ریاضی و جامعه
شاپا (چاپیببب): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۲، شماره ۱ (۱۳۹۶)، صص. ۵۰-۴۵

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.iranjournals.ir

توابع اندازه‌پذیر با مجموعه‌ی معینی از نماهای انتگرال‌پذیری

آ. ویلانی [۱]
مترجمین: مهدی دهقانی * و رسول کاظمی

چکیده. در یک فضای اندازه‌ی $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$، برای هر تابع $\mathcal{A}$ـاندازه‌پذیر $f:\Omega\to\mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\mathcal{E}(f)=\{p\in(\circ,+\infty):f\in\mathcal{L}^p(\mu)\}$ همواره یک بازه است، که ممکن است تباهیده باشد، اما در حالت کلی نمی‌تواند هر بازه‌ی دلخواه I مشمول در $(\circ,+\infty)$ باشد. بنابراین به توصیف فضاهای اندازه‌ای می‌پردازیم که برای آن‌ها $\mathcal{E}(f)$ می‌تواند هر زیربازه‌ی دلخواهی از $(\circ,+\infty)$ باشد. نشان می‌دهیم که آن‌ها دقیقاً فضاهای اندازه‌ای هستند که در آن‌ها هیچ شمولی بین فضاهای $\mathcal{L}^p(\mu)$ متفاوت وجود ندارد.

۱. مقدمه

فرض کنید $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه‌ی مثبت باشد و برای هر $p\in(\circ,+\infty)$، مطابق معمول $\mathcal{L}^p(\mu)$ نشان دهنده‌ی فضای برداری همه توابع $\mathcal{A}$ـاندازه‌پذیر f بر Ω باشد به طوری که انتگرال $\int_\Omega|f|^pd\mu$ متناهی است. هم‌چنین برای هر تابع حقیقی $\mathcal{A}$ـاندازه‌پذیر f بر Ω، فرض کنید $\mathcal{E}(f)$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی همه‌ی نماهای انتگرال‌پذیری f باشد، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی $p\in(\circ,+\infty)$ به طوری‌که f در $\mathcal{L}^p(\mu)$ قرار گیرد.

نتیجه‌ی معروفی از نامساوی هولدر بیان می‌کند که مجموعه‌ی $\mathcal{E}(f)$ همواره یک بازه است، که ممکن است تباهیده (یعنی مجموعه‌ی تک نقطه‌ای یا تهی) باشد . این حقیقت به طور طبیعی این پرسش را در ذهن به وجود می‌آورد که آیا $\mathcal{E}(f)$ می‌تواند برابر با هر زیربازه‌ی $(\circ,+\infty)$ باشد(برای مثال تمرین ۴، صفحه ۷۱ از [۱] را ببینید).

آن‌چه بی درنگ نتیجه می‌شود این است که برای یک فضای اندازه‌ی کلی، پاسخ این سؤال منفی است. در واقع فضاهای اندازه‌ی $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ وجود دارند مانند فضاهایی که $\mu(\Omega)$ متناهی است، که برای آن‌ها شمول مجموعه‌ای $\mathcal{L}^q(\mu)\subseteq\mathcal{L}^p(\mu)$ برای هر $p,q\in(\circ,+\infty)$ که $p<q$ برقرار است و فضاهایی مانند فضای اندازه شمارشی که در آن شمول برعکس $\mathcal{L}^p(\mu)\subseteq\mathcal{L}^q(\mu)$ برقرار است. در این دو حالت واضح است که بازه‌ی $\mathcal{E}(f)$ نمی‌تواند دلخواه باشد اما اگر ناتهی باشد باید در شرط $\inf\mathcal{E}(f)=\circ$ و $\sup\mathcal{E}(f)=+\infty$ صدق کند.

