



کاربرد برازش خم و روش حداقل مربعات برای بررسی هندسه قوس‌های ایرانی

فرزین ایزدپناه

چکیده. دیدگاه‌های متفاوتی درباره فرضیه استفاده از مقاطع مخروطی در سازه‌های طاقی تاریخی وجود دارد. این بحث در معماری ایران، نیز، به‌عنوان شکل دهنده بخشی از تاریخ معماری جهان مطرح است. برخی، در مقابل آن، فرضیه استفاده از خم زنجیره‌ای را مطرح کرده‌اند که مهمترین خم رقیب مقاطع مخروطی در پیشینه مطالعات هندسه قوس‌ها است. بخشی از پژوهش درباره این فرضیه بررسی تاریخی است و بخشی از آن به بررسی خم‌های قوس‌ها به روش ریاضی اختصاص دارد. در پیشینه مطالعات معماری، بررسی خم‌های قوس‌ها از ترسیم خم‌ها بر روی قوس و مقایسه چشمی خم‌ها با قوس انجام گرفته است، اما نگارنده در جستجوی روش دقیقتری برای بررسی این مسأله است. در این نوشتار، برای بررسی، از برازش خم به روش ماتریسی استفاده می‌شود و برای مقایسه میزان خطاها در برازش خم‌های مورد نظر، روش کمترین مربعات مورد توجه قرار می‌گیرد. برای توضیح روش، به‌عنوان نمونه، قوس انتخاب شده از دوره ایلامی در قیاس با خم زنجیره‌ای و مقاطع مخروطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نگارنده این روش را به‌عنوان راهی مناسب برای بررسی اسناد ترسیمی تاریخی توصیه می‌نماید.

۱. مقدمه

این نوشتار تلاش دارد نکته‌ای را در هندسه قوس‌های ایرانی مورد توجه قرار دهد و روشی را برای پاسخگویی به این سؤال پیشنهاد دهد که از میان مقاطع مخروطی و دیگر خم محتمل ادعا شده توسط پژوهشگران، خم زنجیره‌ای، کدام یک برای قوس‌ها استفاده می‌شده است؟ این نوشتار تلاش می‌کند با تحلیل ریاضی با روش ماتریسی و روش کمترین مربعات این سؤال را مورد توجه قرار دهد.

درباره کاربرد مقاطع مخروطی در سازه‌های طاقی جهان، دیدگاه‌های متفاوتی ارائه شده است. به‌عنوان مثال، در تمدن مصر باستان، قوس‌هایی مشابه مقاطع مخروطی یافت شده است که برخی پژوهش‌ها مانند منابع [۵]، [۹] آنان را بیضی دانسته و برخی، مانند [۱۰]، مخالف این فرضیه هستند که در مصر از بیضی استفاده می‌شده است. در مورد معماری ایران، برخی محققان کاربرد مقاطع مخروطی را گزارش کرده‌اند. بزנוال^۱ [۶] نیز، در مقدمه کتاب خود، "فن‌آوری طاق در خاور کهن"، برای بررسی هندسه قوس‌ها به بررسی مقاطع مخروطی می‌پردازد. زمرشیدی^۲ [۳] و پیرنیا^۳ [۲] به کاربرد مقاطع مخروطی در معماری پیش از اسلام و نجیب‌اوغلو^۴ [۱۳]، پیرنیا [۲] و ابوالقاسمی^۵ [۱] از کاربرد مقاطع

عبارت و کلمات کلیدی. برازش خم، روش کمترین مربعات، هندسه قوس‌های ایرانی، خم زنجیره‌ای، مقاطع مخروطی.
دبیر تخصصی رابط: مسعود آیین‌نژاد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۱

