ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۲، شماره ۳ (۱۳۹۶)، صص. ۱۱-۱
© ۱۳۹۶ دانشگاه اصفهان

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.iranjournals.ir

در ستایش دیوید ریس**

مارک لارسن، لیام اُکارول و سارا ریس
مترجمان: سید شهاب ارکیان و امیر مافی*

چکیده. دیوید ریس در سه حوزهٔ کاملاً متفاوت برجسته بود. باتوجه به تحقیقات برجستهٔ دیوید در نیم‌گروه‌های ماتریسیِ ریس، قضیه ریس و خارج قسمت‌های ریس، می‌توان وی را یکی از پیشگامان نظریهٔ نیم‌گروه‌ها دانست. همچنین او یکی از چهره‌های پیشرو در توسعهٔ جبر جابجایی در دوران پس از جنگ بود. سرانجام، کار رمزگشایی وی در بلچی پارک در خلال جنگ جهانی دوّم، بیشترِ توجّهات را به خود جلب کرد. به همین دلیل، هنگام درگذشت دیوید مطبوعات بریتانیا با چاپ آگهی‌هایی، با احترام فراوان از وی یاد کردند. در این مقاله تلاش نموده‌ایم با بررسی همهٔ جنبه‌های مهمّ زندگی شخصی و کاری او، عمق و نتایج اصلی نظریه‌هایش را بیان کنیم.

۱. زندگی‌نامه مختصر

در بیست‌ونهم می ۱۹۱۸، دیوید ریس[۱]، چهارمین فرزند از پنج فرزند یک خانواده در شهر تجاری ویلز[۲] واقع در محدوده ابرگاونی[۳] به دنیا آمد. پدرش، فلورانس گرترود ریس[۴]، فردی آسیابان و تاجر ذرت بود. در آن زمان تحصیل در ویلز اعتبار زیادی داشت و مدرسه متوسطهٔ پادشاه، هنری هشتم در منطقه ابرگاونی، یکی از مدارس حوزهٔ دستور زبان بود که تلاش می‌کرد با ارائهٔ آموزش ممتاز، تمامی بچه‌ها را با توانایی‌های علمی و مالی مختلف، قادر سازد در آینده به بهترین دانشگاه‌های بریتانیا راه پیدا کنند. دیوید نیز در این مدرسه تحصیل کرد. وی از همان کودکی استعداد خاص خود را در ریاضی نشان داد. به عنوان مثال، او چند ماه به دلیل بیماری نتوانست در مدرسه حضور پیدا کند، اما وقتی که به مدرسه برگشت، در عرض دو هفته توانست با راهنمایی استاد حساب خود، پورتر[۵]، تمام مطالب را ـ که در زمان غیبتش از مدرسه تدریس شده بود ـ یاد بگیرد و در مقطع پیش دانشگاهی برندهٔ جایزهٔ مدرسه در ریاضیات شود.

او در اکتبر ۱۹۳۶ وارد دانشگاه کمبریج شد تا به تحصیل ریاضی در دانشکدهٔ سیدنی ساسکس[۶] بپردازد. در آنجا به‌عنوان یک دانشجوی برتر شناخته شد و توانست تعدادی جایزه و درجه را، قبل از اخذ مدرک کارشناسی در ژوئن ۱۹۳۹، دریافت کند.

عبارات و کلمات کلیدی. دیوید ریس، نیم‌گروه، حلقهٔ جابجایی.
* نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۴/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۸/۰۲
** متن حاضر ترجمهٔ آزاد مقالهٔ زیر به‌همراه اضافات مترجمان است.
M. V. Lawson, L. O'carroll and S. Rees, A tribute to David Rees, *Semigroup Forum*, **88** (2014) 513–522.

[1] David Rees [2] Welsh [3] Abergavenny [4] Florence Gertrude Rees [5] L. F. Porter [6] Sidney Sussex College

با شروع جنگ، در سوم سپتامبر ۱۹۳۹، تحصیل وی در کمبریج ناتمام ماند و اولویّت‌های شخصی وی نیز تغییر یافت. ولچمن[۷]، مدیر تحصیلات کارشناسی، در دسامبر ۱۹۴۰ دیوید را در دانشگاه سیدنی استخدام کرد تا به تیم رمزگشا در بلچی پارک [۸] بپیوندد. دعوت‌نامه‌ای که وی از ولچمن و استاد راهنمایش، بَبیج[۹]، دریافت کرده بود، بسیار مبهم تنظیم شده بود. در ابتدا به دیوید گفته بودند که برای تو شغلی را در نظر گرفته‌ایم، اما فعلاً نمی‌توانیم مکان آن را برایت بیان کنیم. این مسئله مشکلات خاصی را به‌وجود آورد. در پایان به وی گفتند فقط باید در بلچی گزارش‌هایی را به ایستگاه راه آهن ارائه کند. ولچمن و جفریس[۱۰]، مدیر و مجری نهاد هات۶[۱۱]، مسئول رمزگشایی عملیات رمزی ارتش و نیروی هوایی آلمان شدند. یکی دیگر از دانش آموخته‌های دانشگاه سیدنی که همزمان به کار گرفته شد، ریاضیدانی به نام هریول[۱۲] بود که همکار دیوید شد. هرویل روشی را برای رمزگشایی لافت‌ویف[۱۳] فرمول‌بندی کرد که رهنمود *هریول* نام گرفت. رهنمود هرویل از یک سری خطای ظاهر شده در زمان به‌کارگیری ماشین‌های رمزی توسط نیروی دشمن، بهره‌برداری می‌کرد. در چند ماه نخست این روش اثر بخش نبود، اما در اواخر می ۱۹۴۰، دیوید به پیشرفت نظریهٔ هرویل کمک کرد و هنگام جنگ در لحظه‌ای حسّاس، کمونیست‌ها را ناکام کرد. پس از آن، دیوید در گروه مکس نیومن[۱۴] در بلچی شروع به‌کار کرد. *نیومنری*جایی بود که اولین رایانهٔ الکترونیکی، به اسم کولوسس[۱۵]، برای رمزگشایی کدهای دورنگاری شده توسط آلمانی‌ها، مورد استفاده قرار گرفت.

