ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۲، شماره ۴ (۱۳۹۶)، صص. ۶۹-۵۹
© ۱۳۹۶ دانشگاه اصفهان

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.iranjournals.ir

حسابان کسری از نظریه تا کاربرد

محمدحسین اکرمی

چکیده. در این مقاله، ابتدا به معرفی حسابان کسری شامل تعریف مشتق و انتگرال کسری و روابط حاکم بر آن‌ها، شباهت‌ها و تفاوت‌های حسابان کسری با حسابان کلاسیک و تعبیر هندسی مشتق و انتگرال کسری می‌پردازیم. سپس کاربردهایی از حسابان کسری و معادلات دیفرانسیل کسری را ارائه می‌دهیم.

۱. مقدمه

با جستجو در مقالات انتشار یافته در چند دههٔ اخیر در زمینه‌های علوم و مهندسی، کم و بیش با موضوعات حسابان کسری، معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری و مفاهیمی از این نوع، برخورد می‌کنیم. این مقالات هم در زمینهٔ نظری و هم در زمینه کاربردی وجود دارند و سهم قابل توجهی از تحقیقات را به خود اختصاص داده‌اند. تا کنون کتاب‌های متعددی نیز در این زمینه با جنبه‌های نظری و کاربردی تألیف شده‌اند [۶، ۱۴، ۱۷]. برخی از نویسندگان مشتق و انتگرال کسری را تعمیمی از مفاهیم کلاسیک معرفی کرده و سعی کرده‌اند ادعای خود را به اثبات برسانند. علاوه‌براین کنفرانس و سمینارهای تخصصی با موضوع حسابان کسری سالانه برگزار می‌شود و همچنین چندین مجلهٔ تخصصی در این زمینه نیز به انتشار مقالات با این عناوین می‌پردازند. همهٔ این موارد بیانگر این است که این موضوع در علوم پایه و حتی مهندسی از جایگاه خوبی برخوردار است. هدف از نگارش این مقاله این است که محققان کشورمان با مفاهیم اولیهٔ حسابان کسری و گوشه‌ای از کاربردهای آن آشنا شوند. ساختار کلی این مقاله به این صورت است که در بخش ۲، تاریخچه‌ای مختصر از شکل‌گیری و پیشرفت مفاهیم حسابان کسری را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، جنبه‌های نظری انتگرال و مشتق کسری را بررسی کرده و تعبیر هندسی از آن‌ها را ارائه می‌کنیم. و در نهایت در بخش آخر کاربردهایی از حسابان کسری را معرفی می‌کنیم.

۲. تاریخچه

حسابان کسری موضوعی است که بیش از ۳۰۰ سال قدمت دارد. ایدهٔ حسابان کسری از همان زمان حسابان معمولی (یا کلاسیک) به وجود آمده و بیشترین نظریه‌های مربوط به آن تا قبل از قرن بیستم گسترش یافته بود. نخستین‌بار در سال ۱۶۹۵ این موضوع را لایبنیتس[۱] و هوپیتال[۲] مطرح کردند. در واقع در آن زمان هوپیتال به لایبنیتس نامه‌ای نوشت و نظر او

عبارات و کلمات کلیدی. حسابان کسری، مشتق و انتگرال کسری، تعبیر فیزیکی مشتق کسری .
تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۸/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۳۰ .

