http://math-sci.iranjournals.ir
ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۲، شماره ۴ (۱۳۹۶)، صص. ۸۴-۷۱
© ۱۳۹۶ دانشگاه اصفهان
http://www.ui.ac.ir

مروری بر آنتروپی در ریاضی از شکل عددی تا عملگری

علی مرصّعی*

چکیده. واژه آنتروپی یا درگاشت در رشته‌های گوناگون علمی، معانی متفاوت پیدا کرده است که به اساسی‌ترین آنها در این مقاله اشاره می‌کنیم. همچنین در این مقاله سعی خواهیم کرد که ابتدا با یک مرور تاریخی بر مفهوم آنتروپی از شکل عددی آن به شکل عملگری برسیم و در این گذر به برخی از قضایا، نامساوی‌ها، و خواص مهم آنتروپی بپردازیم.

۱. آنتروپی عددی

از لحاظ تاریخی، معانی و مفاهیم زیادی از آنتروپی [۱] ارائه شده است. ریشه کلمه آنتروپی به کلازیوس [۲] در سال ۱۸۶۵ برمی‌گردد. کلازیوس این کلمه را از کلمه یونانی tropos به معنی دگرگونی یا تغییر شکل و یک پیشوند en - به علت منزوی شدن و گوشه‌گیر شدن خود در تحقیقاتش نسبت به مفهوم انرژی [۱۶]- ترکیب و ارائه کرد. در زیر به چند نمونه از تعاریف آنتروپی اشاره می‌کنیم:

- آنتروپی، بی‌نظمی (آشفتگی) یا عدم قطعیت یک سیستم را بیان می‌کند.
- آنتروپی، بردار زمان (درگاشت) است یعنی یک شاخص اساسی برای تشخیص گذشت زمان است. هرجا مقدار آنتروپی افزایش داشته باشد، نشان می‌دهد که پیکان زمان به سمت آینده است.
- آنتروپی، معیاری از اشتباهات تصادفی است که در هنگام انتقال یک سیگنال به وجود می‌آید، بنابراین می‌تواند معیاری از بازده‌ی سیستم ارسال پیام باشد.
- آنتروپی، معیاری از تعداد حالت‌های داخلی است که یک سیستم می‌تواند داشته باشد، بدون آنکه برای یک ناظر خارجی که فقط کمیت‌های ماکروسکوپی (مثل جرم، سرعت، بار و ...) آن را مشاهده می‌کند، متفاوت به نظر برسد.

توضیح اینکه آنتروپی دقیقا چیست، چندان ساده نیست. درک مفهوم آنتروپی دست کم از درک و توضیح مفاهیم فیزیکی مانند انرژی، نیرو، اندازه حرکت و سرعت، پیچیده‌تر است، از آن جهت که آنتروپی ملموس نیست و اغلب تحت عنوان معیاری برای بی‌نظمی تعریف می‌شود.

یک مفهوم آماری از آنتروپی، توسط شانون[۳] در نظریه ارتباطات و انتقال اطلاعات معرفی شد [۲۷]. این مفهوم، مشابه آنتروپی بولتزمان [۴] در ارتباط با توصیف آماری پیکربندی میکروسکوپی سیستم‌های چند بدنه‌ای و چگونگی تاثیر آن بر رفتارهای ماکروسکوپی آن‌ها می‌باشد [۱۴، ۳]. اثبات رابطه بین آنتروپی آماری، و آنتروپی مکانیک آماری و ترمودینامیک توسط جی‌نس

عبارات و کلمات کلیدی. آنتروپی شانون، آنتروپی نسبی، آنتروپی شرطی، فاصله کولبک-لایبلر، آنتروپی عملگری.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۸/۰۳ .

[1]Entropy [2]Clausius [3]Shannon [4]Boltzmann

[۵] آغاز شد [۱۵، ۱۷]. در یک چشم انداز، ابتدا مفهوم نرخ آنتروپی به نظریه سیستم‌های دینامیکی و تجزیه و تحلیل دنباله‌های نمادین، توسعه داده شد [۲۰، ۲].

مفهوم و موضوع متراکم‌سازی، گاهی اوقات ریشه در نظریه اطلاعات و آنتروپی شانون دارد، در حالی که به مثال‌هایی برخورد می‌کنیم که ریشه در الگوریتم‌های مختلط دارد [۱۳، ۴]. به عنوان یک نتیجه از این موضوع و کابردهای آن، ممکن است این سوال پیش بیاید که آنتروپی دارای معانی متنوعی است. حال این‌که آیا ارتباط بین این تنوع مفهوم با استفاده از کلمات مشابه در معانی مختلف گمراه کننده نیست؟

۱.۱. آنتروپی شانون. برای یک متغیر تصادفی X با مقادیر در یک مجموعه متناهی $\mathcal{X}$، آنتروپی شانون به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]

$$H(X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log_2 p(x)\,, \qquad (1)$$

که ناهمگونی توزیع احتمال p را اندازه می‌گیرد، توجه کنیم که همواره $H(X)\geq 0$. بویژه می‌نیمم $H(X)=0$ برای یک متغیر تصادفی ثابت بدست می‌آید؛ یعنی یک متغیر با یک نتیجه معین، که با تابع احتمال موضعی

$$p(x) = \begin{cases} 1 & ; x = x_0 \\ 0 & ; x \neq x_0 \end{cases}$$

بیان می‌شود. در مقابل، $H(X)$ دارای ماکزیمم $\log_2(|\mathcal{X}|)$ برای یک توزیع یکنواخت است، که در آن $|\mathcal{X}|$ تعداد عناصر مجموعه $\mathcal{X}$ می‌باشد. همچنین $H(X)$ به صورت زیر نیز نمایش داده می‌شود

$$S(p) = -\sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p(x_i)\log_2 p(x_i)\,. \qquad (2)$$

به صورت ساده‌تر، فرض کنید $a_1,\dots,a_n > 0$ چنان باشد که $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$. آنتروپی مقادیر $a_1,\dots,a_n$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$H(a_1,\dots,a_n) = -\sum_{j=1}^{n} a_j \log a_j\,. \qquad (3)$$

نامساوی آنتروپی بیان می‌کند که

$$H(a_1,\dots,a_n) \leq \log n\,, \qquad (4)$$

یا به طور معادل $\frac{1}{n} \leq \prod_{j=1}^{n} a_j^{a_j}$، [۱۸] را ببینید.

