

## معرفی فرکتال‌ها و بُعدهای کسری

مهدی دلخوش

چکیده. فرکتال‌ها؛ توابع، شکل‌ها و مفاهیم هندسی نامنظمی هستند که در حین بی‌نظمی دارای نظم‌ها و خواص مشخص و مفیدی می‌باشند. به دلیل این که فرکتال‌ها دارای بی‌نظمی‌های خاصی هستند با استفاده از مباحث کلاسیک ریاضیات به راحتی قابل بحث و بررسی نیستند، به همین دلیل یکی از ابزارهای بسیار مفید جهت بررسی و تجزیه تحلیل فرکتال‌ها، بُعدهای کسری می‌باشند. در این مقاله، به معرفی فرکتال‌ها پرداخته و در خصوص خواص و چند نوع مهم آنها را بیان و مورد بحث قرار می‌دهیم و در همین راستا به معرفی بُعدهای کسری و به بیان بعضی از تعاریف مختلف و خواص بُعدهای کسری، نیز می‌پردازیم و خواهیم دید که با استفاده از بُعدهای کسری می‌توان فرکتال‌ها را مورد بررسی و بحث قرار داد و نتایج بسیار جالب در خصوص آنها به دست آورد.

### ۱. مقدمه

کلمه‌ی "فرکتال"<sup>۱</sup> اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط مندلبروت<sup>۲</sup>، برای شرح هدفی که خیلی نامنظم بود از کلمه‌ی لاتین Fractus یعنی شکستن، استفاده شد [۱].

به طور ساده؛ فرکتال‌ها، مجموعه‌ها یا چیزهایی با بُعدهای ناصحیح هستند، که مطالب زیادی در مورد این موضوع وجود دارد [۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲].

بُعد<sup>۳</sup> یک مجموعه یا پدیده، معمولاً یک عدد صحیح نامنظمی است (هر چند بحث‌هایی روی مجموعه‌هایی که دارای بُعد منفی هستند، بیان شده است)، که عمدتاً به وسیله‌ی مختصات اعداد، برای تشخیص کاملی از پدیده داده شده، تعریف می‌شود. بنابراین، وقتی کسی درباره‌ی امکان وجود پدیده‌هایی که دارای بُعد ناصحیح است، تعجب می‌کند، سعی می‌شود یک تعریف متفاوت از بُعد که مستقل از مختصات است، بیان شود.

درک مستقیم برای هر دو تعریف صحیح و ناصحیح برای بُعدها، در عمل از اندازه‌ی طول، مساحت یا حجم، گرفته شده است. برای ساخت ایده‌ی پایه‌ای تعاریف بُعدهای کسری، به بیان یک مثال ساده کفایت می‌کنیم. به منظور تعریف طول یک منحنی مسطح، یک نفر، یک چوبی به اندازه‌ی مثلاً  $\delta$  در نظر می‌گیرد و با بازه‌ی منظم روی منحنی به کمک این قطعه چوب علامت می‌زند، سپس طول  $L$  از منحنی با  $N(\delta)$ ، تعداد قطعه چوبی است که برای پوشاندن منحنی استفاده شده است، نسبت مستقیم دارد. به منظور تقریب بهتر از طول، می‌توانیم  $\delta$ ‌های کوچکتری در نظر بگیریم. اگر حد بگیریم وقتی  $\delta$  به صفر نزدیک می‌شود طول  $L$  کراندار و مقدار واقعی نزدیک‌تر می‌شود. در روش مشابه، به منظور پیدا کردن مساحت (حجم) یک مجموعه، به وسیله‌ی مربع‌هایی (مکعب‌هایی) از پهنا  $\delta$ ، آن را می‌پوشانیم، اگر تعداد  $N(\delta)$  مربع (مکعب) برای پوشاندن مجموعه لازم باشد، آنگاه مساحت (حجم) به صورت  $A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 N(\delta)$   $V = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^3 N(\delta)$

عبارت و کلمات کلیدی. فرکتال، بُعد کسری، توابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر، بعد هاسدورف.  
تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۷/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۰/۱۳.