از سوی دیگر فضاهای اندازه‌ای وجود دارند که برای آن‌ها هر بازه‌ی حقیقی $I\subseteq(\circ,+\infty)$، برابر مجموعه‌ی $\mathcal{E}(f)$ از نماهای انتگرال‌پذیری برای یک تابع حقیقی اندازه‌پذیر f است. خط حقیقی $\mathbb{R}$ مجهز به اندازه‌ی لبگ مثالی از چنین فضای اندازه‌ای فراهم می‌کند. این به سادگی قابل درک است، به عنوان مثال با در نظرگرفتن توابعی به شکل $\alpha\chi_U\phi+\beta\chi_{\mathbb{R}\setminus U}\psi$ (χ_E نشان دهنده‌ی تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی E است) که در آن α و β اعداد حقیقی نامنفی، U

---

[1] Alfonso Villani, Measurable functions with a given set of integrability exponents, *Amer.Math. Monthly*, **118** (2011) 77–82.
doi: 10.4169/amer.math.monthly.118.01.077.

* نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۶/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۱/۲۳ .

یک همسایگی اندازه‌پذیر کراندار از ۰ و ϕ و ψ متعلق به کلاس همه‌ی توابعی هستند که تقریباً همه جا برابر با توانی منفی از $|x|$ یا از $|x|(1+|\log|x||)^\gamma$ ($\gamma>1$) می‌باشند.

هدف این یادداشت این است، که نشان دهیم هر فضای اندازه با این خاصیت که در آن هیچ شمولی بین فضاهای $\mathcal{L}^p$ متفاوت وجود ندارد، درست شبیه $\mathbb{R}$ به همراه اندازه لبگ رفتار می‌کند. به بیان واضح‌تر قضیه‌ی زیر را داریم، که حکم قبلی به آسانی از آن نتیجه می‌شود.

قضیه ۱.۱. *فرض کنید فضای اندازه‌ی $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ دارای این ویژگی است که خانواده‌ی $\mathcal{A}'$ متشکل از همه‌ی مجموعه‌های $E\in\mathcal{A}$ که $0<\mu(E)<+\infty$، ناتهی است و در هر دو شرط زیر صدق می‌کند:*

$$\inf_{E\in\mathcal{A}'}\mu(E)=0. \tag{1}$$

$$\sup_{E\in\mathcal{A}'}\mu(E)=+\infty. \tag{2}$$

آن‌گاه برای هر بازه‌ی $I\subseteq(0,+\infty)$ (شاید تباهیده)، تابع حقیقی $\mathcal{A}$ـ اندازه‌پذیر f بر Ω وجود دارد به طوری که $\mathcal{E}(f)=I$.

در واقع با توجه به توصیفی که برای شمول $\mathcal{L}^p\subseteq\mathcal{L}^q$ در [۲] داده شده است، می‌دانیم که وقوع هر دو شرط (۱) و (۲) معادل است با این فرض که برای هر $p,q\in(0,+\infty)$ که $p\neq q$، $\mathcal{L}^p(\mu)\nsubseteq\mathcal{L}^q(\mu)$. بنابراین نتیجه‌ی زیر را داریم: فرض کنید $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه باشد به طوری که هیچ رابطه شمول $\mathcal{L}^p(\mu)\subseteq\mathcal{L}^q(\mu)$ برای نماهای متمایز $p,q\in(0,+\infty)$ برقرار نیست. در این صورت برای هر بازه‌ی دلخواه $I\subseteq(0,+\infty)$ (شاید تباهیده)، تابع حقیقی $\mathcal{A}$ـ اندازه‌پذیر f بر Ω وجود دارد به طوری که $\mathcal{E}(f)=I$. در حقیقت، در تذکر پایانی خواهیم دید که همان استدلالی که برای اثبات قضیه‌ی بالا به کار می‌رود، نشان می‌دهد که در هر فضای اندازه، بازه‌ی $\mathcal{E}(f)$ می‌تواند صرف نظر از قیدهای $\inf\mathcal{E}=0$ یا $\sup\mathcal{E}=+\infty$ که از شمول‌های ممکن بین فضاهای $\mathcal{L}^p$ متفاوت نشأت می‌گیرد، دلخواه باشد.

۲. چند لم تکنیکی و اثبات قضیه

برای اثبات قضیه‌ی بیان شده در بالا به دو لم ساده در مورد سری‌های عددی نیاز داریم. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد مثبت باشد و $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. در این صورت سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}(x_n-x_{n+1}) \tag{3}$$

واگراست.

اثبات. دو حالت در نظر می‌گیریم:
اول فرض کنید که برای تعداد نا متناهی n داریم، $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\frac{1}{2}$. در این صورت با توجه به هم‌ارزی

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x_n}(x_n-x_{n+1})=1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\geq\frac{1}{2}.$$

آشکار است که سری (۳) واگراست.