۲.۱. آنتروپی شرطی، آنتروپی نسبی و فاصله کولبک–لایبلر. آنتروپی شانون، توسط گری [۱۳] و کاور و توماس [۴] به ترتیب در سال‌های ۱۹۹۰ و ۲۰۰۶ به چند متغیر تصادفی نیز تعمیم داده شده است. این آنتروپی با توزیع‌های توام مطرح می‌شود، یعنی برای دو متغیر تصادفی X و Y که به ترتیب مقادیر خود را در دو فضای گسسته، متناهی و مختلف $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ می‌گیرند، آنتروپی عبارتست از

$$H(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log_2 p(x,y)\,. \qquad (5)$$

[5] Jaynes

با استفاده از این آنتروپی توام، آنتروپی شرطی [۶] را به صورت

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$$

نیز می‌توان بیان نمود [۴]، که میانگین آنتروپی‌ها (روی Y) از توزیع‌های احتمال شرطی $p(X|Y=y)$ را به صورت زیر بیان می‌کند

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= H(X,Y) - H(Y) \\ &= \sum_{y\in\mathcal{Y}} \left[-\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x,y) \log_{۲} p(x|y) \right] . \end{aligned} \tag{۶}$$

هرگاه X و Y متغیرهای تصادفی در یک فضای یکسان $\mathcal{X}$، به ترتیب با توزیع‌های p_X و p_Y باشند آن‌گاه آنتروپی نسبی [۷] را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} H_{rel}(X|Y) &= S_{rel}(p_X|p_Y) \\ &= -\sum_{x} p_X(x) \log_{۲} \left[\frac{p_X(x)}{p_Y(x)} \right] . \end{aligned} \tag{۷}$$

به راحتی می‌توان نشان داد [۴] که $S_{rel}(p_X|p_Y) \leq ۰$. در مقابل آنتروپی نسبی، فاصله کولبک-لایبلر [۸] [۱۹] را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:
برای دو توزیع احتمال p و q روی فضای یکسان

$$D(p||q) = -S_{rel}(p|q) = \sum_{x} p(x) \log_{۲} \left[\frac{p(x)}{q(x)} \right] , \tag{۸}$$

با این قرارداد که هرگاه $x=۰$ باشد $x\log x = ۰$ و هرگاه $y=۰$ و $x \neq ۰$ باشد $x \log y = +\infty$. از آنجا که $D(p||q)$ متقارن نیست و در نامساوی مثلثی صدق نمی‌کند لذا $D(p||q)$ نمی‌تواند یک متر باشد؛ تنها خاصیت مشترک آن با متر این است که $D(p||q) \geq ۰$، این نامساوی به نامساوی اطلاعاتی معروف است [۱۸]، و $D(p||q) = ۰$ اگر و فقط اگر $p=q$ باشد.
رویین و مرصّعی در [۲۶]، با فرض این که $\mathcal{X} = \{۱, ۲, \dots, n\}$ و $p(j) = p_j$ و $q(j) = q_j$ $(j = ۱, \dots, n)$ بردارهای احتمال باشند یعنی $p_j, q_j > ۰$ و $\sum_{j=۱}^{n} p_j = \sum_{j=۱}^{n} q_j = ۱$، فاصله کولبک-لایبلر (۸) را به صورت زیر در نظر گرفتند

$$D(p||q) = \sum_{j=۱}^{n} p_j \ln \left(\frac{p_j}{q_j} \right) .$$

در [۲۶] تظریف‌های عددی از نامساوی‌های آنتروپی و اطلاعاتی به صورت زیر ارائه شده است، که در آن منظور از تظریف یک نامساوی مانند $a \leq b$ عبارتست از پیدا کردن یک مقدار مانند c بطوری که $a \leq c \leq b$ و در برخی شرایط $a = c$ و در شرایطی دیگر $b = c$ و همچنین نامساوی تحت بعضی شرایط می‌تواند از هر دو طرف اکید باشد، برای اطلاعات بیشتر به مثال ۱۰۴ منبع [۲۳] مراجعه شود، برای دو بردار احتمال $\mu = (\mu_۱, \dots, \mu_m)$ و $\lambda = (\lambda_۱, \dots, \lambda_n)$، تابع

$$\omega : \{(i,j) \ : \ ۱ \leq i \leq m, ۱ \leq j \leq n\} \to [۰, +\infty)$$

---

[6] conditional entropy [7] relative entropy [8] Kullback-Leibler divergence

را تابع وزن می‌نامیم، هرگاه

$$\sum_{i=1}^{m}\omega(i,j)\mu_i = 1 \quad (j=1,\dots,n)$$

و

$$\sum_{j=1}^{n}\omega(i,j)\lambda_j = 1 \quad (i=1,\dots,m)\,.$$

حال با مفروضات بالا [۲۶]،

$$D(p\|q) \geq \ln \prod_{i=1}^{m}\left[I\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_1(i,j)q_j, \sum_{j=1}^{n}\omega_2(i,j)q_j\right)\right]^{-\mu_i} \geq 0\,,$$

که در آن I میانگین آیدنتریک می‌باشد که برای هر $a,b>0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I(a,b)=\begin{cases} a & ;a=b\\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & ;a\neq b\end{cases}$$

و ω_1 و ω_2 دو تابع وزن می‌باشند. همچنین در ادامه، در حالت‌های خاص، نامساوی‌های زیر ارائه شده است [۲۶]

$$\prod_{i=1}^{n} q_i^{p_i} \leq \prod_{i=1}^{n} I(p_i,q_i)^{p_i} \leq \prod_{i=1}^{n} p_i^{p_i}\,,$$

و

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{p_i} \geq \sqrt{\prod_{i=1}^{n} I\left(1,\frac{p_i^2}{q_i^2}\right)^{\frac{p_i+q_i}{2}}} \geq 1\,.$$

با توجه به نیازهای مکرر در علوم کاربردی مختلف، برای رفتن از بُعد یک به بُعدهای بالاتر، طبیعی به نظر می‌رسد که از حالت عددی به شکل ماتریسی (برای بُعد متناهی) و سپس به شکل عملگری برای بُعد نامتناهی (شمارا یا ناشمارا) بیاندیشیم. آنچه که در بخش بعدی می‌آید، شکل عملگری آنتروپی را بررسی می‌کند که در حالت بُعد متناهی همان شکل ماتریسی آنتروپی خواهد بود.