DOI: <http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.24929.1130>

¹Besenal ²Zumar Shady ³Pirnia ⁴Necipoglo ⁵Abolghasemi

در معماری اسلامی ایران سخن گفته‌اند. برخی، چون تولستوف^۶ [۱۵] (شکل ۱) و زمرشیدی [۲]، برای بازترسیم قوس‌ها از مقاطع مخروطی استفاده نموده‌اند. به هر حال، به نظر می‌رسد برخی کاربرد مقاطع در قوس‌های معماری ایران را امری واضح دانسته‌اند. ایزدپناه^۷ [۱۲] با بررسی موارد فوق و سایر پژوهش‌های پیشینه نشان می‌دهد که هیچ یک از آنها از نظر تاریخی صحت ندارند و کاربرد مقاطع مخروطی در ترسیم قوس‌ها را مورد تردید قرار می‌دهد. هورتا^۸ [۱۰] در انتقاد به فرضیه کاربرد مقاطع مخروطی در معماری جهان، خم قوس‌های تاریخی را مانند مقطع تخم‌مرغ^۹ یا خم زنجیره‌ای می‌داند که با توجه به روش کار استادکاران، یعنی استفاده از ریسمان و میخ، با قوس‌های دایره‌ای تقریب زده شده‌اند. در تاریخ معماری، طراحان مشهوری چون گائودی^{۱۰} از این خم در طراحی‌های خود استفاده کرده‌اند و برای آن ارزش فنی-زیباشناسی قائل بوده‌اند. اهمیت این خم تطبیق آن با خم اثر نیروهای قوس است. قوس با مصالح بنایی ساخته می‌شود که تنها با نیروهای فشاری کار می‌کنند و در کشش، مقاومت ضعیفی دارند. از این رو رابرت هوک^{۱۱} (۱۶۳۵-۱۷۰۳) بر پایه تجارب مهندسان رنسانسی در ساخت قوس‌ها این ایده را مطرح می‌کند که بهترین شکل قوس معکوس زنجیر آویخته است. چون زنجیر در کشش خالص کار می‌کند، معکوس آن یعنی قوس با فشار خالص رفتار خواهد کرد (شکل ۲). این خم گراف تابع کسینوس هیپربولیک است. از این رو، با توجه به پیشینه، مقاطع مخروطی و خم زنجیره‌ای خم‌های محتمل در هندسه قوس‌ها هستند. البته باید مشهورترین و مستندترین روش ترسیم قوس‌ها یعنی استفاده از کمان‌های دایره را به آنها اضافه کرد که تردیدی در استفاده از این روش توسط استادکاران وجود ندارد. گرچه کمانهای دایره خود از مقاطع مخروطی هستند، اما قبل از کشف مقاطع مخروطی توسط یونانیان کمان‌های دایره به‌عنوان مقاطع مخروطی شناخته نمی‌شده‌اند.

بدیهی است که برای تقریب زدن هندسه یک قوس از بی نهایت خم متفاوت می‌توان استفاده نمود. اما در تاریخ مطالعات هندسه قوس‌ها، تنها خم‌های ذکر شده در بالا مطرح شده‌اند. مقاطع مخروطی به دلیل اهمیت تاریخی آنها و گاه معانی متافیزیکی قائل برای آنها مطرح شده‌اند (نگاه کنید به علت مطالعات کپلر بر روی بیضی به‌عنوان مدار سیاره‌ها [۴]). قوس زنجیره‌ای نیز همان‌طور که ذکر شده به دلیل اهمیت سازه‌ای در پیشینه مطرح گشته‌اند. با توجه به این موضوع، نگارنده روش ارائه شده در این نوشتار را برای برازش با خم‌های از پیش فرض شده مطرح می‌نماید.

در پیشینه، برای بررسی موضوع از ترسیم خم‌ها بر روی قوس‌ها و مقایسه چشمی خم‌های شناخته شده با قوس‌ها استفاده شده است. یعنی با مشاهده اختلاف چند خم ترسیم شده با قوس مورد نظر، در مورد نزدیکترین خم به قوس قضاوت شده است. شباهت قوس‌ها با خم‌ها به آنها نام قوس سهمی، بیضی و یا مقطع تخم‌مرغی (خم زنجیره‌ای) را می‌دهد. اما همان‌گونه که هورتا [۱۰] می‌گوید در بررسی چشمی، هرکس هر خمی را که دوست دارد در قوس مشاهده می‌کند! برای اجتناب از این موضوع، در این نوشتار، برای برازش خم از روش ماتریسی استفاده می‌شود. برای بررسی میزان خطاها روش حداقل مربعات^{۱۲}، ابداع شده توسط کارل فردریش گاوس^{۱۳}، را مورد توجه قرار می‌دهیم. وی برای یافتن موقعیت یک سیاره که در مشاهدات گم گشته بود، از این روش استفاده نمود [۸]. کاربرد این روش در آثار هنری، توسط هویلبروک^{۱۴} [۱۱]، مورد توجه قرار گرفته است. وی از آن برای مقایسه زیبایی شناسانه خم‌های ریاضی با خم‌های موجود در تصویر آثار هنری، مانند تابلوی مونالیزا بهره گرفته است. این نوشتار به اهمیت استفاده از این روش، بر روی نقشه، در بررسی یک مسأله تاریخی اشاره می‌نماید. در اینجا، تحلیل با استفاده از روش ماتریسی در نرم افزار متمتیکا^{۱۵} انجام می‌پذیرد.