شکل ۱: دیوید ریس در سال ۱۹۴۸

[7] Gordon Welchman [8] Bletchley Park [9] Dennis Babbage [10] John Jeffreys [11] Hut 6 [12] John Herivel [13] Luftwaffe [14] Max Newman [15] Colossus

نیومن بعد از جنگ، با راه‌اندازی آزمایشگاه ماشین حساب جامعهٔ سلطنتی در دانشگاه منچستر به یکی از پیشروان توسعهٔ علم حساب بریتانیا تبدیل شد. در آن هنگام دیوید به عنوان استادیار در تدریس به وی کمک می‌کرد. هم‌زمان او در دانشگاه پنسیلوانیا در کلاس‌های درس معروف دانشکدهٔ مور[۱۶] نیز شرکت می‌کرد. به‌جرأت می‌توان گفت این کلاس‌ها، اوّلین کلاس‌های کامپیوتر بود که تشکیل می‌شد.

در سال ۱۹۴۸، دیوید در گروه ریاضی کمبریج شروع به‌کار کرد و در سال ۱۹۵۰، در دانشکدهٔ داونینگ[۱۷] به عنوان استاد راهنما و مدرّس، کارش را شروع کرد. دیوید در کمبریج با ریاضیدانی به نام جوآن کوشن[۱۸] آشنا شد و این آشنایی سبب ازدواج آنها در سال ۱۹۵۲ شد. آنها صاحب چهار فرزند به نام‌های مری، ربکا، سارا و دبی و سه نوه به نام‌های راشل، پیتر و کریستوفر شدند. دیود در سال ۱۹۵۸ کمبریج را ترک کرد تا در دانشگاه اگزیتر[۱۹] صاحب کرسی ریاضیات شود و تا زمان بازنشستگی در سال ۱۹۸۳ در آنجا باقی ماند. وی درسال ۱۹۶۸ به عضویت جامعهٔ سلطنتی درآمد و در سال ۱۹۷۰، به عنوان همکار افتخاری در دانشکدهٔ داونینگ[۲۰] به کارش ادامه داد. او در سال ۱۹۹۳ از انجمن ریاضی لندن، جایزهٔ پولیا[۲۱] را دریافت کرد. دیوید در ۱۶ آگوست ۲۰۱۳ درگذشت و همسرش نیز در ۲۸ اگوست همان سال از دنیا رفت.

۲. کمک‌های ریس به پیشرفت نظریه نیم‌گروه‌ها

دیوید فقط پنج مقالهٔ [۱، ۲، ۴، ۵، ۸] را در نظریه نیم‌گروه‌ها ارائه کرد و از بین آنها نیز مقالهٔ [۲]، ضمیمه‌ای برای مقالهٔ [۱] است. با این وجود، وی در کنار ساشکویچ[۲۲] و کلیفورد[۲۳] یکی از پدران مؤسّس این شاخه از ریاضی به حساب می‌آید. دیوید در اوّلین مقالهٔ خود، [۱]، به اثبات قضیهٔ ریس–ساشکویچ می‌پردازد. همهٔ دانشجویان نظریهٔ نیم‌گروه‌ها با این قضیه آشنا هستند. قضیهٔ ساختار ماتریسیِ ریس، زمینه‌ساز قضیهٔ ریس–ساشکویچ است. امروزه این دو قضیه از تاثیر گذارترین نتایج این شاخه از جبر محسوب می‌شوند. مقالهٔ [۱]، با نظریهٔ توصیف ساختار جبرها در کتاب آلبرت[۲۴] مطرح شد. او در این مقاله، برگردانی از ایده‌های معروف نظریهٔ حلقه را به نیم‌گروه‌ها بیان می‌کند. به‌هرحال وی در فرایند انجام این کار، ضمن معرفی نیم‌گروه‌های صفر–سادهٔ کامل، تفاوت‌های بین نیم‌گروه‌ها و حلقه‌ها را بررسی می‌کند. شاید در همین زمان بود که نظریهٔ نیم‌گروه‌ها نیز به عنوان بخشی مستقل از جبر شکل گرفت.

این مقاله نسبتاً کامل است، زیرا در آن، ساختار نیم‌گروه‌های صفر–سادهٔ کامل به‌طور دقیق مشخص شده است. به‌علاوه کار اوّلیّهٔ ساشکویچ، که درسال ۱۹۲۸ ارائه شد، فقط یک حالت متناهی از نتیجهٔ کلی‌تر دیوید است. امّا این مقاله، شامل نکات دیگری نیز است. در این اثر اشاره‌هایی نیز به روابط گرین[۲۵] شده است. گرین فارغ التحصیل نومنری بود و دیوید استاد راهنمای سوّم او بود. مقالهٔ مشهور گرین[۲۶]، که در سال ۱۹۵۱ به چاپ رسید، نشان دهنده کارایی نظریات شخصی‌اش در جبر عمومی و مخصوصاً نیم‌گروه‌ها بود.

اثر دیوید در زمینه نیم‌گروه‌های صفر–سادهٔ کامل، به‌همراه اثر کلیفورد در زمینه نیم‌گروه‌های کاملاً منظم که در سال ۱۹۴۱ ارائه شد، به شکوفایی تحقیقاتی دربارهٔ نیم‌گروه‌ها انجامید. در حالت کلی، نیم‌گروه‌های ماتریسی ریس به یک ابزار اساسی برای این موضوع تبدیل شد، و بالاخره نیم‌گروه‌های ماتریسی ریس با الهام از مقالهٔ آلن[۲۷] دو توسعهٔ مهم ایجاد کرد. نخست قضیهٔ تلفیق است که قضیهٔ ریس را با ریشه‌های آن در جبر کلاسیک و قضیهٔ کرون–رادیس[۲۸] را

[16] Moore [17] Downing [18] Joan Cushen [19] Exeter [20] Downing [21] Polya [22] Sushkevich [23] Clifford [24] A. A. Albert, Structure of algebras, AMS, 1939. [25] Green [26] J. A. Green, On the structure of semigroups, *Ann. of Math.*, **54** (1951) 163-172. [27] D. Allen, A generalization of the Reestheorem to a class of regular semigroups, *Semigroup Forum*, **2** (1971) 321-331. [28] Krohn-Rhodes

با ریشه‌های آن در نظریهٔ ماشین‌های خودکار ترکیب کرده است[۲۹]. توسعه دوم، یک سلسله از مقالات مک الیستر است که موجب گسترش همه جانبهٔ نظریهٔ موریتا[۳۰] در حوزهٔ نیم‌گروه‌های منظم شد [۳۱] یکی از کلیدی‌ترین مقالات در کار مک‌الیستر است و قضیه ساختار ریس آن را در یک چارچوب مناسبش قرار می‌داد.