۲. آنتروپی عملگری

۱.۲. مقدمه. فرض کنید $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک فضای هیلبرت مختلط و $\mathbb{B}(\mathcal{H})$، C^*-جبر همه عملگرهای کراندار روی $\mathcal{H}$ با عنصر همانی $1_{\mathcal{H}}$ باشد. در صورتی که $\dim\mathcal{H}=n$ باشد، مجموعه $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ جبر همه ماتریس‌های مربعی مرتبه n با درآیه‌های مختلط خواهد بود، که در آن $\dim\mathcal{H}$ بعد فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می‌باشد. *عملگر الحاقی* A^* از A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle \quad (x,y\in\mathcal{H})\,.$$

عملگر A *خودالحاق* نامیده می‌شود هرگاه $A=A^*$. یک عملگر خودالحاق A مثبت نامیده می‌شود و می‌نویسیم $A\geq 0$، هرگاه برای هر $x\in\mathcal{H}$، $\langle Ax,x\rangle\geq 0$ و A را *اکیدا* مثبت می‌نامیم و می‌نویسیم $A>0$، هرگاه A مثبت و وارون‌پذیر باشد. می‌دانیم یک عملگر مثبت A دارای ریشه دوم مثبت منحصربفرد B با $B^2=A$ می‌باشد. برای دو عملگر خودالحاق A و B، می‌گوییم $A\geq B$ هرگاه $A-B\geq 0$ که همان مفهوم *ترتیب عملگری* می‌باشد. برای هر عملگر A، *قدرمطلق* A عبارتست از $|A|=(A^*A)^{1/2}$.

تعریف ۱.۲. *یک نگاشت $\Phi:\mathbb{B}(\mathcal{H})\to\mathbb{B}(\mathcal{K})$ خطی است اگر جمعی و همگن باشد؛ یعنی برای هر $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ و برای هر $X,Y\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$*

$$\Phi(\lambda X+\mu Y)=\lambda\Phi(X)+\mu\Phi(Y)\,,$$

که در آن $\mathcal{K}$ یک فضای هیلبرت مختلط می‌باشد.

نگاشت خطی $\Phi:\mathbb{B}(\mathcal{H})\to\mathbb{B}(\mathcal{K})$ مثبت است هرگاه ترتیب عملگری $\leq$ را حفظ کند؛ یعنی $A\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$ و $A\geq 0$ ایجاب کند که $\Phi(A)\in\mathbb{B}(\mathcal{K})$ و $\Phi(A)\geq 0$.

نگاشت خطی $\Phi:\mathbb{B}(\mathcal{H})\to\mathbb{B}(\mathcal{K})$ نرمال شده نامیده می‌شود هرگاه عملگر همانی را حفظ کند؛ یعنی $\Phi(1_{\mathcal{H}})=1_{\mathcal{K}}$.

مجموعه همه نگاشتهای خطی مثبت $\Phi:\mathbb{B}(\mathcal{H})\to\mathbb{B}(\mathcal{K})$ را با $\mathbf{P}[\mathbb{B}(\mathcal{H}),\mathbb{B}(\mathcal{K})]$ و مجموعه همه نگاشت‌های خطی مثبت نرمال شده $\Phi\in\mathbf{P}[\mathbb{B}(\mathcal{H}),\mathbb{B}(\mathcal{K})]$ را با $\mathbf{P}_N[\mathbb{B}(\mathcal{H}),\mathbb{B}(\mathcal{K})]$ نمایش می‌دهیم (برای جزئیات بیشتر [۱۲] را ببینید).

تعریف ۲.۲. *فرض کنیم f تابع پیوسته حقیقی مقداری باشد که روی یک بازه I تعریف شده است. گوییم f یکنوای عملگری است هرگاه نسبت به ترتیب عملگری یکنوا باشد؛ یعنی اگر A و B عملگرهای خودالحاق کراندار با $A\leq B$ و $\sigma(A)\subset I$ و $\sigma(B)\subset I$ باشند، که در آن $\sigma(A)$ مجموعه طیف عملگر A می‌باشد، آن‌گاه $f(A)\leq f(B)$. تابع f محدب عملگری نامیده می‌شود هرگاه برای هر عملگر خودالحاق کراندار A و B با $\sigma(A)\subset I$ و $\sigma(B)\subset I$ و هر $\lambda\in[0,1]$، داشته باشیم*

$$f((1-\lambda)A+\lambda B)\leq(1-\lambda)f(A)+\lambda f(B)\,. \tag{۹}$$

در حالت خاص $\lambda=\frac{1}{2}$، اگر f محدب باشد خواهیم داشت:

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right)\leq\frac{f(A)+f(B)}{2}\,. \tag{۱۰}$$

توابع صادق در (۱۰) محدب عملگری نقطه میانی نامیده می‌شوند.

تعریف ۳.۲. *تابع f مقعر عملگری نامیده می‌شود هرگاه $-f$ محدب عملگری باشد.*

تعریف ۴.۲. *یک حساب تابعی مقدماتی برای یک عملگر A به‌صورت زیر تعریف می‌شود: برای یک چندجمله‌ای $p(t)=\sum_{j=0}^{k}a_jt^j$ تعریف می‌کنیم*

$$p(A)=a_0 1_{\mathcal{H}}+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_kA^k,$$

که نگاشت $p\mapsto p(A)$ یک همریختی از جبر چندجمله‌ای‌ها به جبر عملگرهاست.
اگر A یک عملگر خودالحاق و Φ یک یکریختی بین $\mathcal{C}(\sigma(A))$ و C^*-جبر تولید شده بوسیله A و عملگر همانی روی $\mathcal{H}$ باشد و $f\in\mathcal{C}(\sigma(A))$، تعریف می‌کنیم $f(A)=\Phi(f)$.