^۹ در انگلیسی از واژه "Oval" برای این قوس استفاده می‌شود. برای جلوگیری از اشتباه کردن واژه تخم‌مرغی با رویه دو بعدی از واژه مقطع تخم‌مرغی استفاده می‌شود.

^۶Tolstov ^۷Izadpanah ^۸Santiago Huerta ^{۱۰}Gaudi ^{۱۱}Robert Hooke ^{۱۲}Least squares method ^{۱۳}Carl Friedrich Gauss
^{۱۴}Huylebrouck ^{۱۵}Mathematica

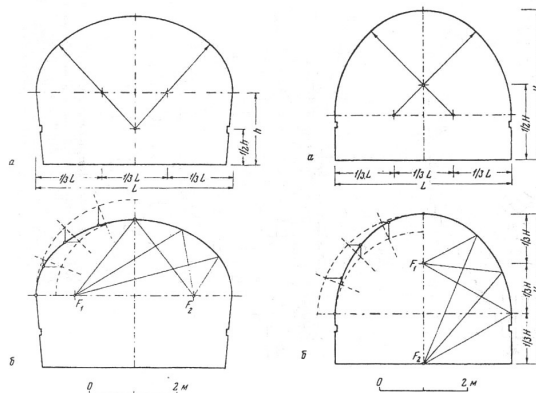
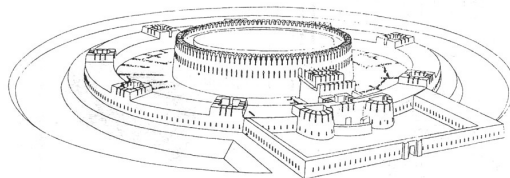
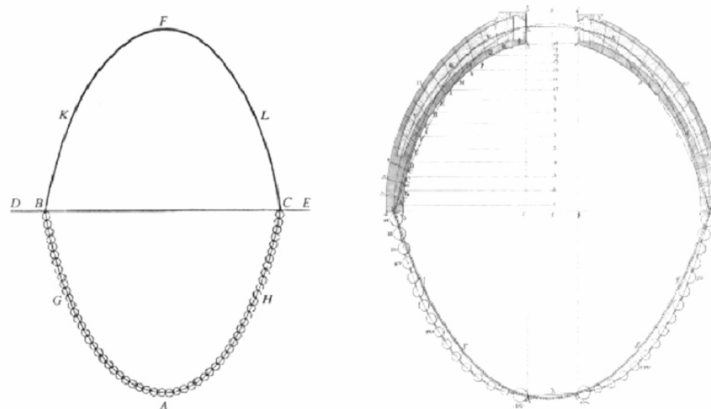


Рис. 116. Своды, перекрывающие помещения I и V центрального здания: талпهای پوشاننده اتاقهای ۱ و ۵ ساختمان مرکزی

Рис. 117. Своды, перекрывающие боковые помещения центрального здания: талпهای پوشاننده اتاقهای کناری ساختمان مرکزی

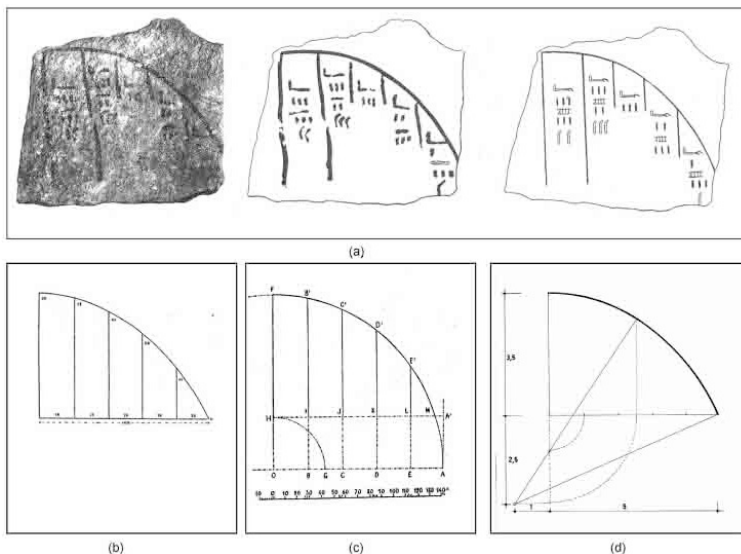
شکل ۱: کوی کریل گان-قلعه (ازبکستان، خوارزم) (دوره چهارم قبل از میلاد) در بازسازی، قوس‌ها را به عنوان مقطع مخروطی فرض کرده‌اند. (منبع شکل: [۱۵]).