[1]Leibniz [2]L'Hospital

را درمورد مشتق با مرتبهٔ غیر صحیح $\frac{1}{2}$ جویا شد. لایبنیتس در پاسخ به او نوشت: « این موضوع منجر به تناقض می‌شود، اما بعدها نتایج مفیدی از آن به‌دست خواهد آمد» و این تولد حسابان کسری بود. سؤال طرح شده توسط لایبنیتس باعث شد از آن به بعد افراد زیادی این موضوع را دنبال کنند. در سال ۱۷۳۰ این موضوع توجه اویلر[3] را به خود جلب نمود. در آن زمان اویلر بیان کرد که « اگر n یک عدد صحیح مثبت و p تابعی از x باشد. کسر $d^n p$ به dx^n را می‌توان به صورت جبری بیان نمود». در ۱۷۷۲، لاگرانژ[4] با مطالعهٔ عملگر دیفرانسیلی، به طور غیرمستقیم به حسابان کسری پرداخته بود. در ۱۸۱۲ لاپلاس[5] یک مشتق کسری را به وسیلهٔ انتگرال تعریف نمود و در ۱۸۱۹ اولین مفهوم مشتق از مرتبه دلخواه توسط لاکروا[6] معرفی شد. نفر بعد که مشتق از مرتبهٔ دلخواه را معرفی نمود، فوریه[7] در سال ۱۸۲۲ بود. وی عملگر کسری خود را بر اساس نمایش انتگرالی از تابع $f(x)$ تعریف نمود. اگرچه دانشمندان و محققان زیادی مفهوم عملگر کسری را ارائه دادند، اما اولین کسی که عملگر کسری را به کار برد آبل[8] در سال ۱۸۲۳ بود. لیوویل[9] مطالعات خود را در ۱۸۳۲ بر روی حسابان کسری آغاز کرد. وی اولین کسی بود که تلاش کرد معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری را حل کند. در ۱۸۶۷ گرونوالد[10] نیز در زمینهٔ عملگرهای کسری مطالعاتی انجام داد. بین سال‌های ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۲ لتنیکف[11] چند مقاله در زمینه حسابان کسری نوشت. در ۱۸۹۲ یک مقاله از ریمان[12] منتشر شد که نشان می‌داد وی مفهوم انتگرال کسری رابه کار برده است. گرونوالد و کروگ[13] نتایج بدست آمده توسط ریمان و لیوویل را یکسان‌سازی کرده و انتگرال و مشتقی را به نام ریمان–لیوویل معرفی کردند، که امروزه هنوز با همین نام به کار می‌رود. در اوایل قرن بیستم یعنی بین سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۷۰ تلاش‌های زیادی توسط دانشمندان مختلف در این زمینه صورت گرفت. شخصی به نام کاپوتو[14] با استفاده از بازنویسی فرمول ریمان–لیوویل مشتق جدیدی را معرفی نمود که امروزه با نام مشتق کاپوتو از آن استفاده می‌شود. افراد قابل ذکری که در این دوره بر روی این موضوع کار کرده‌اند عبارتند از: هاردی[15]، سمکو[16]، ویل[17]، ریس[18]، بلیر[19]. از ۱۹۷۰ تا کنون نیز افراد زیادی در این زمینه مطالعه کرده و همچنین مقالات و کتاب‌های مفیدی برجای گذاشته‌اند. در این راستا می‌توان به اسپانیر[20]، اولدهام[21]، میلر[22]، کیلباس[23]، راس[24]، پودلُبنی[25] و ... اشاره نمود. بهترین مرجع برای مطالعه حسابان کسری کتاب‌های میلر و راس، کیلباس و پودلبنی است. برای مطالعه جامع‌تری از تاریخ حسابان کسری به [۲۰] مراجعه کنید.

۳. مفاهیم مشتق و انتگرال کسری

اگر دنبالهٔ نامتناهی انتگرال‌های n–گانه و مشتقات یک تابع را به صورت

$$\ldots, \int_a^t \int_a^{t_2} f(t_1)dt_1 dt_2, \int_a^t f(t_1)dt_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \ldots$$

در نظر بگیریم، دنبالهٔ گسسته‌ای از عملگرها روی تابع f را داریم. مشتق (و انتگرال) از مرتبهٔ دلخواه α به صورت یک عملگر درونیاب برای این دنباله تعریف و با نماد ${}_aD_t^\alpha f(t)$ نمایش داده می‌شود. لازم به ذکر است که اگر α منفی باشد، عملگر را انتگرال کسری می‌نامیم.

---

[3]Euler [4]Lagrange [5]Laplace [6]Lacroix [7]Fourier [8]Abel [9]Liouville [10]Grünwald [11]Letnikov [12]Riemann [13]Krug [14]Caputo [15]Hardy [16]Samko [17]Weyl [18]Riesz [19]Blair [20]Spanier [21]Oldham [22]Miller [23]Kilbas [24]Ross [25]Podlubny

۱.۳. انتگرال کسری. ایدهٔ تعریف انتگرال کسری از همان انتگرال nـگانهٔ ریمان‌ـلیوویل گرفته شده است. به عبارت دیگر، برای $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\int_a^t \int_a^{t_n} \int_a^{t_{n-1}} \cdots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1)dt_1dt_2 \cdots dt_{n-1}dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1}d\tau.$$

فرمول فوق به فرمول کوشی معروف است. انتگرال کسری از مرتبه دلخواه $\alpha > 0$ به صورت

$$ {}_aD_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau, \qquad (t > a), \tag{1}$$

تعریف می‌شود که در آن $\Gamma(\alpha)$ تابع گاما است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳. *تابع گاما بر دامنهٔ $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$ با ضابطهٔ*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt,$$

تعریف می‌شود. این تابع تعمیم تابع فاکتوریل (برای اعداد طبیعی) است. به سادگی از رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

تذکر ۲.۳. *لازم به ذکر است که برخی از نویسندگان، انتگرال کسری را با نماد ${}_aI_t^\alpha$ نشان می‌دهند.*

برای مشتق کسری تعریف‌های متفاوتی وجود دارد که معروف‌ترین آن‌ها را در ادامه بیان می‌کنیم.