حال فرض کنید برای همه‌ی nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ، $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{1}{2}$. در این صورت با در نظر گرفتن رابطه‌ی

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x_n}(x_n - x_{n+1}) \geq \frac{1}{2x_{n+1}}(x_n - x_{n+1})$$

و ملاحظه‌ی این که $f(x) = \frac{1}{x}$ یک تابع نزولی است داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_{n+1}}(x_n - x_{n+1}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n+1}}^{x_n} \frac{1}{x} dx = \int_{0}^{x_1} \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

و از آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که در این حالت نیز سری (۳) واگراست. □

لم ۲ در زیر به روش مشابه قابل اثبات است، یا می‌تواند از لم ۲ به وسیله‌ی جایگزینی $x_n = \frac{1}{y_n}$ نتیجه شود. فرض کنید $\{y_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد مثبت باشد و $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. در این صورت سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_{n+1}}(y_{n+1} - y_n)$$

واگراست. حال به اثبات قضیه اصلی باز می‌گردیم: ابتدا توجه می‌کنیم که برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم چهار تابع حقیقی نامنفی $\mathcal{A}$ـ اندازه پذیر g_0، h_0، g_∞ و h_∞ روی Ω وجود دارند به طوری که

$$\mathcal{E}(g_0) = (0, 1), \quad \mathcal{E}(h_0) = (0, 1], \quad \mathcal{E}(g_\infty) = (1, +\infty), \quad \mathcal{E}(h_\infty) = [1, +\infty).$$

در واقع، پس از یافتن چنین توابعی با استفاده از آن‌ها و توجه به این نکته‌ی بدیهی که برای هر دو تابع حقیقی نامنفی $\mathcal{A}$ـ اندازه پذیر f و g روی Ω داریم $\mathcal{E}(f+g) = \mathcal{E}(f) \cap \mathcal{E}(g)$، برای هر بازه‌ی $I \subseteq (0, +\infty)$ به سادگی می توانیم یک تابع f بسازیم به طوری که $\mathcal{E}(f) = I$.

به عنوان مثال، برای به دست آوردن $\mathcal{E}(f) = (0, b)$، $\mathcal{E}(f) = (a, b]$ ($a, b \in (0, +\infty)$، $a < b$)، یا $\mathcal{E}(f) = \emptyset$، کافی است به ترتیب قرار دهیم $f = g_0^{\frac{1}{b}}$، $f = g_\infty^{\frac{1}{a}} + h_0^{\frac{1}{b}}$، یا $f = g_0 + g_\infty$. همه‌ی حالت‌های دیگر برای بازه‌ی I به روش مشابه قابل انجام است.

حال نشان می‌دهیم که شرط (۱) این اجازه را به ما می‌دهد تا توابع g_0 و h_0 را بسازیم.

از (۱) نتیجه می‌گیریم که دنباله‌ی $\{E_n\} \subseteq \mathcal{A}'$ وجود دارد که در شرط

$$\mu(E_{n+1}) < \frac{1}{2}\mu(E_n), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

صدق می‌کند و بنابراین برای $n, r = 1, 2, \ldots$ داریم

$$\mu(E_{n+r}) < (\frac{1}{2})^r \mu(E_n).$$

و هم‌چنین از آزمون نسبت داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty.$$

برای $n = 1, 2, \ldots$ با فرض

$$A_n = E_n \setminus (\cup_{k=n+1}^{\infty} E_k).$$

دنباله‌ای دیگر $\{A_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر با ویژگی‌های ذیل به دست می‌آوریم: A_nها دو به دو مجزا هستند،مشمول در E_nهای متناظرند، که از آن‌جا $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < +\infty$ و از اندازه‌ی مثبت هستند. در واقع داریم:

$$\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu\left(E_n \cap (\bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k)\right) \geq \mu(E_n) - \sum_{k=n+1}^{\infty}\mu(E_k)$$
$$> \mu(E_n) - \sum_{r=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^r\mu(E_n) = 0.$$

اینک یک دنباله‌ی حقیقی $\{x_n\}$ معرفی می‌کنیم که برای $n = 1, 2, \ldots$ با

$$x_n = \sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

تعریف می‌شود، و برای $n = 1, 2, \ldots$ داریم ، $\mu(A_n) = x_n - x_{n+1}$. توجه کنید که این دنباله به صفر نزول می‌کند.