دو مقالهٔ بعدی دیوید در زمینه نیم‌گروه‌ها، از نظر ریاضی این امکان را بررسی می‌کند که نیم‌گروه‌ها، به‌عنوان ساختارهایی مستقل درنظر گرفته شوند. هردو مقاله، نیم‌گروه‌هایی را بررسی کرده‌اند که دارای ویژگی‌های حذفی هستند.

نیم‌گروه‌های حذفی به‌طور طبیعی به عنوان زیر نیم‌گروه‌هایی از گروه‌ها به‌دست می‌آیند. مسئلهٔ تعیین نیم‌گروه‌های حذفی که قابل نشاندن در گروه‌ها باشند کارِ دشواری بود که توسط مالسف[۳۲] در سال ۱۹۳۹ انجام شد. هنوز هم یافتن شرایط لازم و کارآمد برای قابلیت نشاندن نیم‌گروه‌ها و ارائه برهان‌های مستقیم برای آنها کار جالبی است. چنین شرط لازمی را می‌توان در نتیجهٔ نظری‌ـ‌حلقه اُور[۳۳]، در سال ۱۹۳۱، یافت: هرنیم‌گروه حذفی که در آن اشتراک هر دو ایده‌ال چپ اصلی، یک گروه از کسرهای دارد و بنابراین در حالت خاص در یک گروه قابل نشاندن است.

در سال ۱۹۴۷ دیوید در مقالهٔ [۴] برهان جدیدی برای قضیه اُور ارائه کرد که به شکل جالبی با نظریه نیم‌گروه‌ها ارتباط دارد. وی در این مقاله، مجموعهٔ همه نگاشت‌های دوسویی جزئی را روی نیم‌گروه تولیدشده توسط انتقال‌های راستِ عناصر نیم‌گروه در نظر می‌گیرد که امروزه آن را *تکوارهٔ*[۳۴] معکوس می‌نامیم. شرط معکوس‌پذیری در آن تضمین می‌کند این مجموعه شامل عنصر صفر نیست. سپس او یک گروه از تجانس‌ها را روی این تکوارهٔ معکوس تعریف کرده، ثابت می‌کند تکوارهٔ حذفیِ اصلی را می‌توان در آن نشاند. این برهان مورد توجه کلیفورد و پرستن[۳۵] قرار گرفت. مقالهٔ [۴] شامل نکات ارزشمندی از سه نظریهٔ مهم است. نخست، این مقاله شامل ایدهٔ یک نیم‌گروه معکوس و حتی کمینه گروه هم‌نهشتی روی یک نیم‌گروه معکوس است.

پرستُن[۳۶] یکی دیگراز فارغ التحصیلان نومنزی بود. وی در رساله‌اش تلاش کرد به شکلی ساده، وجود چنین نیم‌گروه‌هایی را با کمک نگاشت‌های دوسویی جزئی نشان دهد. ایدهٔ این کار از مقالهٔ دیوید گرفته شد. هر چند پرستُن در ابتدا چندان موفّق نبود، امّا سرانجام در سال ۱۹۵۳ توانست با پشتکار فراوان نخستین مقاله‌های بریتانیایی را در مورد نیم‌گروه‌های معکوس بنویسد و نامی را که با آن در زبان انگلیسی شناخته می‌شوند، ابداع کرد[۳۷]. سپس پرستُن به استرالیا مهاجرت کرد و نظریه نیم‌گروه‌ها را در استرالیا بنیان‌گذاری کرد.

دوم، نیم‌گروه‌های معکوسی که به این شکل از تکواره‌های حذفی به‌دست می‌آید، $E-$یکانی هستند. در واقع این امر ایجاب می‌کند تکواره‌های حذفی اصلی، قابل نشاندن در گروه باشند. این رده از نیم‌گروه‌ها، که نقش مهمی در توسعهٔ نظریهٔ نیم‌گروه‌های معکوس ایفا می‌کنند، ابتدا توسط مقاله‌های اصلی الیستر در مورد نیم‌گروه‌های معکوس $E-$یکانی و سپس در دهه ۷۰ قرن بیستم با مقاله‌های ارائه شده در $E-$یکانی شروع شد.

سوم، این امر موضوع ساخت گروه‌ها به کمک نیم‌گروه‌های معکوس را مطرح می‌کند[۳۸] که می‌تواند یکی از مهمترین روش‌هایی باشد که در آنها نیم‌گروه‌های معکوس با دنیایی وسیع‌تر از ریاضیات در تعامل هستند.

---

[۳۱] در این زمینه، مقالهٔ :

D. B. McAlister, Rees matrix covers for regular semigroups, *J. Alg.*, **89** (1984) 264-279.

[۳۷] چنین نیم‌گروه‌هایی توسط وانگر در اتّحاد جماهیر شوروی و ارسمن در فرانسه به‌صورت مستقل از هم تولید شدند.

[۳۸] در این رابطه مقالهٔ می‌کین را با عنوان *گروه‌ها و نیم گروه‌ها، ارتباط‌ها و تضادها* ببینید. این مقاله در صفحهٔ شخصی می‌کین قابل دانلود است.

[29] D. Allen and J. Rhodes, Synthesis of classical and modern theory of finite semigroups, *Adv. Math.*, **11** (1973) 238-266. [30] Morita