۲.۳. مشتق کسری گرونوالد‌ـلِتنیکف. برای تعریف مشتق کسری گرونوالدـلتنیکف با تعریف مشتق کلاسیک (از مرتبه عدد صحیح) شروع می‌کنیم؛ یعنی

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h},$$

با تکرار این فرمول، مشتق دوم به صورت

$$f''(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(t+h)-f'(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lim\limits_{h_1\to 0} \frac{f(t+h+h_1)-f(t+h)}{h_1} - \lim\limits_{h_1\to 0} \frac{f(t+h_1)-f(t)}{h_1}}{h},$$

تعریف می‌شود. با قرار دادن $h_1 = h$ داریم:

$$f''(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{h^2}.$$

با تکرار این فرآیند، مشتق مرتبه n به صورت

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh), \tag{2}$$

به‌دست می‌آید که در آن

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

مشتق گرونوالد–لتنیکف (به عنوان تعمیم رابطهٔ (۲)) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}^+$ به صورت

$$ {}^{GL}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh) \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود که در آن

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

برای جزئیات بیشتر در مورد نحوهٔ دقیق به‌دست آمدن رابطهٔ (۳) به [۱۷] مراجعه کنید. رابطهٔ (۳) برای محاسبه مقدار عددی مشتق کسری توابع بسیار مناسب است.

۳.۳. مشتق کسری ریمان–لیوویل. تعریف دیگری از مشتق که بسیار پرکاربرد و معادل با تعریف گرونوالد–لتنیکف است مشتق ریمان–لیوویل نامیده می‌شود و برای مرتبهٔ دلخواه α $(n-1 \le \alpha < n)$ به صورت

$$ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \qquad (۴)$$

تعریف می‌شود، که بر اساس انتگرال کسری (۱) به صورت

$$ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} {}_{a}D^{-(n-\alpha)}_{t} f(t),$$

قابل نوشتن است. برخی از خواص مهم این تعریف به‌صورت زیر است.

- $ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t}({}_{a}D^{-\alpha}_{t} f(t)) = f(t), \quad n-1 \le \alpha < n.$
- $ {}_{a}D^{-\alpha}_{t}({}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^{n} \left[{}^{RL}_{a}D^{\alpha-j}_{t} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, \quad n-1 \le \alpha < n.$
- $ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$
- $ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t}({}_{a}D^{-\beta}_{t} f(t)) = {}^{RL}_{a}D^{\alpha-\beta}_{t} f(t).$
- $ {}_{a}D^{-\beta}_{t}({}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t)) = {}_{a}D^{\alpha-\beta}_{t} f(t) - \sum_{j=1}^{n} \left[{}^{RL}_{a}D^{\alpha-j}_{t} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)}, \quad n-1 \le \alpha < n.$

برای جزئیات بیشتر به [۱۷] مراجعه کنید.

۴.۳. مشتق کسری کاپوتو. مشتق و انتگرال کسری ریمان–لیوویل نقش بسیار مهمی در پیشرفت مسائل نظری و محض حسابان کسری داشته است. اما چون حل معادلات با مشتقات کسری ریمان–لیوویل به شرایط اولیه با مشتقات کسری نیاز است، نتوانست در کاربرد، به‌ویژه در حل معادلات کسری رشد چندانی داشته باشد. با توجه به پیشرفت‌های جدید علوم و یافتن کاربردهایی از مشتقات کسری در مدل‌سازی پدیده‌ها، به یک تعریف از مشتق کسری نیاز بود که بتواند بهتر پدیده‌ها را مدل‌بندی کند و با شرایط اولیه مسئله‌ها نیز سازگار باشد. از این‌رو کاپوتو در سال ۱۹۷۶ در مقاله خود [۵] مشتق کسری جدیدی را به صورت

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 \le \alpha < n, \qquad (۵)$$

معرفی کرد.

رابطهٔ بین مشتق کسری ریمان–لیوویل و کاپوتو به صورت زیر است.

$$ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t}f(t) = {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t}f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}, \quad n-1 \leq \alpha < n. $$

از رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که اگر برای $k = 0, 1, \ldots, n-1$ داشته باشیم $f^{(k)}(a) = 0$، آنگاه دو تعریف مشتق با هم برابر می‌شوند. علاوه‌بر این با استفاده از این رابطه می‌توان ارتباط خواص مشتق کاپوتو با مشتق ریمان را به‌دست آورد. برای جزئیات بیشتر در مورد این تعریف‌ها به مراجع [۱۲، ۱۴، ۱۷، ۲۲] مراجعه کنید.