حال قضیه‌ی تجزیه طیفی را برای عملگرهای خطی، کراندار و خودالحاق روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ معرفی می‌کنیم. برای این منظور ماتریس مربعی A، $k\times k$ که هرمیتی است در نظر می‌گیریم. طبق قضیه‌ای در جبر خطی، ماتریس یکانی U ($UU^*=U^*U=I_k$)، وجود دارد که A را می‌توان به این شکل تجزیه کرد

$$A=U^*\Lambda U, \tag{۱۱}$$

که $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Λ یک ماتریس قطری است که $\lambda_i \in \mathbb{R}$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند. اگر قرار دهیم

$$\begin{aligned} E_1 &= U^*\mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)U, \\ E_2 &= U^*\mathrm{diag}(1, 1, 0, \dots, 0)U, \\ &\vdots \\ E_k &= U^*\mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1)U. \end{aligned}$$

با این نمادگذاری رابطه‌ی (۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 (E_2 - E_1) + \cdots + \lambda_k (E_k - E_{k-1}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \Delta E_j, \tag{12}$$

که در آن $\Delta E_j = E_j - E_{j-1}$ و $E_0 = 0$.

اگر $f(t)$ تابع پیوسته حقیقی مقدار روی $\sigma(A)$ باشد، $f(A)$ به‌صورت

$$f(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) \Delta E_j \tag{13}$$

تعریف می‌شود. این نتیجه را می‌توان به عملگرهای خودالحاق روی فضای هیلبرت تعمیم داد [۱۲].

در سیستم‌های کوانتمی، آنتروپی فون نویمان از یک ماتریس چگالی A، که یک نیم ماتریس معین مثبت با اثر ۱ می‌باشد، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S(A) = -\mathrm{tr}(A \log A)\,,$$

که در آن منظور از اثر همان حاصل‌جمع درآیه‌های قطر اصلی آن یا به عبارت دیگر

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,,$$

که a_{ii} درآیه واقع بر سطرiم و ستونiم ماتریس A است، به بیان دیگر اثر یک ماتریس برابر مجموع مقادیر ویژه آن است.

می‌توان نشان داد که تابع $f(t) = -t \log t$ روی $(0, \infty)$ مقعر عملگری است. بعضی از این خواص جالب توسط لایب و روسکای [۲۱] ثابت شده است. برای ماتریس‌های چگالی ناجابجایی A و B آنتروپی نسبی اومگاکی [۲۹] بصورت زیر تعریف می‌شود

$$S(A, B) = \mathrm{tr}(A(\log A - \log B))\,.$$

چون $\log I_n = 0$ لذا بنا به تعریف بالا واضح است که $S(A) = -S(A, I_n)$.

آنتروپی نسبی عملگری از عملگرهای اکیدا مثبت A و B در نظریه اطلاعات ناجابجایی توسط فوجی و کامئی [۷] مطرح و بصورت زیر تعریف شد

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}\,.$$

برای عملگرهای مثبت A و B، قرار می‌دهیم

$$S(A|B) := s\text{-}\lim_{\epsilon \to +0} S(A + \epsilon 1_{\mathcal{H}} | B)\,, \tag{14}$$

مشروط بر اینکه حد قوی موجود باشد، که در آن منظور از حد قوی [9]، حد در توپولوژی قوی عملگری می‌باشد.
توجه کنید که $S(A|B)$ دارای شکل‌های مختلفی به صورت زیر است [۱۲، لم ۵ . ۳]

$$S(A|B) = -A^{\frac{1}{2}} \log \left(A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}} \right) A^{\frac{1}{2}} , \tag{15}$$

و

$$S(A|B) = B^{\frac{1}{2}} \eta \left(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \right) B^{\frac{1}{2}} , \tag{16}$$

که در آن $\eta(t) = -t \log t$ به تابع آنتروپی معروف است. با مفروضات بالا، اگر B وارون‌پذیر باشد آنگاه می‌توان $S(A|B)$ را با (۱۶) تعریف کرد حتی اگر A معکوس‌پذیر نباشد. بنابراین، با در نظر گرفتن یکنوای عملگری نسبت به B، آنتروپی نسبی عملگری را می‌توان دوباره به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۵.۲. *برای عملگرهای مثبت A و B، که در آن B وارون‌پذیر نیز می‌باشد، آنتروپی نسبی عملگری به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \left(\log \left(A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}} \right) \right) A^{\frac{1}{2}} . \tag{17}$$

علاوه بر این، هرگاه A و B جابجا شوند، آنگاه [۱۲]

$$S(A|B) = -A \log A + A \log B .$$

می‌توان دید که برای هر عملگر یکانی U،

$$S(U^*AU|U^*BU) = S(A|B) .$$

فوروتا یک توسیع پارامتری از نامساوی شانون و معکوس آن در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ را بدست آورد [۱۱]. بویژه، نشان داد که برای n–تایی مرتب از عملگرهای مثبت با مجموع ۱، $\sum_{i=1}^{n} S(A_j \mid B_j) \leq 0$. وی همچنین نامساوی‌های معکوس را که با آنتروپی نسبی عملگری تسالیس

$$T_\lambda(A|B) = \frac{A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right)^{\lambda} A^{\frac{1}{2}} - A}{\lambda}$$

که توسط یاناگی، کوری‌یاما، فورویچی [۳۰] برای $0 < \lambda \leq 1$ متناظر است مورد بررسی قرار داد، که در بخش بعدی به طور کامل در مورد آن بحث خواهیم کرد. در این بخش، تعاریف و خواص مقدماتی از آنتروپی نسبی عملگری را مطرح می‌کنیم [۱۲، فصل ۵].

آنتروپی نسبی عملگری دارای خواص میانگین‌های عملگری می‌باشد، که آن را در قضیه زیر بیان می‌کنیم [۱۲].