[32] Malcev [33] Ore [34] monoid [35] Preston [36] Gordon Preston

در سال ۱۹۴۸ دیوید آخرین مقالهٔ انفرادی‌اش را درباره نیم‌گروه‌ها را نوشت [۵]. او در این مقاله ساختار تکواره‌های حذفی چپ را بررسی کرد. وی در این مقاله بیان می‌کند در عین حال که ساختار تکواره‌های حذفی چپ در نوع خود جالب است امّا نمی‌توانند نامزدهای بالقوّه‌ای برای نشاندن در گروه‌ها محسوب شوند. این مقاله مبتنی بر یک مشاهده ساده در مورد ساختار مجموعهٔ جزئاً مرتب از ایده‌ال‌های اصلی راستِ یک تکوارهٔ حذفی چپ است: در واقع هر دو ایده‌ال اصلی ترتیبی این مجموعهٔ جزئاً مرتب، یکریخت هستند. دیوید مجموعه‌های جزئاً مرتب را که در این شرط صدق می‌کنند *یکنواخت* نامید. امروزه از عبارت گویاتری برای توصیف چنین مجموعه‌هایی استفاده می‌کنیم: آنها را خودـ *متشابه* می‌نامیم. بنابراین، مقالهٔ [۵] یکی از قدیمی‌ترین مقالات و شاید اولین مقاله‌ای است که از این نظریه، در جبر استفاده می‌کند. دیوید انگیزه‌های خود را در این مورد آشکار نمی‌کند، اما می‌توان گفت احتمالاً منشاء آشنایی وی با این ویژگی، مشاهدهٔ آنها در تکواره‌های آزاد است. البته این تکواره‌ها همان دنباله‌های نمادینِ متناهی، تحت عملگر الحاق دنباله‌ها هستند. دیوید ضمن معرفی نظریهٔ مجموعهٔ جزئاً مرتب یکنواخت، به اثبات قضیه اصلی خود می‌پردازد: هر مجموعهٔ جزئاً مرتب یکنواخت که دارای یک عنصر بیشین باشد، با این روش به‌وجود می‌آید. برهان این قضیه بسیار ساده است. او به هر مجموعهٔ جزئاً مرتب یکنواخت، تکواره‌ای شامل تمام یکریختی‌های ترتیبی، از مجموعه جزئاً مرتب به ایده‌ال‌های ترتیبی اصلی‌اش، نسبت می‌دهد و در واقع این همان تکوارهٔ حذفی چپ با ویژگی مطلوب است. سپس نشان می‌دهد این تکواره دارای یک ویژگی جهانی خاص است. برای تحقق این هدف، وی نظریهٔ رده‌ای خاص از همریختی‌ها را که توسط *مقسوم علیه‌های نرمال راست* (طبق نامگذاری او) تعیین می‌شوند، گسترش داد و تعمیم نیم‌گروه‌های نرمال را نیز مطرح کرد. به عنوان یک کاربرد از این نظریه، دیوید ساختار آن دسته از تکواره‌های حذفی چپ را که در آنها ایده‌ال‌های اصلی چپ، یک زنجیر نزولی نامتناهی و شمارش‌پذیر تشکیل می‌دهند، تعیین کرد. یعنی ساختار ایده‌ال‌های چپ اصلی را از دستگاه اعداد طبیعی تحت عمل جمع مشخص کرد. این مقاله نظریهٔ نیم‌گروه معکوس را به‌واسطهٔ نظریهٔ تکواره‌های معکوس گسترش می‌دهد و این مبحث، دربرگیرندهٔ منشاء ایده‌ال‌هایی است که هر نیم‌گروه معکوس دارای یک نگارهٔ اساسی، برگرفته از نیم‌گروهِ مانِ[۳۹] نیم شبکه‌اش، است: این امر مستقیماً نتیجهٔ دیوید را در مورد تکواره‌های حذفی چپ که مقسوم علیه‌های نرمال چپ ندارند، تعمیم می‌دهد. امّا آنچه از همه چیز جالب‌تر و تا حدودی هم شناخته شده‌تر می‌باشد، این است که می‌توان تعمیم‌هایی از این مقاله را در اثرِ پرات[۴۰] مربوط به اوائل دههٔ ۷۰ قرن بیستم، یافت. پرات در فصل ششم از رساله‌اش[۴۱] یک تعمیم کوچک از قضیهٔ اصلی ریس را ارائه می‌کند. وی آن دسته از تکواره‌های حذفی چپ را که مجموعهٔ جزئاً مرتب از ایده‌ال‌های چپ اصلی آن با تکوارهٔ آزاد تولید شده توسط مجموعهٔ X، یکریختـ مرتب است، بررسی می‌کند. او این تکواره‌ها را $X-$*تکواره* نامید. تحت این شرایط، مقالهٔ دیوید حالتی را که در آن مجموعهٔ X تک عضوی است، بررسی می‌کند. پرات ساختار آنها را به‌صورت آن‌چه امروزه با نام *حاصل ضرب زاپاـ زپ*[۴۲] یک گروه و تکوارهٔ آزاد تولید شده توسط X شناخته می‌شود، معرفی می‌کند. مدّت‌ها بعد، به شکلی اتّفاقی مشخص شد این تکواره‌ها چیزی جز عمل‌های گروه خود متشابه نیستند که به شکل انواع خاصّی از تکواره‌های حذفی چپ با عمل‌های باوفا مجدداً رمزگذاری شده‌اند[۴۳].

---

[۴۳] کار ریس و توسعه آن توسط پرات، و ارتباط با اعمال گروه‌های خود متشابه، موضوع مقاله‌ای از مارک لاوسن است:
A correspondence between a class of monoids and self-similar group actions I, Semigroup Forum **76** (2008), 489-517

[39] Munn [40] J.-F. Perrot [41] *Contribution a l'etude des monoidessyntactiques et de certains groupes assoces aux automates finis*, These, l'Universite Paris VI, 1972. [42] Zappa-Szep

نظیر حالتی که در آن تکواره‌ها مقسوم‌علیه نرمال راست ندارند. نظریه عمل‌های گروهِ خود متشابه، در دهه ۸۰ قرن بیستم به‌روشی کاملاً غیرمستقیم پدید آمد. دیوید آخرین مقاله‌اش را در نظریهٔ نیم‌گروه‌ها با گرین[۴۴] در سال ۱۹۵۲ نوشت. [۸] . انگیزهٔ نگارش آن، مسئلهٔ برنساید[۴۵] در نظریه گروه‌ها بود. یادآوری می‌کنیم *گروه‌های آزاد برنساید* $B_{n,r-1}$ ، گروه‌های آزاد تولید شده توسط n عنصر هستند که برای هر $w \in B_{n,r-1}$، $w^{r-1} = 1$. آنها در این مقاله، رده‌ای از نیم‌گروه‌ها را نظیر گروه‌های برنساید تعریف می‌کنند. این گروه‌ها، همان نیم‌گروه‌های آزاد S_{nr} هستند که توسط n عنصرتولید شده‌اند با این شرط که برای هر $w \in S_{nr}$، $w^r = w$. نتیجهٔ اصلی و جالبی که آنها به‌دست آورده‌اند این است که: S_{nr} متناهی است اگر و تنها اگر $B_{n,r-1}$ متناهی باشد. یک حالت خاص و جالبِ آن، $r = 2$ است، زیرا در این حالت S_{2n} ، دقیقاً نوار آزاد روی n مولد است. آنها به‌روشنی تعداد عناصر آن را محاسبه می‌کنند و در حالت خاص نشان می‌دهند باند آزاد روی ۴ مولد، ۳۳۲۳۸۰ عنصر دارد. این مقاله بخشی ارزشمند از نظریه نیم‌گروه ترکیبی است که مجدداً رابطه بین گروه‌ها و نیم‌گروه‌ها را بررسی می‌کند. برخی از برهان‌های آن، در بخش مربوط به بررسی ساختار نوارهای آزاد از کتاب مشهور جان هاوی[۴۶] مطرح شده است.