شکل ۲: ترسیم پولنی از مقایسه هوک بین یک قوس و زنجیر آویخته و (ب) تحلیل وی از گنبد سنت- پیتر در رم (۱۷۴۸). (منبع شکل: [۷]).

۲. انتخاب نقاط

برای برازش خم نیاز به انتخاب نقاط مناسب برای تحلیل است. هویلیروک در بررسی آثار هنری پیشنهاد می‌نماید که از نقاط مهم شکل برای برازش خم استفاده شود. نقاط مهم آنهایی هستند که از سوی متخصصان حوزه اثر هنری به‌عنوان نقاط دارای اهمیت در طرح انتخاب می‌شوند. در برخی از مسائل معماری، مسأله یافتن نقاط روشنتر است. مانند سندی در مصر که نقاط قوس را به‌صورت دقیق معرفی می‌کند (شکل ۳). (در این تصویر محققان به مقیاس چشمی قوس و بیضی و خم زنجیره‌ای پرداخته‌اند.)



شکل ۳: روش ترسیم قوس ۲۷۰۰-۳۰۰۰ قبل از میلاد (تصویر بالا گان: ۱۹۲۶)، پایین چپ ترسیم داریسی^{۱۷} [۹] پایین وسط و راست تفسیر هورتا [۱۰].

با توجه به اینکه هدف نگارنده ارائه روش تحلیل است نه ارائه یک نتیجه تاریخی از تحلیل خود، نقاط بر اساس تجارب نگارنده در حوزه هندسه قوس‌ها انتخاب شده‌اند و نحوه انتخاب نقاط با توجه به تجارب متخصصان این حوزه قابل اصلاح می‌باشند. در اینجا، این نقاط از تمام قوس به‌صورت همگن انتخاب شده‌اند: نقاط پایه قوس به‌عنوان نقاط شروع و نقاطی که با فاصله مساوی بر روی محور افقی آن انتخاب شده‌اند.

۳. تحلیل برای قوس یک مقبره ایلامی

برای برازش، ۲۱ نقطه از قوس یک مقبره ایلامی را به‌کار می‌بریم. نصف دهانه قوس برابر واحد فرض می‌گردد. در این صورت مختصات نقاط بر اساس نقشه این گونه‌اند:

$$X_1 = -1; X_2 = -0.9; X_3 = -0.8; X_4 = -0.7; X_5 = -0.6; X_6 = -0.5;$$

$$X_7 = -0.4; X_8 = -0.3; X_9 = -0.2; X_{10} = -0.1; X_{11} = 0;$$

$$X_{12} = 0.1; X_{13} = 0.2; X_{14} = 0.3; X_{15} = 0.4; X_{16} = 0.5;$$

$$\begin{aligned} X_{17} &= 0/6; X_{18} = 0/7; X_{19} = 0/8; X_{20} = 0/9; X_{21} = 1. \\ Y_1 &= 0; Y_2 = 0/3760; Y_3 = 0/6237; Y_4 = 0/8173; Y_5 = 0/9928; \\ Y_6 &= 1/1334; Y_7 = 1/2583; Y_8 = 1/3188; Y_9 = 1/3692; \\ Y_{10} &= 1/3896; Y_{11} = 1/3963; Y_{12} = 1/3828; Y_{13} = 1/3569; \\ Y_{14} &= 1/3130; Y_{15} = 1/2325; Y_{16} = 1/1258; Y_{17} = 1/0033; \\ Y_{18} &= 0/8305; Y_{19} = 0/6236; Y_{20} = 0/3563; Y_{21} = 0 \end{aligned}$$

۱.۳. برازش با بیضی. ابتدا نقاط را با بیضی به معادله ذیل می‌سنجیم که بیضی متقارن نسبت به محور Y است:

$$aX^2 + bY^2 = 1,$$

ماتریس X_1 را این گونه تعریف می‌کنیم:

$$X_1 = \begin{bmatrix} X_1^2 & Y_1^2 \\ X_2^2 & Y_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ X_n^2 & Y_n^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس ضریب‌های معادله بیضی، R_1 ، برای یافتن مجهول‌های محاسبه، a و b را این گونه تعریف می‌گردد:

$$R_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

و ماتریس I_1 برابر است با:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت داریم:

$$X_1 \cdot R_1 = I_1$$

یا:

$$\begin{bmatrix} X_1^2 & Y_1^2 \\ X_2^2 & Y_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ X_n^2 & Y_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aX_1^2 + bY_1^2 \\ aX_2^2 + bY_2^2 \\ \vdots \\ aX_n^2 + bY_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