تذکر ۳.۳. *تعریف‌های دیگری نیز مانند تعریف میلر–راس* [۱۵] *و تعریف جوماریه* [۱۰، ۱۱] *برای مشتق کسری وجود دارند. اما مهم‌ترین و پرکاربردترین آن‌ها همین سه تعریف فوق هستند.*

همان‌طور که در بخش مقدمه بیان کردیم. مشتقات کسری در معادلات زیادی ظاهر می‌شوند. به‌عبارت دیگر معادلات دیفرانسیل کسری در بسیاری از مدل‌ها ظاهر می‌شوند. بنابراین حل آن‌ها نیز بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در نتیجه عملیات بر روی عملگرهای مشتق و انتگرال کسری نیز گسترش یافته و مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال تبدیل لاپلاس و فوریه از مشتق و انتگرال کسری نیز تعریف می‌شود [۱۴، ۱۷]. علاوه‌بر این، به جز روش‌های حل معادلات دیفرانسیل کسری، بحث در مورد وجود و یکتایی جواب‌های این معادلات نیز بخش مهمی از تحقیقات را به خود اختصاص داده است [۶].

۴. خواص جبری و تعبیر هندسی حسابان کسری

همان‌طور که در بخش تاریخچه بیان شد، مشتق و انتگرال کسری برخلاف مفاهیم کلاسیک (معمولی) آن، ابتدا جنبه نظری آن‌ها پایه‌گذاری شد و سپس کاربردهایی برای آن‌ها یافته شد. به عبارت دیگر مفهوم مشتق کلاسیک از شیب خط مماس در هندسه و یا مفهوم سرعت در فیزیک شروع و در نهایت به یک تعریف ریاضی منجر شد. اما مشتق کسری ابتدا به صورت یک تعمیم از مشتق معمولی مطرح شد و به عنوان یک تعریف محض ریاضی گسترش یافت. در این بخش، دیدگاه نظری را به دو بخش دیدگاه جبری و هندسی تقسیم می‌کنیم.

۱.۴. خواص جبری. منظور از دیدگاه جبری در اینجا این است که بدون توجه به مفهوم هندسی و یا فیزیکی مشتق و انتگرال کسری، به بررسی خوش‌تعریفی تعاریف ارائه شده و سازگاری آن‌ها با مفاهیم کلاسیک متناظرشان بپردازیم. مطالبی که تا به حال در این مقاله ذکر شده‌اند تماماً این مطلب را تأیید می‌کنند که مشتق و انتگرال کسری از نظر جبری تعمیمی از مشتق و انتگرال کلاسیک هستند. به عبارت دیگر وقتی در تعاریف فوق، مرتبهٔ مشتق و انتگرال را یک عدد صحیح انتخاب کنیم، دقیقاً همان تعاریف کلاسیک را خواهیم داشت. یعنی مشتق‌های تعریف شده خوش تعریف بوده و کاملاً مفاهیم قبل را در بر دارند. زیرا چنان‌چه در بالا بیان شد مفاهیم مشتق و انتگرال کسری به صورت درونیاب برای عملگرهای مشتق و انتگرال کلاسیک تعریف شدند. به عبارت دیگر برای عدد طبیعی n داریم:

$$ {}^{GL}_{a}D^{n}_{t} = {}^{RL}_{a}D^{n}_{t} = {}^{C}_{a}D^{n}_{t} = \frac{d^n}{dt^n}. $$

با توجه به فرمول کوشی این نتیجه‌گیری برای انتگرال کسری نیز واضح است.

می‌توانیم پا را فراتر گذاشته و مفاهیم دیگری را نیز از حسابان کسری به عنوان تعمیمی از حسابان کلاسیک بیان کنیم. همان‌طور که می‌دانیم تابع نمایی، نقش بسیار مهمی در حسابان کلاسیک دارد. جالب‌ترین ویژگی تابع نمایی این است که مشتق آن با خود تابع برابر است. تعمیم تابع نمایی در حسابان کسری تابع میتگ–لِفلِر[۲۶] است که به صورت

$$E_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \tag{۶}$$

تعریف می‌شود. واضح است که $E_1(x)=e^x$ و همچنین $E_\alpha(0)=1$. با توجه به خاصیت مشتق کسری داریم:

$${}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t}E_\alpha(x)=E_\alpha(x).$$

این تابع خواص جالب دیگری نیز دارد [۱۲، ۱۷]. به جرئت می‌توان گفت که این تابع در حسابان کسری به اندازه تابع نمایی در حسابان کلاسیک اهمیت دارد. به عنوان مثال، در جواب برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری ظاهر می‌شود [۱، ۱۷]. یک کتاب نیز با عنوان این تابع و کاربردهای آن وجود دارد [۹].