در این هنگام، دیوید نظریه نیم‌گروه‌ها را رها کرد تا کار خود را در نظریه حلقه‌های جابجایی آغاز کند، عرصه‌ای که دیوید در آن شهرتی جهانی یافت. به هر حال با توجه به تاثیرش در این حوزه و به‌واسطه نفوذ شخصی خود، جان تازه‌ای به مقاله‌هایش داد. تا کنون به اشخاصی چون گرین و پرستن اشاره کرده‌ایم. اما شخص دیگری هم به نام داگلاس مان[۴۷] از مشورت دیوید بهره برد. داگلاس در سال ۱۹۵۱ به کمبریج رفت و در کلاس‌های درس دیوید شرکت کرد. استاد راهنمای مقطع دکتری داگلاس علاقه‌ای به نیم‌گروه‌ها نداشت، اما داگلاس هنوز مباحث مفید خود را با دیوید هنگام انجام اولین مراحل پروژه‌ای که منجر به تدوین رساله‌اش شد به خاطر می‌آورد. در واقع او بعدها بیان کرد که پنج دقیقه بحث ریاضی با دیوید ارزش طلا داشت.

همیشه آغاز هر کاری دشوار است، امّا شروع به‌کار در یک شاخه جدید ریاضیات از همه دشوارتر است. دیوید به سرعت متوجه امکان‌های ریاضیات جدید در نیم‌گروه‌ها شد و بسیاری از تحقیقات مهم آتی را پایه‌گذاری کرد. شاید چنین امری فقط توسط شخصی جوان که دارای توانایی قابل توجهی در ریاضیات باشد و نسبت به موضوع خاصّی از ریاضیات تعصّب نداشته باشد، با موفقیت به پایان برسد. بلچی پارک هم نقش کوچکی را در این زمینه ایفا کرد: نه تنها نسل کاملی از ریاضیدانان بریتانیایی را دور هم جمع کرده بود، بلکه این کار را به شکلی انجام داد که باعث ترغیب آنان به توسعهٔ نامحدود نظریات جدید شود.

۳. کمک‌های ریس به پیشرفت جبر جابجایی

هنگامی که دیوید در سال ۱۹۴۸ به کمبریج برگشت، به یک سمینار کاری پیوست، که متن آن با عنوان *مبانی هندسهٔ جبری* توسط آندره ویل در سال ۱۹۴۶ منتشر شده بود، و توسط نورثکات [۴۸] و ویل[۴۹] برگزار می‌شد. کتاب ویل یک زمینهٔ کامل برای ظهور اثر برجسته دیوید در جبر جابجایی مدرج موضعی ایجاد کرد، اثری که برای همیشه درکی عمیق از پیوندهای قوی این شاخه با هندسهٔ جبری به‌وجود می‌آورد. ذکر این نکته ارزشمند است که ورود گستردهٔ جبر همولوژی در این زمان، تاثیر سازنده‌ای بر جبر جابجایی کلاسیک گذاشت که خلاصه‌ای از آن را در کتاب مشهور کارتن و الینبرگ [۵۰] می‌توان یافت.

---

[44] Sandy Green [45] Burnside [46] J. M. Howie, *An introduction to semigroups*, Academic Press, 1976. [47] Douglas Munn [48] Douglas Northcott [49] Andre Weil [50] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, The Princeton University Press, 1956.

در این قسمت تلاش می‌کنیم، به‌صورت غیر رسمی و مختصر، پیوندهای بین جبر جابجایی و هندسهٔ جبری را معرفی کنیم. طبق تعریف، حلقهٔ موضعی $(R,\mathfrak{m})$ عبارت است از حلقهٔ نوتری جابجایی R که دارای عنصر همانی بوده، یک ایده‌ال بیشین و منحصر به فرد مانند $\mathfrak{m}$ دارد. ایده‌ال سرهٔ $\mathfrak{q}$ از R را $\mathfrak{m}-$ اولیّه گوییم هرگاه عدد صحیح مثبت t چنان موجود باشد که $\mathfrak{m}^t \subseteq \mathfrak{q}$. هر حلقه موضعی دلخواه $(R,\mathfrak{m})$ از نظر هندسی، حلقه مختصات توابع تعریف شده در نقطهٔ مشخص P روی یک متغیر جبری V می‌باشد که در آن $\mathfrak{m}$ به‌عنوان نسخه‌ای جبری از شیء هندسی P در نظر گرفته می‌شود(و برعکس) و ایده‌ال $\mathfrak{m}-$ اولیه‌ی $\mathfrak{q}$ نسخه‌ای ضخیم شده از P است که در این میان، میزان ضخامت مورد بحث توسط چندگانگیِ[۵۱] $\mathfrak{q}$ یعنی $e(\mathfrak{q})$ تعیین می‌شود. در موقعیت‌هایی مناسب، به‌عنوان مثال هنگامی‌که R یک حلقه کوهن–مکالی[۵۲] باشد و $\mathfrak{q}$ توسط دنباله‌ای متناهی از مقسوم علیه‌های غیر صفر متوالی تولید شود، $e(\mathfrak{q})$ توسط طولِ $R/\mathfrak{q}$ یعنی $l(R/\mathfrak{q})$ تعیین می‌شود؛ اما در حالت کلی برای هر $n \gg 0$ ، $e(\mathfrak{q})$ عبارتی شامل طول مجانبی $l(R/\mathfrak{q}^n)$ دارد، که شیء غیر قابل کنترل‌تری است.