قضیه ۶.۲. [۱۲] *آنتروپی نسبی عملگری $S(A|B)$ دارای خواص زیر می‌باشد*

(الف) *(یکنوایی راست): $B \leq C$ ایجاب می‌کند که $S(A|B) \leq S(A|C)$.*

(ب) *(پیوستگی پایینی راست): $B_n \downarrow B$ ایجاب می‌کند که $S(A|B_n) \downarrow S(A|B)$، که در آن منظور از $B_n \downarrow B$، یعنی $B_1 \geq B_2 \geq \cdots$ و $B_n \to B$.*

(ج) *(همگنی): برای هر $\alpha > 0$، $S(\alpha A|\alpha B) = \alpha S(A|B)$.*

(د) *(نامساوی انتقالی): برای هر عملگر T، $T^* S(A|B) T \leq S(T^*AT|T^*BT)$، که در آن T^* الحاقی T می‌باشد.*

[9] strong limit (s-lim)

همچنین، توجه کنیم که آنتروپی نسبی عملگری از بالا کراندار است [۱۲، قضیه ۵ . ۱۲].

$$S(A|B) \leq -A\log A + A\log\|B\|\,,$$
$$S(A|B) \leq B - A\,,$$

و همچنین، می‌دانیم که اگر $A \geq B$، آنگاه $S(A|B) \leq 0$، و برای عملگرهای مثبت A, B، $S(A|B) = 0$ اگر و تنها اگر $A = B$.

علاوه بر این، آنتروپی نسبی عملگری دارای خواص جالبی می‌باشد که برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۱۲] مراجعه کرد. در زیر به چند نمونه از آنها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۷.۲. [۱۲] *گزاره‌های زیر برقرارند:*

(الف) آنتروپی نسبی عملگری ابر جمعی است؛ یعنی

$$S(A+B|C+D) \geq S(A|C) + S(B|D)\,.$$

(ب) آنتروپی نسبی عملگری تواما مقعر است؛ یعنی هرگاه برای $0 \leq t \leq 1$، $A = tA_1 + (1-t)A_2$ *و* $B = tB_1 + (1-t)B_2$، *آن‌گاه*

$$S(A|B) \geq tS(A_1|B_1) + (1-t)S(A_2|B_2)\,.$$

قضیه ۸.۲. [۱۲] *فرض‌کنیم* $\Phi \in \boldsymbol{P}_N[\mathbb{B}(\mathcal{H}), \mathbb{B}(\mathcal{K})]$ *نگاشت خطی مثبت نرمال شده باشد. آن‌گاه*

$$\Phi(S(A|B)) \leq S(\Phi(A)|\Phi(B))\,.$$

در سال ۲۰۱۳، مصلحیان و کیان [۲۴]، با در نظرگرفتن اینکه $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد، تابعک f–واگرای ناجابجایی Θ را به صورت زیر تعریف کردند

$$\Theta(\widetilde{A}, \widetilde{B}) := \sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}} f\left(A_i^{-\frac{1}{2}} B_i A_i^{-\frac{1}{2}}\right) A_i^{\frac{1}{2}}\,, \tag{۱۸}$$

که در آن $\widetilde{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ و $\widetilde{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ به ترتیب n–تایی‌هایی از عملگرهای اکیدا مثبت و خودالحاق روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می‌باشند. آن‌ها نشان دادند که اگر f تابع محدب عملگری باشد آن‌گاه

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} A_i, \sum_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} g(A_i, B_i)\,, \tag{۱۹}$$

که در آن $g(A,B) = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}$ تابع منظری[10] متناظر با f می‌باشد. همچنین در ادامه این مقاله، به عنوان کاربردی از نامساوی (۱۹)، با انتخاب $f(t) = -\log t$، تابعک کولبک–لایبلر عملگری[11] را به صورت زیر تعریف نمودند

$$\Theta(\widetilde{A}, \widetilde{B}) := \sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}} \log\left(A_i^{\frac{1}{2}} B_i^{-1} A_i^{\frac{1}{2}}\right) A_i^{\frac{1}{2}}\,,$$

---

[10] perspective function   [11] operator Kullback-Leibler functional

و سپس ثابت کردند که

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}} \log\left(A_i^{\frac{1}{2}} B_i^{-1} A_i^{\frac{1}{2}}\right) A_i^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{\frac{1}{2}} \log\left(\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{\frac{1}{2}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

مصلحیان، میرزاپور و مرصّعی در [۲۵] تعمیم زیر از آنتروپی عملگری را مطرح کردند.

برای $A > 0$ و $B > 0$، یک عدد حقیقی q و یک تابع یکنوای عملگری f، عملگر $S_q^f(A|B)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S_q^f(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^q f\left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}}.$$

یادآوری می‌کنیم که برای $f(t) = \log t$،

$$S_0^f(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log\left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}} = S(A|B)$$

آنتروپی نسبی عملگری است. برای $A > 0$ و $B > 0$ و هر عدد حقیقی q عملگر $A\natural_q B$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A\natural_q B := A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^q A^{\frac{1}{2}}$$

و برای $p \in [0, 1]$، $A\natural_p B$ منطبق بر $A\sharp_p B$ است، که آن را به عنوان p–میانگین توانی از A و B می‌شناسیم و عبارتست از

$$A\sharp_p B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^p A^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف ۹.۲. *فرض کنیم که $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ و $\boldsymbol{B} = (B_1, \ldots, B_n)$، n– تایی مرتب از عملگرهای اکیدا مثبت روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. برای $q \in \mathbb{R}$ و یک تابع یکنوای عملگری $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$، آنتروپی عملگری شانون تعمیم یافته عبارتست از*

$$S_q^f(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) := \sum_{j=1}^{n} S_q^f(A_j|B_j). \tag{۲۰}$$

یادآوری می‌کنیم که برای $q = 0$، $f(t) = \log t$ و $A, B > 0$، نامساوی آنتروپی نسبی عملگری $S_0^f(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log\left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}} = S(A|B)$ را بدست می‌آوریم. اشاره به این نکته جالب است که برای هر عدد حقیقی q، $S_q(A|B) = -S_{1-q}(B|A)$، بویژه $S_1(A|B) = -S(B|A)$.

در این مقاله با استفاده از ایده [۱۰]، کران‌های بالا و پایینی برای $S_q^f(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ به صورت زیر ارائه نمودند.