این معادله بدان معنی است که تمامی نقاط باید در معادله بیضی صدق کنند. مشخص است که این معادله در حالت کلی جواب ندارد. در اینجا استفاده از روش ماتریسی با نرم افزار به کار می‌آید: نرم افزار می‌تواند بهترین جواب را انتخاب نماید. در این حال خطای:

$$X_1 \cdot R_1 - I_1$$

باید کمینه شود. مقادیر عددی توسط محاسبه معکوس تعمیم یافته از طریق نرم افزار متمتیکا قابل محاسبه است: در نتیجه:

$$R_1 = X_1^+ \cdot I_1$$

که در آن X_1^+ معکوس تعمیم یافته X_1 است و از طریق آن مقدار ضرایب a و b قابل محاسبه است:

$$X_1 = \{\{X_1^2, Y_1^2\}, \{X_2^2, Y_2^2\}, \dots, \{X_{21}^2, Y_{21}^2\}\};$$

$$I_1 = \{\{1\}, \dots, \{1\}\}$$

$$R_1 = [PseudoInverse[X_1]] \cdot I_1 = \{\{1/12\}, \{0/53\}\}$$

خم حاصل، یک بیضی به معادله زیر است:

$$1/12x^2 + 0/53y^2 = 1$$

نسبت زیر (بر اساس روش کمترین مربعات) میزان نزدیکی نقاط به این بیضی را نشان می‌دهد:

$$K_1^2 = \|X_1 \cdot R_1\|^2 / \|I_1\|^2$$

با جایگذاری اعداد داریم:

$$K_1^2 = (Norm[(X_1 \cdot R_1)]^2) / (Norm[I_1])^2 = 0/9963$$

۲.۳. برازش با سهمی. برای تطبیق نقاط، معادله عمومی سهمی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

$$Y = a + bX + cX^2$$

مشابه حالت قبل عمل می‌کنیم و ماتریس‌های X_2 و R_2 را تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$X_2 \cdot R_2 = J_2$$

که در آن ماتریس J_2 برابر است با:

$$J_2 = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$R_2 = X_2^+ \cdot J_2$$

از این طریق مقدار ضرایب a و b و c قابل محاسبه است:

$$X_2 = \{\{1, X_1, X_1^2\}, \{1, X_2, X_2^2\}, \dots, \{1, X_{21}, X_{21}^2\}\};$$

$$J_2 = \{\{Y_1\}, \{Y_2\}, \{Y_3\}, \dots, \{Y_{21}\}\};$$

$$R_2 = (PseudoInverse[X_2]) \cdot J_2 = \{\{1/44\}, \{-0/002\}, \{-1/35\}\}$$

نتیجه، یک سهمی، به معادله زیر است:

$$1/44 - 0/002X - 1/35X^2 = Y$$

نسبت زیر، میزان نزدیکی نقاط به این سهمی را نشان می‌دهد:

$$K_2^2 = \|X_2 \cdot R_2\|^2 / \|J_2\|^2$$

با جایگذاری اعداد داریم:

$$K_2^2 = (Norm[(X_2 \cdot R_2)]^2) / (Norm[J_2])^2 = 0/9983$$

۳.۳. برازش با خم زنجیره‌ای. در مرحله اول کار را با این معادله آغاز می‌کنیم:

$$Y = a + b \operatorname{Cosh}[X]$$

مطابق قبل ماتریس‌های X_3 و R_3 را تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$X_3 \cdot R_3 = J_3$$

که در آن ماتریس J_3 برابر است با:

$$J_3 = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$R_3 = X_3^+ \cdot J_3$$

این‌گونه مقدار ضرایب a و b قابل محاسبه است:

$$X_3 = \{\{1, \operatorname{Cosh}[X_1]\}, \{1, \operatorname{Cosh}[X_2]\}, \dots, \{1, \operatorname{Cosh}[X_{21}]\}\};$$

$$J_3 = \{\{Y_1\}, \{Y_2\}, \dots, \{Y_{21}\}\};$$

$$R_3 = \operatorname{PseudoInverse}[X_3] \cdot J_3 = \{\{3/95\}, \{-2/51\}\}$$

معادله خم زنجیره‌ای به صورت زیر است:

$$Y = 3/95 - 2/51 \operatorname{Cosh}[X]$$

نسبت زیر، میزان نزدیکی نقاط به این خم را نشان می‌دهد:

$$K_3^{\chi} = \|X_3 \cdot R_3\|^2 / \|J_3\|^2$$

با جایگذاری اعداد داریم:

$$K_3^{\chi} = (\operatorname{Norm}[(X_3 \cdot R_3)]^2) / (\operatorname{Norm}[J_3])^2 = 0,9989$$