حال توابع حقیقی نامنفی $\mathcal{A}$ـاندازه‌پذیر $g_\circ$ و $h_\circ$ را بر Ω به صورت

$$g_\circ = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}\chi_{A_n}, \qquad h_\circ = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n(1+\log^2 x_n)}\chi_{A_n}.$$

تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای این دو تابع داریم

$$\mathcal{E}(g_\circ) = (0, 1), \qquad \mathcal{E}(h_\circ) = (0, 1].$$

از لم ۲ نتیجه می شود که

$$\int_\Omega g_\circ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}(x_n - x_{n+1}) = +\infty,$$

و بنابراین $1 \notin \mathcal{E}(g_\circ)$. از سوی دیگر، برای هر $p \in (0, 1)$، داریم:

$$\int_\Omega g_\circ^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^p}(x_n - x_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_{n+1}}^{x_n}\frac{1}{x^p}dx = \int_0^{x_1}\frac{1}{x^p}dx < +\infty,$$

و بنابراین p در $\mathcal{E}(g_\circ)$ قرار می‌گیرد. این نشان می‌دهد که $\mathcal{E}(g_\circ) = (0, 1)$.

حال برای $h_\circ$، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که، با توجه به نامساوی $0 \leq h_\circ \leq g_\circ$ داریم $(0, 1) \subseteq \mathcal{E}(h_\circ)$. سپس نشان می‌دهیم که $1 \in \mathcal{E}(h_\circ)$، در واقع با استفاده از این حقیقت که $\frac{1}{x(1+\log^2 x)}$ یک تابع نزولی است، داریم:

$$\int_\Omega h_\circ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n(1+\log^2 x_n)}(x_n - x_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_{n+1}}^{x_n}\frac{1}{x(1+\log^2 x)}dx$$
$$= \int_0^{x_1}\frac{1}{x(1+\log^2 x)}dx = Arctan(\log x_1) + \frac{\pi}{2} < +\infty.$$

سرانجام ثابت می‌کنیم که هیچ نمای $p > 1$ متعلق به $\mathcal{E}(h_\circ)$ نیست. برای مشاهده‌ی این موضوع، یاد آوری می‌کنیم که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}(x_n - x_{n+1}) = +\infty,$$

و ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^p(1+\log^2 x_n)^p}(x_n-x_{n+1})}{\frac{1}{x_n}(x_n-x_{n+1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{1-p}}{(1+\log^2 x_n))^p}=+\infty.$$

بنابراین بنا به آزمون مقایسه حدی داریم

$$\int_\Omega h_0^p\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^p(1+\log^2 x_n)^p}(x_n-x_{n+1})=+\infty.$$

برای کامل شدن اثبات قضیه، نشان می‌دهیم که با استفاده از شرط (۲)، می‌توانیم توابع g_∞ و h_∞ را بسازیم.
با استفاده از (۲) می‌توانیم یک دنباله‌ی $\{B_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر دوبه‌دو مجزا بسازیم به طوری که برای هر $n=1,2,\ldots$:

$$1\le\mu(B_n)<+\infty,$$

(با استفاده از (۲) برای هر $n=1,2,\ldots$، دنباله‌ی $\{F_n\}\subseteq\mathcal{A}'$ را چنان انتخاب کنید که $\mu(F_{n+1})\ge\mu(F_1)\ge 1$ و $\mu(F_1)+\cdots+\mu(F_n)+1$ و قرار دهید $B_1=F_1$ و $B_{n+1}=F_{n+1}\setminus(F_1\cup\cdots\cup F_n)$). حال برای هر $n=1,2,\ldots$، قرار می‌دهیم:

$$y_n=\mu(B_1)+\cdots+\mu(B_n),\qquad (n=1,2,\ldots)$$

نظر به این‌که برای هر $n=1,2,\ldots$، $y_{n+1}-y_n=\mu(B_{n+1})$ ، یک دنباله‌ی صعودی از اعداد مثبت به دست آورده‌ایم که $\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$. حال تعریف می‌کنیم:

$$g_\infty=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{y_{n+1}}\chi_{B_{n+1}},\qquad h_\infty=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{y_{n+1}(1+\log^2 y_{n+1})}\chi_{B_{n+1}}.$$