قضیه ۱۰.۲. *فرض کنیم f، $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ همانند تعریف ۹.۲ باشند. هرگاه $\sum_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} B_j = 1_{\mathcal{H}}$ و f مقعر عملگری باشد، آنگاه برای هر $p \in [0, 1]$ و هر عدد حقیقی ثابت $t_0 > 0$،*

$$f\left[\sum_{j=1}^{n}(A_j \natural_{p+1} B_j) + t_0\left(1_{\mathcal{H}} - \sum_{j=1}^{n} A_j \natural_p B_j\right)\right] - f(t_0)\left(1_{\mathcal{H}} - \sum_{j=1}^{n} A_j \natural_p B_j\right)$$
$$\geq S_p^f(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}), \tag{۲۱}$$

و برای هر $p \in [2,3]$ و هر عدد حقیقی ثابت $t_0 > 0$،

$$-f\left[\sum_{j=1}^{n}(A_j\natural_{p-1}B_j) + t_0\left(1_{\mathcal{H}} - \sum_{j=1}^{n}A_j\natural_p B_j\right)\right] + f(t_0)\left(1_{\mathcal{H}} - \sum_{j=1}^{n}A_j\natural_p B_j\right)$$
$$\leq S_p^f(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})\,. \tag{22}$$

از نتایج این قضیه، می‌توان به دو مورد زیر اشاره کرد که برای دیدن جزئیات بیشتر به [۲۵] مراجعه شود.

نتیجه ۱۱.۲. *فرض کنیم $A_1,\dots,A_n \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ دنباله‌ای از عملگرهای اکیدا مثبت روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد چنان که $\sum_{j=1}^{n} A_j = 1_{\mathcal{H}}$. آن‌گاه*

$$\log\left(\sum_{j=1}^{n} A_j^{-1}\right) \geq (\log n)\,1_{\mathcal{H}} - \frac{1}{n}\log\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right). \tag{23}$$

نتیجه ۱۲.۲ (نامساوی آنتروپی عملگری). *فرض کنیم که $A_1,\dots,A_n \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ عملگرهای وارون‌پذیر مثبتی باشند که $\sum_{j=1}^{n} A_j = 1_{\mathcal{H}}$. آن‌گاه*

$$-\sum_{j=1}^{n} A_j \log A_j \leq (\log n)\,1_{\mathcal{H}}\,.$$

۳. آنتروپی نسبی عملگری تسالیس

برای هر توزیع احتمال $p(x)$، آنتروپی تسالیس[12] در [۲۸] به صورت زیر تعریف شده است

$$S_\lambda(X) = -\sum_x p(x)^\lambda \log_\lambda p(x) \tag{24}$$

که در آن برای هر عدد حقیقی نامنفی x و $\lambda \neq 0$، تابع λ-لگاریتم عبارتست از $\log_\lambda(x) := \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}$. براحتی می‌توان دید که آنتروپی تسالیس یک توسیع پارامتری از آنتروپی شانون $S_1(X) := -\sum_x p(x)\log p(x)$ است و وقتی $\lambda \to 0$، همگرا به $S_1(X)$ می‌باشد. مطالعه بنیادی روی آنتروپی‌های نوع تسالیس، اساسا در مکانیک آماری توسعه داده شدند [۱].

مثال ۱.۳. *در این مثال سعی می‌کنیم با ارائه نمودار، مقایسه‌ای بین آنتروپی شانون و آنتروپی تسالیس در شکل عددی ارائه دهیم. می‌دانیم آنتروپی شانون از مقادیر $a_1,\dots,a_n > 0$ که $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ عبارتست از*

$$H(a_1,\dots,a_n) = -\sum_{j=1}^{n} a_j \log a_j\,,$$

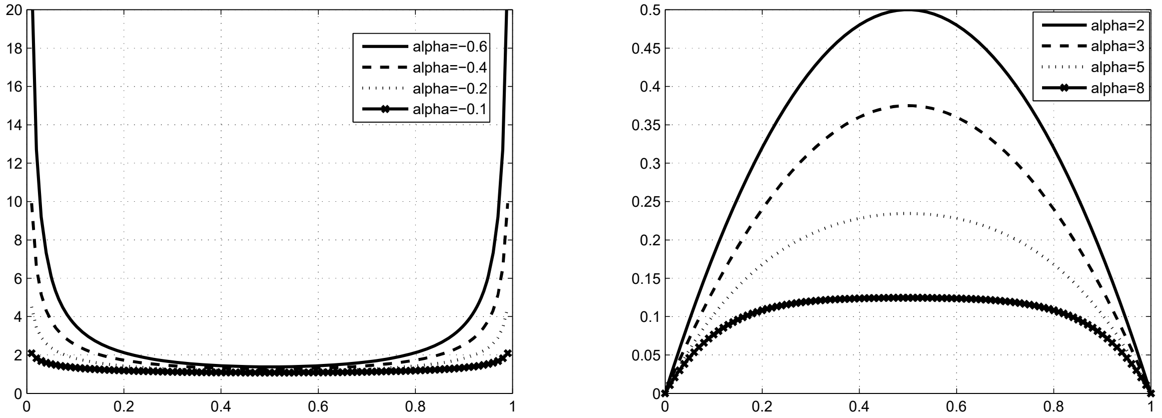
و آنتروپی تسالیس از مقادیر فوق عبارتست از

$$S_\alpha(a_1,\dots,a_n) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j^\alpha\right),$$

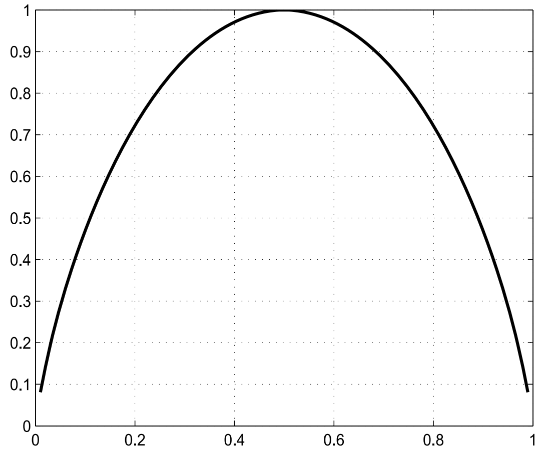
که در آن $\alpha > 0$ و $\alpha \neq 1$. در حالتی که $\alpha = 1$ باشد، $S_\alpha(a_1,\dots,a_n)$ تعریف نشده است اما حد آن وقتی $\alpha \to 1$ برابر $H(a_1,\dots,a_n)$ است. بنابراین آنتروپی تسالیس را می‌توان به عنوان تعمیمی از آنتروپی شانون در نظر گرفت [۲۲].