<sup>1</sup> Fractal <sup>2</sup> Mandelbrot <sup>3</sup> Dimension

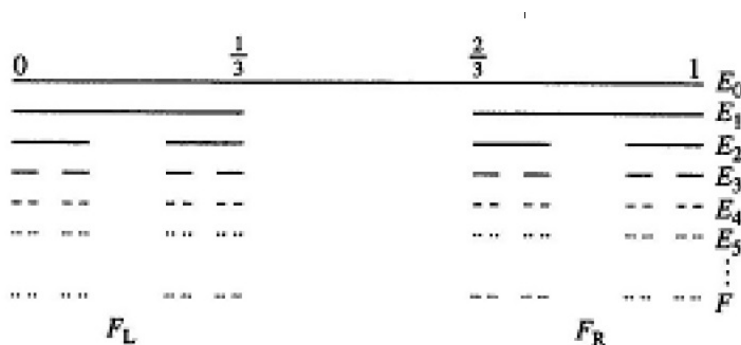
به دست می‌آید. توجه کنید که توان  $\delta$  در بالا با بُعد مجموعه مطابق است. همچنین توجه کنید که برای یک قطعه صفحه، طول بینهایت (تعداد خطوط واقع در صفحه نامتناهی است)، مساحت متناهی و حجم صفر است. مقدار بُعد، که اندازه‌ی مجموعه از بینهایت به صفر پرش می‌کند را بُعد مشخصه‌ی مجموعه گوئیم. این درک مستقیم از بُعد، پایه‌ی تعاریف فرموله شده از بُعدهای کسری را که بعداً در مورد آنها بحث خواهیم کرد، تأمین می‌کند.

## ۲. فرکتال‌ها

### ۱.۲. بررسی چند فرکتال معروف.

۱.۱.۲. مجموعه یک سوم میانی کانتور. مجموعه یک سوم میانی کانتور<sup>۴</sup>، یکی از مشخص‌ترین و ساده‌ترین، ساختارهای فرکتالی است [۱۰]. (شکل ۱ را ببینید.)

شکل ۱: مجموعه یک سوم میانی کانتور



فرض کنیم  $E_0$  بازه‌ی  $[0, 1]$  باشد. فرض کنیم  $E_1$  مجموعه به دست آمده از حذف یک سوم میانی  $E_0$  باشد. بنابراین  $E_1$  شامل  $[0, \frac{1}{3}]$  و  $[\frac{2}{3}, 1]$  است. حال یک سوم میانی از این بازه‌ها را حذف می‌کنیم تا  $E_2$  که شامل چهار بازه‌ی  $[0, \frac{1}{9}]$ ،  $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ ،  $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$  و  $[\frac{8}{9}, 1]$  است، حاصل شود. این روش را ادامه می‌دهیم تا  $E_k$  که از حذف یک سوم میانی بازه‌های  $E_{k-1}$  حاصل شود. بنابراین  $E_k$  شامل  $2^k$  بازه با طول‌های  $3^{-k}$  است. مجموعه‌ی یک سوم میانی کانتور  $F$  شامل اعضایی است که در  $E_k$  برای هر  $k$  هستند، یا به طور ریاضی وار  $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ . مجموعه‌ی کانتور  $F$ ، می‌تواند به وسیله‌ی حد دنباله‌ی مجموعه‌ی  $E_k$  وقتی  $k$  به بینهایت میل می‌کند، نیز تعریف شود.

واضح است که رسم مجموعه‌ی کانتور  $F$  غیر ممکن است. بنابراین "عکس  $F$ " به عکس یکی از  $E_k$ ‌ها، که یک تقریب از  $F$  وقتی  $k$  به اندازه‌ی کافی بزرگ است، میل می‌کند. (شکل ۱ را ببینید.)

در نگاه اول، به نظر می‌رسد که قسمت عمده‌ای از بازه‌ی  $[0, 1]$  را در طی ساخت  $F$ ، حذف کرده‌ایم و هیچ چیز باقی نمانده است. ولی در حقیقت،  $F$  یک مجموعه‌ی نامتناهی (حتی ناشمارا) است که شامل بینهایت عضو در هر همسایگی از هر نقطه‌اش است. حال، بعضی از خصوصیات مجموعه‌ی یک سوم میانی کانتور  $F$  را بیان می‌کنیم و در آینده خواهیم دید که بسیاری از فرکتال‌ها دارای خصوصیات مشابه‌ای با آن هستند.

(۱)  $F$  خود-متشابه است. واضح است که قسمتی از  $F$  که در بازه‌ی  $[0, \frac{1}{3}]$  و قسمتی از  $F$  که در بازه‌ی  $[\frac{2}{3}, 1]$  هستند، هر دو از لحاظ هندسی با  $F$  از مقیاس  $\frac{1}{3}$ ، متشابه‌اند و باز دوباره بخش‌هایی از  $F$  در هر چهار بازه‌ی  $E_2$ ، با خود  $F$  از مقیاس  $\frac{1}{9}$ ، متشابه‌اند و غیره. مجموعه‌ی کانتور شامل کپی‌هایی از خود در مقیاس‌های مختلف زیادی است.