حال که به‌طور مختصر با مفهوم مشتق کسری (از نظر جبری) آشنا شدیم انتظار داریم خواص مشتقات کسری نیز تعمیمی از خواص مشتق کلاسیک باشد. هرچند تا به حال کارهای زیادی در این زمینه انجام شده، ولی نمی‌توان به‌سادگی همهٔ خواص آن‌ها را با یک حکم کلی تعمییم داد. به عنوان مثال مشتق کسری دارای خاصیت خطی است یعنی

$${}_{a}D^{\alpha}_{t}(c_1f(t)+c_2g(t))=c_1{}_{a}D^{\alpha}_{t}f(t)+c_2{}_{a}D^{\alpha}_{t}g(t).$$

اما خاصیت مشتق ضرب توابع (قاعدهٔ لایبنیتس) مانند حالت کلاسیک برقرار نیست، یعنی

$${}_{a}D^{\alpha}_{t}(f(t)g(t))\neq\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}g^{(k)}(t)f^{(\alpha-k)}(t).$$

رابطهٔ نظیر قاعدهٔ لایبنیتس در [۱۴، ۱۷] به‌دست آمده است. از بحث فوق نتیجه می‌گیریم که اگرچه مشتق کسری تعمیم و یا حالت کلی از مشتق کلاسیک است. اما ممکن است عدم وجود خواص مشابه مشتق کلاسیک باعث شود در برخی موارد قادر به استفاده از مشتق کسری نباشیم. یا به عبارت دیگر، وجود چنین ارتباط‌هایی بین مشتق کسری و کلاسیک باعث می‌شود که در به‌کارگیری مشتق کسری با احتیاط برخورد کنیم. خوشبختانه کتاب‌های زیادی در زمینه حسابان کسری و معادلات دیفرانسیل کسری نوشته شده است که به بررسی و تجزیه و تحلیل مشتق و انتگرال کسری پرداخته‌اند. برای دنبال کردن مطالب بیشتر می‌توانید به کتاب‌های [۶، ۱۲، ۱۴، ۱۷] مراجعه کنید.

۲.۴. تعبیر هندسی. در حسابان کلاسیک، مفهوم انتگرال معین با سطح زیر منحنی و مفهوم مشتق با شیب خط مماس بر منحنی (در دو بُعد) تعبیر می‌شود. حال سؤال این است که این تعابیر در حسابان کسری نیز وجود دارد؟ آیا می‌توان تعمیمی از این تعابیر را ارائه کرد یا نه؟

این سؤالات از دیرباز مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفته و بسیاری از آن‌ها سعی کرده‌اند پاسخی برای آن بیابند، اما تقریباً تلاش‌ها بی‌فایده بود تا اینکه در سال ۲۰۰۲ پودلبنی در مقالهٔ خود [۱۸] یک تعبیر هندسی و فیزیکی از انتگرال کسری ارائه داد. ایدهٔ کار وی به شرح زیر است:

[26] Mittag-Leffler

انتگرال کسری از مرتبه α

$$(۷) \qquad {}_{۰}I_t^{\alpha} f(t) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_{۰}^{t} f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-۱} d\tau, \ t \geq ۰,$$

را در نظر بگیرید و آن را به شکل

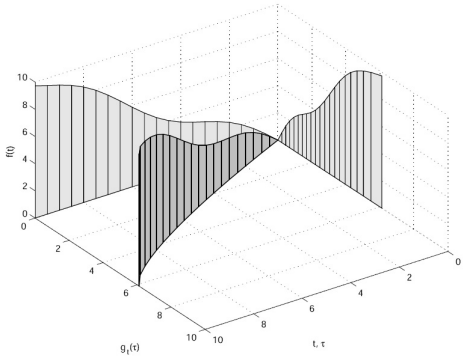
$$(۸) \qquad {}_{۰}I_t^{\alpha} f(t) = \int_{۰}^{t} f(\tau) dg_t(\tau),$$

$$(۹) \qquad g_t(\tau) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha+۱)} \{t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha}\}.$$

بنویسید. تابع $g_t(\tau)$ خاصیت تغییر مقیاس جالبی دارد. در واقع اگر قرار دهیم $t_۱ = kt$ و $\tau_۱ = k\tau$، در این صورت

$$(۱۰) \qquad g_{t_۱}(\tau_۱) = g_{kt}(k\tau) = k^{\alpha} g_t(\tau).$$

اگر در انتگرال (۸) متغیر t را ثابت در نظر بگیریم. در این صورت به سادگی رابطهٔ (۸) یک انتگرال استیل‌یس[۲۷] می‌شود. حال محورهای مختصات را τ، g و f در نظر بگیرید. در صفحه (τ, g) تابع $g_t(\tau)$ را برای $۰ \leq \tau \leq t$ رسم می‌کنیم. در طول منحنی به دست آمده یک حصار[۲۸] با ارتفاع متغیر $f(t)$ می سازیم، بنابر این لبه بالایی حصار یک خط در فضای سه بُعدی با ضابطهٔ پارامتری $(\tau, g_t(\tau), f(\tau))$، $۰ \leq \tau \leq t$ است.