[12] Tsallis

در شکل ۱ و ۲ به ترتیب نمودار آنتروپی تسالیس برای چند مقدار مثبت و منفی از α و آنتروپی شانون رسم شده است.



شکل ۱: نمودارهای آنتروپی تسالیس برای چندین مقدار مثبت و منفی از α



شکل ۲: نمودار آنتروپی شانون

آنتروپی نسبی عملگری تسالیس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۳۰، ۹].

تعریف ۲.۳. *برای* $A>0$ ، $B>0$ و $0<\lambda\le 1$ ،

$$T_{\lambda}(A|B)=\frac{A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\lambda}A^{\frac{1}{2}}-A}{\lambda}$$

آنتروپی نسبی عملگری تسالیس بین A *و* B *نامیده می‌شود.*

در این بخش، چندین خاصیت اساسی از آنتروپی نسبی عملگری تسالیس را ارائه می‌دهیم و همچنین نامساوی عملگری نوع شانون را مطرح و معکوسی از آن را بیان می‌کنیم.

گزاره ۳.۳. [۶] *آنتروپی عملگری نسبی تسالیس $T_\lambda(A|B)$ دارای خواص زیر می‌باشد*

(الف) (همگنی) برای هر عدد مثبت α، $T_\lambda(\alpha A|\alpha B) = \alpha T_\lambda(A|B)$.

(ب) (یکنوایی) هرگاه $B \leq C$، آن‌گاه $T_\lambda(A|B) \leq T_\lambda(A|C)$.

توجه کنیم که نتایج کلی در [۶] نشان داده شده‌اند. علاوه‌براین، $T_\lambda(A|B)$ ابرجمعی و تواما مقعر است.

گزاره ۴.۳. [۶] *گزاره‌های زیر برقرارند.*

(الف) (ابر جمعی) $T_\lambda(A_1 + A_2|B_1 + B_2) \geq T_\lambda(A_1|B_1) + T_\lambda(A_2|B_2)$.

(ب) (تقعر توام) $T_\lambda(\alpha A_1 + \beta A_2|\alpha B_1 + \beta B_2) \geq \alpha T_\lambda(A_1|B_1) + \beta T_\lambda(A_2|B_2)$.

قضیه ۵.۳. [۳۰] *فرض کنیم $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ و $\boldsymbol{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ دو دنباله از عملگرهای اکیدا مثبت روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. هرگاه $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = 1_{\mathcal{H}}$، آن‌گاه*

$$0 \geq \sum_{j=1}^n T_\lambda(A_j|B_j) \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j\right)^{-\lambda} - 1_{\mathcal{H}}}{\lambda}.$$

همچنین نسخه عملگری از نامساوی شانون و معکوس آن توسط فوروتا [۱۰] همانند نتیجه‌ای از قضیه ۵.۳ در زیر ارائه می‌شود.

نتیجه ۶.۳ (فوروتا [۱۰]). *فرض کنیم $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ و $\boldsymbol{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ دو دنباله از عملگرهای اکیدا مثبت روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. هرگاه $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = 1_{\mathcal{H}}$، آن‌گاه*

$$0 \geq \sum_{j=1}^n A_j^{\frac{1}{2}} \log\left(A_j^{-\frac{1}{2}} B_j A_j^{-\frac{1}{2}}\right) A_j^{\frac{1}{2}} \geq -\log\left(\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j\right).$$

در واقع نتیجه ۶.۳ قسمتی از نتیجه ۴.۲ در [۱۰] می‌باشد. برای حالت کلی از آنتروپی نسبی عملگری [۳۰] را ببینید.

در سال ۲۰۱۶ فوجی و سئو [۸] آنتروپی عملگری نسبی تسالیس را برای پارامترهای منفی به صورت زیر تعریف کردند: فرض کنید A و B عملگرهای مثبت و $\lambda \in [-1, 0)$ باشد. از آن‌جا که $A \natural_\lambda (B+\epsilon) - A$ برای $\epsilon \searrow 0$ به طور یکنواخت صعودی است، این ایجاب می‌کند که آنتروپی عملگری نسبی تسالیس

$$T_\lambda(A|B+\epsilon) = \frac{A \natural_\lambda (B+\epsilon) - A}{\lambda},$$

برای $\epsilon \searrow 0$ به طور یکنوا نزولی باشد. در این صورت آنتروپی عملگری نسبی تسالیس با پارامترهای منفی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$T_\lambda(A|B) = s\text{-}\lim_{\epsilon \downarrow 0} T_\lambda(A|B+\epsilon),$$

مشروط بر آنکه حد قوی عملگری موجود باشد. همچنین فوجی و سئو در [۸] نتایج جالب زیر را نیز بیان نمودند:

قضیه ۷.۳. *فرض کنید A و B عملگرهای مثبت باشند.*

(الف) اگر برای $\lambda \in [-1, 0)$ای، $T_\lambda(A|B)$ موجود باشد، آن‌گاه

$$T_\lambda(A|B) \le \frac{A^{1-\lambda} - A}{\lambda} + A^{1-\lambda}\log_\lambda \|B\| .$$

(ب) برای $c > 0$ای، $A \le cB$ ایجاب می‌کند که برای هر $\lambda \in [-1, 0)$

$$T_\lambda(A|B) \ge (1 - c)A .$$

همچنین در ادامه با فرض این‌که A و B عملگرهای مثبت و $T_\lambda(A|B)$ برای $\lambda \in [-1, 0)$ای موجود باشد، نشان دادند که $T_\lambda(A|B) \ge (\le) 0$ اگر و تنها اگر $B \ge (\le) A$ باشد.

فوجی و سئو در این مقاله، رابطه آنتروپی عملگری نسبی تسالیس برای پارامترهای منفی را با آنتروپی نسبی عملگری در فضیه زیر بیان کردند.