در اینجا مشخص می‌شود که قوس با خم زنجیره‌ای بهتر از دو مقطع مخروطی دیگر منطبق می‌گردد. هویلبروک [۱۱] نشان می‌دهد که نمی‌توان نتیجه گرفت این خم زنجیره‌ای بهترین برازش را در بین خم‌های زنجیره‌ای دارد، زیرا ضریب X در مقابل کسینوس هایپربولیک یک فرض شده است. اگر چه، نتیجه محاسبه، تا اینجا، برازش بهتر خم زنجیره‌ای نسبت به مقاطع مخروطی را نشان می‌دهد و کافی به نظر می‌رسد، با این حال، برای سایر موارد ممکن است نتایج دقیقتری

برای مقایسه نیاز باشد. از این رو، برازش با تابع کسینوس هایپربولیک را با ضرایب متفاوت برای X ادامه می‌دهیم. با توجه به اینکه ضریب در جلوی کسینوس هایپربولیک ظاهر می‌شود، ترکیب غیرخطی است. از این رو برای برازش با خم زنجیره‌ای از سری تیلور کسینوس هایپربولیک استفاده می‌کنیم:

$$\text{Cosh}(x) = 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + \dots$$

تابعی چند جمله‌ای از درجه شش انتخاب می‌کنیم. ماتریس X_4 را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$X_4 = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & X_1^3 & X_1^4 & X_1^5 & X_1^6 \\ 1 & X_2 & X_2^2 & X_2^3 & X_2^4 & X_2^5 & X_2^6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 & X_n^3 & X_n^4 & X_n^5 & X_n^6 \end{bmatrix}$$

با تعریف ماتریس ضریب‌های معادله چندجمله‌ای R_4 و ماتریس J_4 :

$$J_4 = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

داریم:

$$X_4 \cdot R_4 = J_4$$

در نتیجه:

$$R_4 = X_4^+ \cdot J_4$$

و مقدار ضرایب a و b و c قابل محاسبه است:

$$X_4 = \{\{1, X_1, X_1^2, X_1^3, X_1^4, X_1^5, X_1^6\}, \dots, \{1, X_{21}, X_{21}^2, X_{21}^3, X_{21}^4, X_{21}^5, X_{21}^6\}\}$$

$$J_4 = \{\{Y_1\}, \dots, \{Y_{21}\}\}$$

$$R_4 = [\text{PseudoInverse}[X_4]] \cdot J_4$$

$$= \{\{1/40\}, \{-0/022\}, \{-1/04\}, \{0/07\}, \{-0/13\}, \{-0/055\}, \{-0/22\}\}$$

نسبت زیر میزان نزدیکی نقاط به سری را نشان می‌دهد:

$$K_4^2 = \|X_4 \cdot R_4 - J_4\|^2 / \|J_4\|^2$$

با جایگذاری اعداد، مقدار نزدیکی نقاط به چندجمله ای پیدا می شود:

$$K_4^2 = [Norm[[X_4 \cdot R_4]^2] / [Norm[J_4]]^2 = 0.999$$

سری را به کسینوس هایپربولیک تبدیل می نماییم: برای این منظور می بینیم، که ضرایب توان های فرد، تقریباً کوچک هستند، پس معادله چند جمله ای، با تقریب، به این صورت در می آید:

$$Y = 1/4 - 1/04X^2 - 0/13X^4 - 0/22X^6$$

معادله را به این صورت می نویسیم:

$$Y = 1/4 + 1 - 1 - (1/04 * \frac{2!}{2!}) \cdot X^2 - (0/13 * \frac{4!}{4!}) \cdot X^4 - (0/22 * \frac{6!}{6!}) \cdot X^6$$

پس:

$$Y = 2/4 - \left(1 + \frac{(2/08X^2)}{2!} + \frac{(3/12X^4)}{4!} + \frac{(158/4X^6)}{6!} \right)$$

و:

$$Y = 2/4 - \left(1 + \left(\frac{(1/44X)^2}{2!} \right) + \left(\frac{(1/32X)^4}{4!} \right) + \left(\frac{(2/32X)^6}{6!} \right) \right)$$