شکل ۱: «حصار» و سایه‌های آن: ${}_{۰}I_t^{۱} f(t)$ و ${}_{۰}I_t^{\alpha} f(t)$ برای $f(t) = t + ۰/۵ \sin t$، $۰ \leq t \leq ۱۰$ و $\alpha = ۰/۷۵$.

این حصار می‌تواند بر دو سطح تصویر شود (شکل ۱ را ببینید):

الف) مساحت ناحیهٔ تصویرشدهٔ این حصار بر صفحهٔ (τ, f) متناظر با مقدار انتگرال زیر است.

$$(۱۱) \qquad {}_{۰}I_t^{۱}(t) = \int_{۰}^{t} f(\tau) d\tau, \quad t \geq ۰.$$

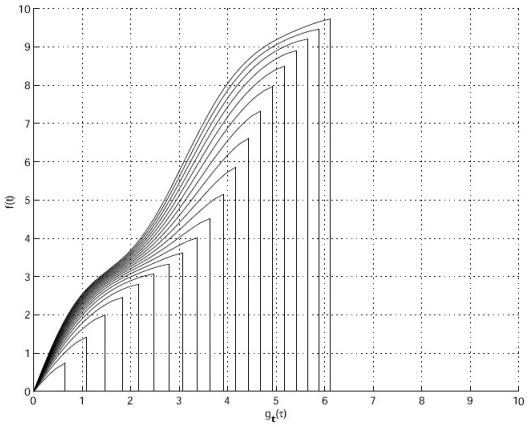
ب) مساحت ناحیهٔ تصویرشدهٔ حصار روی صفحهٔ (g, f) متناظر با مقدار انتگرال (۸) یا همان مقدار انتگرال کسری (۷) است.

[27] Stieljes [28] fence

به عبارت دیگر، حصار دو سایه روی دو دیوار می‌اندازد. یکی از آن‌ها، روی دیوار (τ, f) که به عنوان «مساحت زیر منحنی $f(\tau)$» شناخته می‌شود که تعبیر هندسی استاندارد انتگرال (۱۱) است. و دیگری، سایه بر روی دیوار (g, f)، که تعبیر هندسی انتگرال کسری (۷) برای یک t ثابت است.

واضح است که برای $\alpha = ۱$، $g_t(\tau) = \tau$ و هر دو «سایه» مساوی هستند. این نشان می‌دهد که انتگرال معین کلاسیک یک حالت خاص از انتگرال کسری حتی از نظر تعبیر هندسی است.

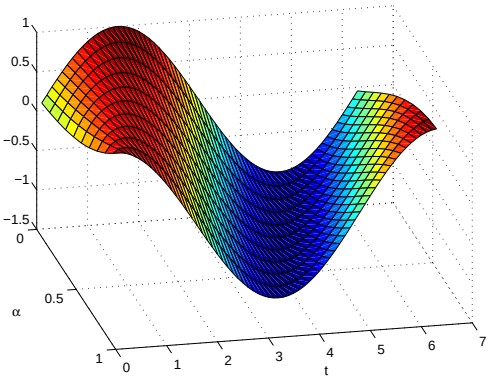
تاکنون t را ثابت در نظر گرفتیم. اما وقتی t تغییر می‌کند حصار نیز به صورت هم‌زمان تغییر می‌کند. به عبارت بهتر، طول آن و به مفهوم مشخص شکل آن تغییر می‌کند. اگر تغییر «سایه» روی (g, f) که به‌طور هم‌زمان با حصار تغییر می‌کند (شکل ۲ را ببینید)، را دنبال کنیم، دراین‌صورت یک تعبیر هندسی دینامیک از انتگرال کسری (۷) به عنوان تابعی از t داریم.



شکل ۲: تصویر لحظه‌ای تغییر «سایه» از تغییر «حصار» برای $I_t^{\alpha} f(t)$، $\alpha = ۰/۷۵$، $f(t) = t + ۰/۵ \sin t$ و $۰ \le t \le ۱۰$ با بازه زمانی $\Delta t = ۰/۵$ بین هر تصویر لحظه‌ای.