دیوید اولین مقاله‌اش را در جبر جابجایی، [۹]، با نورثکات نوشت که در آن به شکلی دقیق مسئلهٔ کلّی و پیچیدهٔ تعیین $e(\mathfrak{q})$، برای ایده‌ال $\mathfrak{m}-$ اولیهٔ دلخواه $\mathfrak{q}$ را بررسی کرد. آنها این موضوع را به شکلی کاملاً واضح مشخص کردند که چگونه می‌توان ایده‌ال $\mathfrak{q}$ را به ایده‌ال ساده‌تر $\mathfrak{r}$ مشمول در $\mathfrak{q}$ تقلیل داد به‌طوری که رفتار مجانبی آن با $\mathfrak{q}$ یکسان باشد و در نتیجه $e(\mathfrak{r}) = e(\mathfrak{q})$؛ بنابراین $\mathfrak{q}$ به شکلی صحیح به $\mathfrak{r}$ وابسته می‌شود، در واقع وابستگی صحیح، تعمیم طبیعیِ مفهوم آشنای وابستگی جبری توسیع‌های میدان محسوب می‌شود. تا به امروز این مقاله، یکی از پرکاربردترین مقالاتی است که در این موضوع مورد استفاده قرار گرفته است، زیرا اگر R حلقه‌ای کوهن–مکالی و $\mathfrak{r}$ ایده‌ال کمینه ممکن باشد، می‌توان $\mathfrak{r}$ را توسط دنباله‌ای متناهی از مقسوم علیه‌های غیر صفر متوالی تولید کرد. بنابراین $e(\mathfrak{q}) \equiv e(\mathfrak{r})$ توسط یک طول ساده، یعنی $l(R/\mathfrak{r})$ تعیین می‌شود. در سال ۱۹۶۱ دیوید در مقالهٔ [۲۸]، که مانند مقالهٔ [۹] از شهرت خوبی برخوردار است، حالت معکوسی را بررسی کرد که در آن R واجد یک شرط طبیعی با زمینهٔ هندسی است: یعنی، دو ایده‌ال $\mathfrak{m}-$ اولیهٔ $\mathfrak{q}$ و $\mathfrak{q}'$ با شرط $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}$ دارای چندگانگی یکسان هستند اگر و تنها اگر $\mathfrak{q}'$ یک تقلیلِ[۵۳] $\mathfrak{q}$ باشد.

دیوید در بیان جزئیات برهان این مطالب به‌دفعات به تقلیل و چندگانگی آنها مراجعه می‌کند، به‌طوری‌که سرانجام مفهوم متقارن تقلیل یک مدول مانند M نظیر یک مجموعهٔ متناهی از ایده‌ال‌های $\mathcal{I}$، یعنی تقلیل مشترک M نسبت به I، را تدوین می‌کند.

ریسلر[۵۴] و تیزیر[۵۵] کاربردهای به‌اصطلاح چندگانگی‌های مرکب آن را در زمینه هندسه جبری توسعه دادند (به [۴۱] مراجعه شود). آنالوگهای کامل نتایج اساسی فوق ساخته شدند و این نظریه، در مقالات مشترک با شارپ[۵۶] [۳۵] و کربی[۵۷] [۵۰، ۵۱، ۵۲] گسترش بیشتری یافت. در واقع، مقاله‌های پایانی دیوید که با کربی نوشته شدند نظریه‌ای وسیع از چندگانگی‌های بوک‌اسبام–ریم[۵۸] و چندگانگی‌های مرکب را گسترش دادند، همچنین کارهای ابتدایی کربی را در زمینه نظریهٔ چندگانگی در شرایط بسیار کلی از ویژگی‌های مجتمع‌های اویلر پوانکاره[۵۹] را توسعه دادند. در هندسه جبری، یک نقطه ضخیم یا به‌شکلی کلی‌تر یک تکینگی را می‌توان جدا از مؤلفهٔ ساده‌تر تکینگی‌ها طی فرایندی به‌نام دمیدن[۶۰] به‌دست آورد. زمانی‌که دیوید در اوایل کارش، یک‌سری از مقاله‌هایش را به ارزیابی‌ها روی حلقه‌های موضعی اختصاص می‌داد [۱۱، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷]، دوّمین کمک اساسی‌اش را به این موضوع ارائه کرد. و این سرآغازی شد برای آنچه که امروزه آن را حلقه‌های محدود و نامحدود ریس می‌نامیم. از نظر هندسی، این حلقه‌ها به عنوان حلقه‌های

[51] multiplicity [52] Cohen-Macaulay [53] reduction [54] Jean-Jacques Risler [55] Bernard Teissier [56] Rodney Sharp [57] David Kirby [58] Buchsbaum-Rim [59] Euler Poincare [60] Blowing up

مختصاتی طی فرایند دمیدن پدید می‌آیند و دیوید نیز از آنها برای بررسی چگونگی رفتار چندگانگی‌ها، طی فرایند دمیدن یک نقطه، با ارزیابی فرمول توصیف این رفتار، استفاده کرد. البته تحقیق فوق به‌طور کامل به‌میزان تأثیر کار دیوید روی این موضوعات نمی‌پردازد. حقیقت این است که مفاهیم مربوط به تقلیل و حلقه‌های ریس، کاربردهای جبری بسیار سودمندی دارند. در موقعیت‌های مناسب، مثلاً با یک استدلال استقرایی، استفاده از تقلیل کمینه، می‌تواند یک موضوع نسبتاً ذهنی را به یک موضوع ساده و سرراست تبدیل کند. به‌طور مشابه، در برخی موارد خاص، با استفاده از توسیع حلقهٔ ریس می‌توان یک ایده‌ال دلخواه را با یک ایده‌ال اصلی جایگزین کرد، که یک ساده‌سازی بسیار مفید است. همچنین مطالعهٔ حلقه‌های ریس این امکان را فراهم می‌کند که رفتار توان‌های یک ایده‌ال، یا در واقع مجموعه‌ای متناهی از ایده‌ال‌ها و بستارهای صحیح این توان‌ها، را با هم مورد ارزیابی قرار داد. به‌علاوه حلقه‌های ریس یک راه ساده، برای بررسی حلقه‌های مدرج وابسته یا به‌اصطلاح حلقه‌های فیبر[۶۱] خاص فراهم می‌کند (که از نظر هندسی، شامل حلقه‌های مختصات همگنِ مخروط‌های مماس را می‌شود). مقاله‌های [۲۳، ۳۸] را ببینید. اما مشهورترین استفاده از حلقه‌های ریس به این شکل، اولین بار توسط دیوید در مقاله‌ای با عنوان *دو قضیه کلاسیک در نظریه ایده‌ال* در سال ۱۹۵۶ به چاپ رسید [۱۴] (مقاله‌ای که کاپلانسکی[۶۲] در رسالهٔ معروفِ خود با عنوان *حلقه‌های جابجایی* از آن با عبارت متنی درخشان یاد می‌کند). نتیجهٔ اصلی که امروزه با نام لم آرتین‌ــ ریس[۶۳] شناخته می‌شود، به‌سادگی به کمک مفهوم حلقه ریس اثبات می‌شود. از این لم برای ارائه برهان‌های زیبا، واضح و استاندارد برای دو نتیجهٔ اساسی کرول[۶۴]، یعنی قضیهٔ اشتراک و قضیهٔ ایده‌ال اصلی او، استفاده می‌شود. به گفتهٔ کاپلانسکی احتمالاً قضیهٔ ایده‌ال اصلی کرول مهمترین قضیه در نظریه حلقه‌های نوتری است.