در نتیجه جواب باید عددی بین ۱/۳۲ تا ۲/۳۲ باشد. میانگین که عدد ۱/۶۹ است را به عنوان ضریب کسینوس هایپربولیک اضافه می کنیم. X_5 را این گونه تعریف می کنیم:

$$X_5 = \{ \{1, Cosh[1/69X_1]\}, \dots, \{1, Cosh[1/69X_{21}]\} \}$$

برای شرایط جدید، طبق توضیحات قبلی، R_5 این گونه به دست می آید:

$$R_5 = [PseudoInverse[X_5]].J_4 = \{ \{2/18\}, \{-0/76\} \}$$

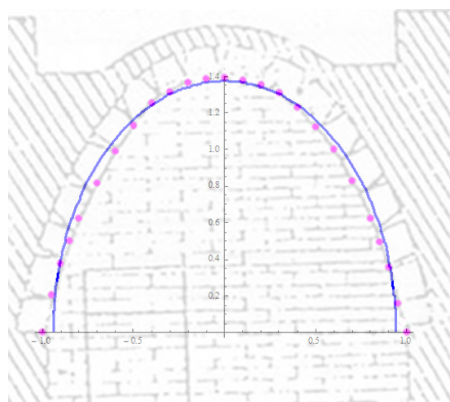
نتیجه، یک خم زنجیره ای به معادله ذیل است:

$$Y = 2/18 - 0/76Cosh[1/69X]$$

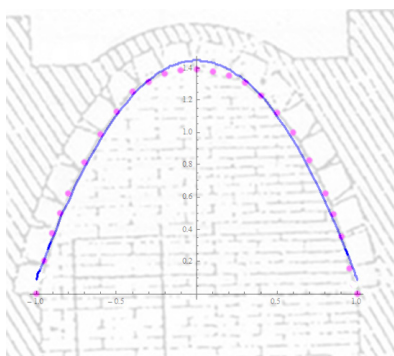
نسبت ذیل، میزان دقت برازش را نشان می دهد:

$$K_5^2 = [Norm[[X_5 \cdot R_5]^2] / [Norm[J_4]]^2 = 0.9996$$

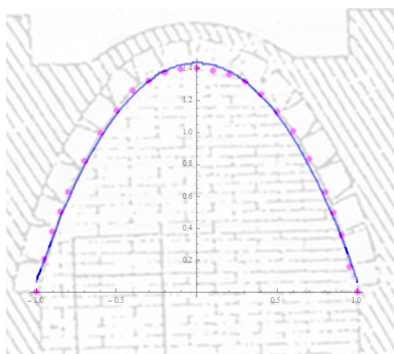
همان گونه که می بینیم قوس به خم زنجیره ای با معادله فوق نزدیکتر می شود. شکل های ۴-۷ تطابق قوس را با خم های حاصل نشان می دهد.



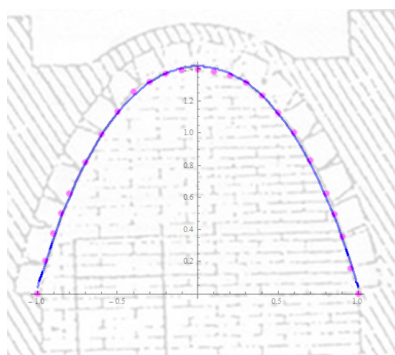
شکل ۴: مقایسه نقاط قوس مقبره ایلامی با بیضی به معادله: $۱/۱۲x^2 + ۰/۵۳y^2 = ۱$. (منبع نقشه پایه: [۱۴]).



شکل ۵: مقایسه نقاط قوس مقبره ایلامی با سهمی به معادله $۱/۴۴ - ۰/۰۰۲۷X - ۱/۳۵X^2 = Y$ (منبع نقشه پایه: [۱۴]).



شکل ۶: مقایسه نقاط قوس مقبره ایلامی با گراف تابع کسینوس هایپربولیک به معادله $Y = ۳/۹۵ - ۲/۵۱Cosh[x]$ (منبع نقشه پایه: [۱۴]).



شکل ۷: مقایسه نقاط قوس مقبره ایلامی با تابع کسینوس هایپربولیک به معادله $Y = 2/18 - 0/76 \text{Cosh}[1/69X]$ (منبع نقشه پایه: [۱۴]).

نتایج برازش این قوس را در جدول ۱ مشاهده می‌نماییم.