و به کمک لم ۲ می توانیم نشان دهیم که این دو تابع نامنفی $\mathcal{A}$ـ اندازه‌پذیر در شرایط

$$\mathcal{E}(g_\infty)=(1,+\infty),\qquad \mathcal{E}(h_\infty)=[1,+\infty).$$

صدق می‌کنند. جزئیات این بررسی بسیار شبیه بحث قبلی برای g_0 و h_0 است، بنابراین از ارائه آن صرف نظر می‌کنیم.
توجه کنید که ما توانسته بودیم توابع g_0 و h_0 را تنها بر اساس شرط (۱) بسازیم. بنابراین با در نظر داشتن نتایج [۲]، می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر فضای اندازه‌ی $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ دارای این ویژگی باشد که شمول ناسره‌ی $\mathcal{L}^q(\mu)\subsetneq\mathcal{L}^p(\mu)$ برای $p,q\in(0,+\infty)$ که $p<q$، برقرار باشد، آنگاه برای هر بازه‌ی ناتهی $I\subseteq(0,+\infty)$ که $\inf I=0$، توابع $\mathcal{A}$ـ اندازه‌پذیر $f:\Omega\to\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{E}(f)=I$. به علاوه در این حالت اگر بخواهیم $\mathcal{E}(f)=\emptyset$، می‌توانیم این کار را با تعریف f بر اساس مجموعه‌های A_n انجام دهیم، یعنی: $f=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\chi_{A_n}$ که در آن $\{c_n\}$ دنباله‌ای مناسب از اعداد حقیقی می باشد (برای مثال $c_n=\exp(\frac{1}{\mu(A_n)})$).
چون وجود g_∞ و h_∞ تنها با استفاده از شرط (۲) اثبات شد، پس اگر فضای $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ چنان باشد که برای هر $p,q\in(0,+\infty)$ که $p<q$ داشته باشیم $\mathcal{L}^p(\mu)\subsetneq\mathcal{L}^q(\mu)$، آنگاه هر بازه‌ی $I\subseteq(0,+\infty)$ که $\sup I=+\infty$ برابر مجموعه‌ی نماهای انتگرال‌پذیری یک تابع حقیقی $\mathcal{A}$ـ اندازه‌پذیر f می‌باشد.

مراجع

[1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw Hill, New York, 1987.

[2] A. Villani, Another note on the inclusion $\mathcal{L}^p(\mu) \subseteq \mathcal{L}^q(\mu)$, *Amer. Math. Monthly*, **92** (1985) 485–487.

مهدی دهقانی

اصفهان، کاشان، دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

e.g.mahdi@gmail.com

مهدی دهقانی متولد شهریورماه ۱۳۶۰ در شهر یزد است. وی در سال ۱۳۸۲ مقطع کارشناسی رشته‌ی ریاضی کاربردی را در دانشگاه یزد به پایان رسانید و در سال ۱۳۸۵ نیز مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض این دانشگاه را به اتمام رسانید و پس از گذراندن یک دوره شش ماهه تحقیقاتی در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد در سال ۱۳۹۳ موفق به اخذ دکتری تخصصی ریاضی محض (گرایش آنالیز) از دانشگاه یزد شد. وی در حال حاضر استادیار دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه کاشان است.

رسول کاظمی

اصفهان، کاشان، دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

r.kazemi@kashanu.ac.ir

رسول کاظمی متولد بهمن ماه ۱۳۶۱ در شهر نجف آباد است. وی در سال ۱۳۸۵ مقطع کارشناسی رشته‌ی ریاضی محض را در دانشگاه صنعتی اصفهان به پایان رسانید و در سال ۱۳۸۷ نیز مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض را در دانشگاه صنعتی شریف به اتمام رسانید و سپس در سال ۱۳۹۱ موفق به اخذ دکتری تخصصی ریاضی کاربردی (گرایش دستگاه‌های دینامیکی) از دانشگاه صنعتی اصفهان شد. وی در حال حاضر استادیار دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه کاشان است.