۵ از دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران در گرایش جبر کسب کرد. دوره دکترای خود را در گرایش آنالیز در سال ۱۳۸۹ در دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران و در طرحی مشترک با دانشگاه لاوال کانادا زیر نظر دکتر جواد مشرقی و دکتر سید منصور واعظ پور به پایان رساند و هم‌اکنون عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه یاسوج است. علاقه‌مندی‌های پژوهشی ایشان فضاهای احتمالاتی، نظریه نقطه ثابت و بهترین تقریب، نظریه تعادل در سیستم‌های دینامیکی، نظریه بازی و نقاط ثابت و ثابت تقریبی در آنالیز سازنده می‌باشد.