جدول ۱: نتایج برازش برای مقاطع مخروطی و خم زنجیره‌ای؛ قوس مقبره ایلامی در هفت تپه (منبع نقشه: [۱۴])

دقت	برازش با
۰/۹۹۹۶	خم زنجیره‌ای مرحله دوم
۰/۹۹۸۹	خم زنجیره‌ای مرحله اول
۰/۹۹۸۳	سهمی
۰/۹۹۶۳	بیضی

۴. نتیجه گیری

این نوشتار روش برازش منحنی به روش ماتریسی و روش حداقل مربعات را برای بررسی مسأله تاریخی کاربرد مقاطع مخروطی و خم زنجیره‌ای در قوس‌ها پیشنهاد نموده تا از نتیجه‌گیری سوداار ناشی از بررسی قوس‌ها با خم‌ها پرهیز شود. پس از انتخاب نقاط، با استفاده از نرم افزار ممتتیکا بهترین برازش سهمی، بیضی و خم زنجیره‌ای با قوس مورد نظر تعیین گردید. و از روش حداقل مربعات برای مقایسه میزان نزدیکی خم‌ها به قوس استفاده گردید. در ضمن بررسی خم زنجیره‌ای در حالت غیر خطی، از سری چند جمله‌ای جایگزین استفاده شد. هر چند نمی‌توان از برازش منحنی نمونه این نوشتار نتیجه‌ای تاریخی را استنباط نمود، اما این روش می‌تواند برای بررسی مدارک تاریخی محتمل در آینده مورد استفاده قرار گیرد.

۵. تشکر و قدردانی

نگارنده از دکتر هویلبروک برای راهنمایی نگارنده در این نوشتار تشکر می‌نماید.

مراجع

- [۱] ل. ابوالقاسمی، هنر و معماری اسلامی ایران، عمران و بهسازی شهری، تهران، ۱۳۸۴.
- [۲] م. ک. پیرنیا، تحقیق در معماری گذشته ایران، سروش دانش، تهران، ۱۳۸۹.
- [۳] ح. زمرشیدی، طاق و قوس در معماری ایران، نشر کیهان، تهران، ۱۳۶۲.
- [۴] ج. لیدیمن، فلسفه علم، ترجمه حسین کرمی، نشر حکمت، تهران، ۱۳۹۰.
- [5] D. Arnold, *Building in Egypt*, Pharaonic stone masonry, Oxford, Oxford University Press, 1991.
- [6] R. Besenval, *Technologie de la voûte dans l'Orient Ancien*, 2 vols, Paris: Editions Recherches sur les Civilisations, 1984.
- [7] Ph. Block et al, As Hangs the Flexible Line :Equilibrium of Masonry Arches, *Nexu. Netw. J.*, **8**, (2006) 13–24.
- [8] S. L. Cambell and J. R. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, London, Pitman Publishing Limited, 1979.
- [9] G. Daressy, Une trace Egyptienne conservée d'une voûte elliptique, *Annales du service des antiquités de l'Egypte*, **8** (1907) 234–241.
- [10] S. Huerta, Oval Domes: History, Geometry and Mechanics, *Nexu. Netw. J.*, **9** (2007) 211–248.
- [11] D. Huylebrouck, Curve Fitting in Architecture, *Nexu. Netw. J.*, **9** (2007) 559–70.
- [12] F. Izadpanah, A Suspension: Using Conic Sections in Persian Arch Structures, *J. of Eng. and Arch.*, **3** (2015) 160–168
- [13] G. Necipoglo, *The Topkapi Scroll-Geometry and Ornament in Islamic Architecture With an Essay on the Geometry of the Muqrnas by Mohammad Alasad*, Los Angeles, The Getty Centre of the History of Art and Humanities, 1995.
- [14] M. Salehi, *Sepultures etcoutumes funeraires au II millenaire a Suse*, Haft tepe et Tchoga Zanbil Memoire de maitrise, Universite de Paris I, 1975/1976.
- [15] S. Tolstov and B. Vajnberg, *Kojkrylgan t.lh.e.*, **5**, 1967.

فرزین ایزدپناه

کرمان، دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده هنر و معماری
fzizadpanah@yahoo.com

فرزین ایزدپناه متولد مهرماه ۱۳۵۵ در شهر بیرمنگام است. وی در سال ۱۳۷۳ وارد دوره کارشناسی ارشد پیوسته معماری دانشگاه تهران گردید. ایشان اکنون به عنوان عضو هیأت علمی دانشگاه شهید باهنر کرمان مشغول به تدریس می‌باشد. وی در حوزه ارتباط معماری، سازه و ریاضی فعالیت می‌نماید.