اگر چه پودلبنی سعی کرده در مقاله خود [۱۸] به ارائهٔ یک تعبیر فیزیکی برای مشتق نیز بپردازد، اما تاکنون تعبیر هندسی مستدلی برای مشتق ارائه نشده است. اما با روش‌های هندسی (یا ترسیمی) می‌توان نشان داد که مشتق کسری تعمیمی از مشتق کلاسیک است. یعنی اگر شکل توابع و مشتق کسری آن‌ها را برای مرتبه مشتق α در یک بازهٔ خاص مثلاً $[۰, ۱]$ را رسم کنیم، مشاهده خواهیم کرد که معمولاً یک رویه هموار تشکیل می‌شود. برای این که بتوانیم این مفهوم را به‌طور شهودی ببینیم یک مثال ساده مطرح می‌کنیم.

مثال ۱.۴. *مشتق کسری تابع $\sin t$ را برای $t \in [۰, ۲\pi]$ به‌ازای $۰ \le \alpha \le ۱$ به صورت عددی حساب کرده و در شکل ۳ نشان داده‌ایم. در این شکل در مقدار $\alpha = ۰$ خود تابع $\sin t$ و در مقدار $\alpha = ۱$ تابع $\cos t$ یعنی مشتق اول تابع $\sin t$ مشاهده می‌شود. علاوه‌بر این بین این دو منحنی یک سطح پیوسته به‌وجود آمده، که بدین مفهوم است که مشتق کسری از مرتبه صفر تا یک به‌طور پیوسته تعریف شده و در نقاط صفر و یک همان مفهوم کلاسیک را دارد.*



شکل ۳: محاسبهٔ $D_t^{\alpha}\sin t$ *برای* $0 \le \alpha \le 1$ *و* $t \in [0, 2\pi]$.

۵. کاربردهایی از مشتق کسری

با نگاهی به مقالاتی که در سال‌های اخیر منتشر شده‌اند می‌توان کاربردهای زیادی را در مورد حسابان کسری به‌ویژه معادلات دیفرانسیل کسری مشاهده نمود. بسیاری از نویسندگان بر این باور هستند که مشتقات کسری پدیده‌های طبیعی را بهتر از مشتق کلاسیک مدل‌بندی می‌کنند و یا اینکه استفاده از مشتق کسری در معادلات با واقعیت سازگارتر است. در اینجا به عنوان نمونه کاربردهایی از حسابان کسری را فهرست می‌کنیم.

(۱) از نظریه مشتق کسری می‌توان در حل معادلات انتگرال استفاده کرد. یعنی می‌توان معادلات انتگرال را به زبان معادلات کسری نوشت و آن‌ها را حل نمود. به عنوان نمونه فرض کنید بخواهیم معادله انتگرالی

$$\int_0^t \frac{\phi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = f(t), \quad t > 0, 0 < \alpha < 1,$$

را حل کنیم. با استفاده از تعریف انتگرال کسری می‌توان این معادله را به صورت یک معادله دیفرانسیل کسری به صورت

$${}_0D_t^{-\alpha}\phi(t) = \Gamma(\alpha) f(t),$$

نوشت، که این معادله با روش های معمول در معادلات کسری حل می‌شود [۱۴، ۱۷].

(۲) سِبا و همکارانش [۲۱] نشان دادند که حسابان کسری برای توصیف تعاملات چسبناک بین ساختار مایع و جامد مناسب است. آن‌ها از معادلات کسری برای مدل انتشار امواج مافوق صوت در استخوان اسفنجی انسان استفاده کردند.

(۳) اساله و احمد [۴] سیگنال‌های گفتار را با استفاده از حسابان کسری مدل‌سازی کردند. روش آن‌ها با روش کدگذاری پیش‌بینی خطی (LPC)[۲۹] که بر پایهٔ مدل‌های از مرتبهٔ صحیح است، در تضاد است. آن‌ها با شبیه‌سازی عددی نشان دادند که با در نظر گرفتن تعداد کمی از انتگرال‌های کسری به عنوان توابع پایه، سیگنال‌های گفتاری به‌طور دقیق مدل‌بندی می‌شوند.

[29] Linear Predictive Coding

(۴) کولیش و لِیْج در مقالهٔ خود [۱۳] حسابان کسری را در مکانیک سیالات به‌کار بردند. در این مقاله نتایج کسری برای تنش برشی مرزی و سرعت سیال با نتایج تحلیلی برای مسائل استوکس اول و دوم مقایسه شده و نشان داده شده که روش کسری بسیار ساده‌تر و قدرتمندتر از تکنیک‌های موجود است.