قضیه ۸.۳. *فرض کنید A و B عملگرهای مثبت بوده و برای $\lambda_0 \in [-1, 0)$ای، $T_{\lambda_0}(A|B)$ موجود باشد، آن‌گاه*

$$T_\lambda(A|B) \nearrow S(A|B) \quad \text{برای} \quad \lambda_0 \le \lambda \nearrow 0$$

که در آن $S(A|B)$ آنتروپی نسبی عملگری تعریف شده در (۱۴) می‌باشد.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

آنچه که در این مختصر مرور کردیم با هدف آشنایی کلی با مفهوم آنتروپی، شکل‌های عددی و ماتریسی و عملگری آن بود. همانگونه که در متن مقاله اشاره شده بود برای دیدن مطالب بیشتر و دقیقتر به همراه اثبات آنها در زمینه آنتروپی، باید به منابع گفته شده مراجعه و آنها را مطالعه نمود. همچنین برای دیدن کاربردهای بیشتری از این مفهوم در زمینه نظریه اطلاعات و کد گذاری به منابع [۴، ۱۲، ۱۸، ۲۵، ۳۱، ۳۲] مراجعه شود. امیدوارم این مقاله رهنمودی برای دانشجویان علاقمند به پژوهش در این زمینه باشد.

۵. تشکر وقدردانی

مولف بر خود وظیفه می‌داند از نظرات اصلاحی و پیشنهادی داور محترم کمال تشکر را داشته باشد.

مراجع

[1] S. Abe and Y. Okamoto, *Nonextensive statistical mechanics and its applications*, Lecture Notes Physics, Springer-Verlage, Berlin, 2001.

[2] R. Badii and A. Politi, *Complexity. Hierarchical structures and scaling in physics*, Cambridge University Press, 1997.

[3] P. Castiglione, M. Falcioni, A. Lesne and A. Vulpiani, *Chaos and coarse-graining in statistical mechanics*, Cambridge University Press, 2008.

[4] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of information theory*, 2nd edition, Wiley, New York, 2006.

[5] J. I. Fujii, Operator means and the relative operator entropy, *Oper. Theory Adv. Appl.*, **59** (1992) 161–172.

[6] J. I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo, An extension of Kubo-Ando theory: Solidarities, *Math. Japonica* **35** (1990) 387–396.

[7] J. I. Fujii and E. Kamei, Uhlmann's interpolational method for operator means, *Math. Japonica* **34** (1989) 541–547.

[8] J. I. Fujii and Y. Seo, Tsallis relative operator entropy with negative parameters, *Adv. Oper. Theory*, **1** (2016) 219–235.

[9] S. Furuichi, K. Yanagi and K. Kuriyama, A note on operator inequalities of Tsallis relative operator entropy, *Linear Algebra Appl.*, **407** (2005) 19–31.

[10] T. Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, *Linear Algebra Appl.*, **381** (2004) 219–235.

[11] T. Furuta, Reverse inequalities involving two relative operator entropies and two relative entropies, *Linear Algebra Appl.*, **403** (2005) 24–30.

[12] T. Furuta, J. Mićić Hot, J.E. Pečarić and Y. Seo, *Mond-Pečarić method in operator inequalities*, Element, Zagreb, 2005.

[13] R. M. Gray, *Entropy and information theory*, Springer, New York, 1990, Available at http://ee.stanford. edu/ gray/it.html.

[14] J. Honerkamp, *Statistical physics*, Springer, Berlin, 1998.

[15] E. T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics Part I, *Phys. Rev.*, **106** (1957) 620–630. Part II, *Phys. Rev.*, **108** 171–190.

[16] E. T. Jaynes, The minimum entropy production principle, *Ann. Rev. Phys. Chem.*, **31** (1980) 579–601.

[17] E. T. Jaynes, On the rationale of maximum entropy methods, *Proc. IEEE*, **70** (1982) 939–952.

[18] G. A. Jones and J. M. Jones, *Information and coding theory*, Springer-Verlag, 2000.

[19] S. Kullback and R. A. Leibler, On information and sufficiency, *Ann. Math. Statist.*, **22** (1951) 79–86.

[20] A. Lesne, J. L. Blanc and L. Pezard, Entropy estimation of very short symbolic sequences, *Phys. Rev. E*, **79** (2009) 046208.

[21] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy, *J. Mathematical Phys.*, **14** (1973) 1938–1941.

[22] T. Maszczyk and W. Duch, Comparison of Shannon, Renyi and Tsallis entropy used in decision trees, *ICAISC*, LNAI, **5097** (2008) 643–651.

[23] F. Mirzapour, M. S. Moslehian and A. Morassaei, Operator Bellman type inequalities, *Quaest. Math.*, **37** (2014) 9–17.

[24] M. S. Moslehian and M. Kian, Non-commutative f-divergence functional, *Math. Nachr.*, **286** (2013) 1514–1529.

[25] M. S. Moslehian, F. Mirzapour and A. Morassaei, Operator entropy inequalities, *Colloq. Math.*, **37** (2014) 159–168.

[26] J. Rooin and A. Morassaei, Some refinements of relative information inequality, *Creative Math. & Inf.* **16** (2007) 95–98.

[27] C. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell System Tech. J.*, **27** (1948) 379–423.

[28] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzman-Gibbs statistics, *J. Statist. Phys.*, **52** (1988) 479–487.

[29] H. Umegaki, Condition expectation in an operator algebra IV, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **14** (1962) 59–85.

[30] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, *Linear Algebra Appl.*, **394** (2005) 109–118.

[۳۱] س .هـ. پروانه مسیحا، *احتمال، نظریه اطلاع و کدگذاری*، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۹۲.

[۳۲] د .س. جونز، *نظریه مقدماتی اطلاع*، ترجمه ن .ر. ارقامی و م .ع. پورعبداله‌نژاد، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۷.

علی مرصّعی

زنجان، بلوار دانشگاه، دانشگاه زنجان، دانشکده علوم، گروه ریاضی

morassaei@znu.ac.ir

علی مرصّعی متولد ۳۰ام شهریورماه ۱۳۵۴ در شهر زنجان است. وی در سال ۱۳۷۲ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه زنجان و در سال ۱۳۷۶ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی در دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان شد. وی در سال ۱۳۸۷ دوره دکتری ریاضی خود را در گرایش نظریه عملگرها تحت راهنمایی آقایان دکتر فرض اله میرزاپور و دکتر محمد صال مصلحیان شروع و در آذرماه ۱۳۹۱ از رساله خود دفاع نمود. وی هم‌اکنون عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه زنجان می‌باشد.