تنها به استناد به تعداد اندکی از مقاله‌های بسیار موثر دیوید در جبر همولوژی که در فاصله سال‌های ۱۹۵۶ تا ۱۹۶۱ ارائه شدند، می‌توان تنوع در کارهایش را تأیید کرد. آخرین آنها مقاله‌ای است که به‌صورت مشترک با هیلتون[۶۵] یکی دیگر از همکاران دیوید در بلتچی پارک به نگارش درآمد. در این رابطه، [۱۸، ۱۹، ۳۰] و همچنین [۲۱، ۲۴] را ببینید. اروینگ کاپلانسکی در رسالهٔ خود یک مقدمهٔ عالی برای این کار دیوید، پس زمینه‌های آن و مقالهٔ غیر همولوژیکی مشترکش با نورثکات، آورده است. استفاده از روش‌های همولوژی موجب شکل‌گیری یک برهان منسجم برای اثبات ناوردایی برخی پارامترهای مهم و خاصِ یک ایده‌ال از یک حلقه نوتری جابجایی و یکدار مانند درجه، نوع و ... می‌شود. نظریاتی که در کار مشترک با داگلاس نورثکات در طی این دوره مطرح شدند، تشکیل یک چرخه از ایده‌ها می‌دهند که در نهایت منجر به ایجاد پایه‌ای برای مقالهٔ مهمّ باس[۶۶] شد. این مقاله با عنوان *حضور فراگیر حلقه‌های گرنشتاین*[۶۷] در سال ۱۹۶۳ به چاپ رسید.

با وجود آن که آثار دیوید در هر جنبهٔ مهم از جبر جابجایی غنی و قابل ذکر است، اما مقالهٔ ویژهٔ [۲۶] در این زمینه بسیار قابل توجه است. وی در این مقاله که در سال ۱۹۵۸ به چاپ رسید، به حدس زاریسکی[۶۸] در اتباط با تعمیم مسئلهٔ چهاردهم هیلبرت[۶۹] پاسخ منفی می‌دهد. در اینجا، نکتهٔ جالب، استفاده از توسیع حلقه ریسِ ایده‌ال تعریف یک نقطه روی یک مجتمع تصویری منحنی بیضوی C، روی حلقهٔ پایهٔ داده شده به‌وسیله حلقهٔ مختصات همگن C، است. او با یک تحلیل زیبای هندسی و به کمک استدلال جبری موفق به ارائه مثال نقض شد. در واقع می‌توان گفت نتیجهٔ این کار همان ریاضیات زیبا با بالاترین کیفیت است.

[61] rings fibre [62] Irving Kaplansky [63] Artin-Rees [64] Wolfgang Krull [65] Peter Hilton [66] Hyman Bass [67] *On the ubiquity of Gorenstein ring* [68] Oscar Zariski [69] David Hilbert

شکل ۲: دیوید ریس، به مناسبت انتخاب وی به عنوان همکار انجمن سلطنتی در سال ۱۹۶۸

یادداشت مترجمین

درپایان اضافه می‌کنیم که بر اساس اطلاعات موجود در سایت اینترنتی پروژه تبارشناسی ریاضیات[۷۰]، دیوید ریس در طول فعالیت علمی خود، موفق به تربیت ۵ دانشجو در مقطع دکتری شد، که چهارمین دانشجوی وی پروفسور امیدعلی شهنی کرمزاده از کشور ایران بوده است. سایر دانشجویان دکتری دیوید عبارتند از:

Inder Bir Passi, Barry Jones, Michael Drazin and Lindsay Burch.

مراجع

[1] D. Rees, On semi-groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **36** (1940) 387–400.

[2] D. Rees, Note on semi-groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **37** (1941) 434–435.

[3] D. Rees, Note on a paper of I. J. Good, *J. London Math. Soc*, **21** (1946) 169–172.

[4] D. Rees, On the group of a set of partial transformations, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947) 281–284.

[5] D. Rees, On the ideal structure of a semi-group satisfying a cancellation law, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **19** (1948) 101–108.

[6] D. Rees, Linear systems of algebras, *Ann. of Math. (2)*, **51** (1950) 123–160.

[7] D. Rees, The nuclei of non-associative division algebras, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* ,**46** (1950) 1–18.

[8] J. A. Green and D. Rees, On semi-groups in which $x^r = x$, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **48** (1952) 35–40.

[70] Mathematics Genealogy Project

[9] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **50** (1954) 145–158.

[10] D. G. Northcott and D. Rees, A note on reductions of ideals with an application to the generalised Hilbert function, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **50** (1954) 353–359.

[11] D. Rees, Valuations associated with a local ring I, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **5** (1955) 107–128.

[12] D. Rees, A note on valuations associated with a local domain, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **51** (1955) 252–253.

[13] D. Rees, A basis theorem for polynomial modules, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **52** (1956) 12–16.

[14] D. Rees, Two classical theorems of ideal theory, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **52** (1956) 155–157.

[15] D. Rees, Valuations associated with ideals, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **6** (1956) 161–174.

[16] D. Rees, Valuations associated with ideals II, *J. London Math. Soc.*, **31** (1956) 221–228.

[17] D. Rees, Valuations associated with a local ring II, *J. London Math. Soc.*, **31** (1956) 228–235.

[18] D. Rees, A theorem of homological algebra, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **52** (1956) 605–610.