(۵) محی‌الدین و همکاران [۱۶] یک مدل زیستی جمعیت را با استفاده از معادلات با مشتقات جزئی از مرتبهٔ کسری مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با درک روش‌های دینامیک تغییرات جمعیت با استفاده از مدل کسری، پیش‌بینی‌های ارزشمندی را در مورد مدل جمعیتی انجام دادند.

(۶) مقالات زیادی موجودند که از معادلات کسری برای توصیف مدل بیماری‌های واگیردار، سرطان، ایدز و ... استفاده کرده‌اند. به عنوان نمونه می توانید به [۲، ۳، ۷، ۸، ۱۹] و مراجع موجود در آن‌ها مراجعه کنید.

موارد فوق تنها تعداد بسیار کمی از مقالات است که به عنوان نمونه در اینجا آورده شده است. کافی است مشتق کسری، معادلات دیفرانسیل کسری و کلیدواژه‌هایی از این قبیل را جستجو کنید و با کاربردهای بسیار زیاد این موضوع آشنا شوید.

مراجع

[1] M. H. Akrami and G. H. Erjaee, Examples of analytical solutions by means of Mittag-Leffler function of fractional Black-Scholes option pricing equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **18** (2015) 38–47.

[2] A. A. M. Arafaa, S. Z. Ridab and M. Khalil, A fractional-order model of HIV infection with drug therapy effect, *J. Egypt. Math. Soc.*, **22** (2014) 538–543.

[3] I. Area, H. Batarfi, J. Losada, J. J. Nieto, W. Shammakh and A. Torres, On a fractional order Ebola epidemic model, *Adv. Difference Equ.*, **2015** (2015).

[4] K. Assaleh and W. M. Ahmad, *Modeling of speech signals using fractional calculus*, 9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications, 2007 1–4.

[5] M. Caputo, Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent-II, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **13** (1967) 529–539.

[6] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[7] Y. Ding, Haiping Ye, A fractional-order differential equation model of HIV infection of $CD۴^+$ T-cells, *Math. Comput. Modelling*, **50** (2009) 386–392.

[8] O. S. Iyiola and F. D. Zaman, A fractional diffusion equation model for cancer tumor, *AIP Adv.*, **4** (2014) 107–121.

[9] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi and S.V. Rogosin, *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2014.

[10] G. Jumarie, Fractional Brownian motions via random walk in the complex plane and via fractional derivative. Comparison and further results on their Fokker–Planck equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, **22** (2004) 907–925.

[11] G. Jumarie, Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Non-differentiable Functions Further Results, *Comput. Math. Appl.*, **51** (2006) 1367–1376.

[12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

[13] V. V. Kulish and J. L. Lage, Application of Fractional Calculus to Fluid Mechanics, *J. Fluids Eng*, **124** (2002) 803–807.

[14] C. Li and F. Zeng, *Numerical Methods for Fractional Calculus*, CRC press, New York, 2015.

[15] K. S. Miller and B. Ross., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, 1993.

[16] S. T. Mohyud-Din, A. Ali and B. Bin-Mohsin, On biological population model of fractional order, *Int. J. Biomath.*, **9** (2016) pp. 13.

[17] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego and London, 1999.

[18] I. Podlubny, Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation, *Frac. Calc. App. Anal.*, **5** (2002) 367–386.

[19] F. A. Rihan, On Fractional Order Cancer Model, *J. Fractional CalcAppl*, **3** (2012) 1–6.

[20] B. Ross, The development of fractional calculus 1695-1900, *Historia Math.*, **4** (1977) 75–89.

[21] N. Sebaa, Z. E. A. Fellah, W. Lauriks and C. Depollier, Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone, *Signal Processing*, **86** (2006) 2668–2677.

[۲۲] ز. خاتمی و ی. علیزاده، دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری، *فرهنگ و اندیشه ریاضی*، **۲۹**، ۱۳۸۱، ۳۰–۱۷.

محمدحسین اکرمی

یزد، دانشگاه یزد، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی

akrami@yazd.ac.ir

محمدحسین اکرمی متولد اردیبهشت ماه ۱۳۶۶ در شهر ابرکوه است. وی در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه صنعتی اصفهان شد و در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی (گرایش سیستم‌های دینامیکی) دانشگاه صنعتی اصفهان شد. سپس در سال ۱۳۹۳ موفق به اخذ مدرک دکترای تخصصی در رشتهٔ ریاضی کاربردی (گرایش معادلات دیفرانسیل) از دانشگاه شیراز شد. وی در حال حاضر، استادیار دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه یزد است.