[19] D. Rees, The grade of an ideal or module, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **53** (1957) 28–42.

[20] D. Rees, Filtrations as limits of valuations, *J. London Math. Soc.*, **32** (1957) 97–102.

[21] D. Rees, A note on general ideals, *J. London Math. Soc.*, **32** (1957) 181–186.

[22] D. G. Northcott and D. Rees, Extensions and simplifications of the theory or regular local rings, *J. London Math. Soc.*, **32** (1957) 367–374.

[23] D. Rees, A note on form rings and ideals, *Mathematika*, **4** (1957) 51–60.

[24] D. Rees, Polar modules, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **53** (1957) 554–567.

[25] D. G. Northcott and D. Rees, Principal systems, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **8** (1957) 119–127.

[26] D. Rees, On a problem of Zariski, *Illinois J. Math.*, **2** (1958) 145–149.

[27] D. Rees, *Réductions des idéaux et multiplicités dans les anneaux locaux*, Séminaire DUBREIL-PISOT (Algèbre et Théorie des Nombres) 13e année, 1959/60, no. 8, 1960 6pp.

[28] D. Rees, a-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **57** (1961) 8–17.

[29] D. Rees, Degree functions in local rings, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **57** (1961) 1–7.

[30] P. J. Hilton and D. Rees, Natural maps of extension functors and a theorem of R. G. Swan, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **57** (1961) 489–502.

[31] D. Rees, A note on analytically unramified local rings, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961) 24–28.

[32] D. Rees, Exchange and transformation algebras of multilinear forms, *J. Nat. Sci. and Math.*, **1** (1961) 57–70.

[33] D. Rees, *Local birational geometry*, 1966 Proc. Internat. Colloq. Algebraic Geometry, Inst. Jorge Juan del C. S. I. C. -Internat. Math. Union, Madrid, (1965) 17–22.

[34] D. Rees, *Degree functions in two-dimensional normal local domains*, Symposia Mathematica, **VIII**, (Convegno sulle Algebre Associative, INDAM, Rome, 1970) Academic Press, London, (1972) 205–225.

[35] D. Rees and R. Y. Sharp, On a theorem of B. Teissier on multiplicities of ideals in local rings, *J. London Math. Soc. (2)*, **18** (1978) 449–463.

[36] M. Boratyński, D. Eisenbud and D. Rees, On the number of generators of ideals in local Cohen- Macauley rings, *J. Algebra*, **57** (1979) 77–81.

[37] D. Rees, *Absolute integral dependence on an ideal*, Institut Mittag-Leffler, report no. 9 (1981) 12pp.

[38] D. Rees, Rings associated with ideals and analytic spread, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **89** (1981) 423–432.

[39] D. Rees, Hilbert functions and pseudorational local rings of dimension two, *J. London Math. Soc. (2)*, **24** (1981) 467–479.

[40] D. Rees, Multiplicities, *Hilbert functions and degree functions*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **72**, Cambridge University Press, Cambridge-New York, (1982) 170–178.

[41] D. Rees, Generalizations of reductions and mixed multiplicities, *J. London Math. Soc. (2)*, **29** (1984) 397–414.

[42] D. Rees, A note on asymptotically unmixed ideals, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **98** (1985) 33–35.

[43] D. Rees, Amao's theorem and reduction criteria, *J. London Math. Soc. (2)*, **32** (1985) 404–410.

[44] D. Rees, *The general extension of a local ring and mixed multiplicities*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, (1986) 339–360.

[45] D. Rees, Reduction of modules, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **101** (1987) 431–449.

[46] D. Rees, Semi-Noether filtrations I, *J. London Math. Soc. (2)*, **37** (1988) 43–62.

[47] D. Rees and J. D. Sally, General elements and joint reductions, *Michigan Math. J.*, **35** (1988) 241–254.

[48] D. Rees, *Lectures on the asymptotic theory of ideals*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **113**, Cambridge University Press, 1988.

[49] D. Rees, *Izumi's theorem*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **15**, Springer, New York, (1989) 407–416.

[50] D. Kirby and D. Rees, *Multiplicities in graded rings I*, The general theory, Contemp. Math, **159**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1994) 209–267.

[51] D. Kirby and D. Rees, Multiplicities in graded rings II. Integral equivalence and the Buchsbaum-Rim multiplicity, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **119** (1996) 425–445.

[52] D. Kirby and D. Rees, The multiplicity of a set of homogeneous polynomials over a commutative ring, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **124** (1998) 97–105.

سید شهاب ارکیان
سنندج، میدان سهروردی، دانشگاه فرهنگیان(پردیس شهید مدرس)
Shahab_Arkian@yahoo.com

سید شهاب ارکیان متولد دی‌ماه ۱۳۵۴ در شهر بیجار است. وی در سال ۱۳۷۸ از دانشگاه کردستان در رشتهٔ دبیری ریاضی فارغ‌التحصیل شد. در سال ۱۳۸۰ مدرک کارشناسی ارشد خود را در رشتهٔ ریاضی محض تحت راهنمایی پروفسور ذاکری از دانشگاه خوارزمی اخذ نمود. ارکیان در سال ۱۳۸۰ به عنوان دبیر ریاضی به استخدام آموزش و پرورش درآمد و در سال ۱۳۸۳ کار خود را به‌عنوان عضو هیات علمی گروه ریاضی در دانشگاه فرهنگیان کردستان (مرکز تربیت معلم سابق) آغاز کرد. ارکیان در سال ۱۳۹۳ دوره دکتری خود را در دانشگاه کردستان و با راهنمایی دکتر مافی آغاز کرد.

امیر مافی
سنندج، خیابان پاسداران، دانشگاه کردستان، گروه ریاضی
A_Mafi@ipm.ir

امیر مافی متولد دی‌ماه ۱۳۵۳ در شهر سردشت آذربایجان غربی است. وی در سال ۱۳۸۴ دکتری خود را در رشتهٔ ریاضی محض از دانشگاه خوارزمی تحت راهنمایی پروفسور ذاکری اخذ نمود. مافی در سال ۱۳۸۴ به عنوان استادیار گروه ریاضی دانشگاه اراک استخدام شد و تا سال ۱۳۸۷ در آن دانشگاه به‌کار خود ادامه داد و از آن پس به استخدام گروه ریاضی دانشگاه کردستان درآمد. اکنون وی دانشیار گروه ریاضی دانشگاه کردستان می‌باشد.