<sup>4</sup> Middle Third Cantor

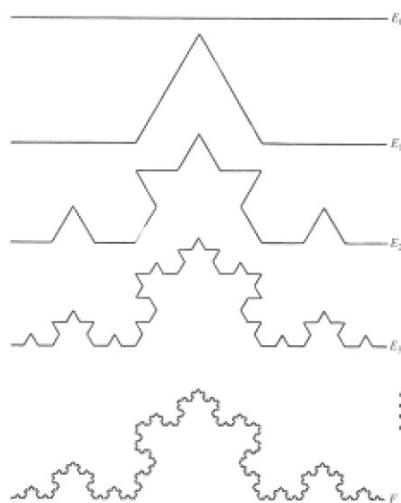
- (۲) مجموعه‌ی  $F$  دارای یک "ساختار جالب" است. یعنی، شامل وضعیتی در مقیاس‌های کوچک دلخواه است.
- (۳) هر چند  $F$  دارای یک ساختار وضعیتی پیچیده است ولی تعریف فعلی  $F$  خیلی مستقیم است.
- (۴) به‌وسیله‌ی یک روش بازگشتی به‌دست آمده است. ساختار، شامل تکرار حذف یک سوم میانی بازه‌هاست، گام‌های متوالی باعث افزایش تقریب خوبی از  $E_k$  برای مجموعه‌ی  $F$  می‌شود.
- (۵) هندسه‌ی  $F$  در عبارت‌های کلاسیک به‌طور ساده شرح داده نمی‌شود. نه کانون نقاطی است که در شرط هندسی ساده‌ای صدق کند و نه مجموعه‌ی جواب‌هایی از یک معادله‌ی ساده است.
- (۶) شرح هندسی موضعی  $F$  سخت است. نزدیک هر نقطه‌اش تعداد زیادی از نقاط دیگرش، با فاصله طول‌های گوناگون، وجود دارد.
- (۷) هر چند  $F$  یک مجموعه‌ی نامتناهی ناشمارا است ولی اندازه‌اش، با هر تعریف از اندازه، برابر صفر است.

۲.۱.۲. منحنی وَنکُچ. مثال معروف دیگر، منحنی وَنکُچ<sup>۵</sup> است [۱۰]. (شکل ۲ را ببینید).

فرض کنید  $E_0$  یک قطعه خط از طول واحد باشد. مجموعه‌ی  $E_1$  شامل چهار قطعه به‌دست آمده به‌وسیله‌ی حذف یک سوم میانی از  $E_0$  و جاگذاری آن به‌وسیله دو طرف از یک مثلث متوازی الاضلاع است.  $E_2$  را به‌وسیله‌ی روش مشابه قبلی برای هر قطعه در  $E_1$ ، می‌سازیم و الی آخر. بنابراین  $E_k$  از جایگذاری یک سوم میانی از هر قطعه‌ی خط مستقیم از  $E_{k-1}$  به‌وسیله‌ی دو طرف از یک مثلث متوازی الاضلاع، به‌دست می‌آید. وقتی  $k$  بزرگ است، منحنی‌های  $E_{k-1}$  و  $E_k$  تنها در وضعیت جالبی متفاوت هستند و وقتی  $k$  به بینهایت میل می‌کند، دنباله‌ی منحنی‌های چند وجهی  $E_k$  به یک منحنی حدی  $F$ ، که منحنی وَنکُچ نامیده می‌شود، میل می‌کند.

منحنی وَنکُچ دارای خاصیت‌های خیلی مشابه‌ای با مجموعه‌ی یک سوم میانی کانتور است. آن از چهار "یک چهار" متشابه با آن با مقیاس  $\frac{1}{3}$  ساخته شده است. یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که  $E_k$  دارای طول  $\left(\frac{4}{3}\right)^k$  است بنابراین وقتی  $k$  به بینهایت میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که  $F$  دارای طول نامتناهی است. از طرف دیگر،  $F$  دارای مساحت صفر در صفحه است. بنابراین، طول و مساحت، یک شرح مفید از اندازه‌ی  $F$  را به‌دست نمی‌دهند.

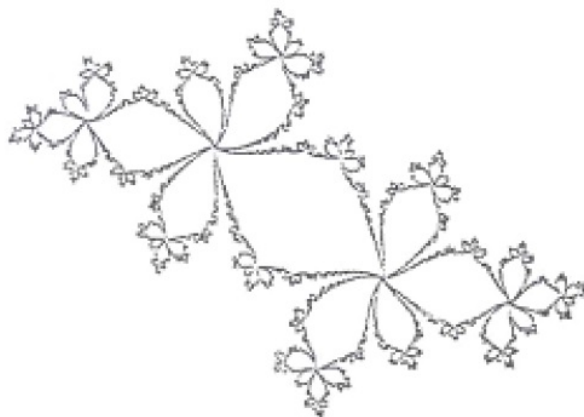
شکل ۲: منحنی وَنکُچ



<sup>5</sup> Van koch

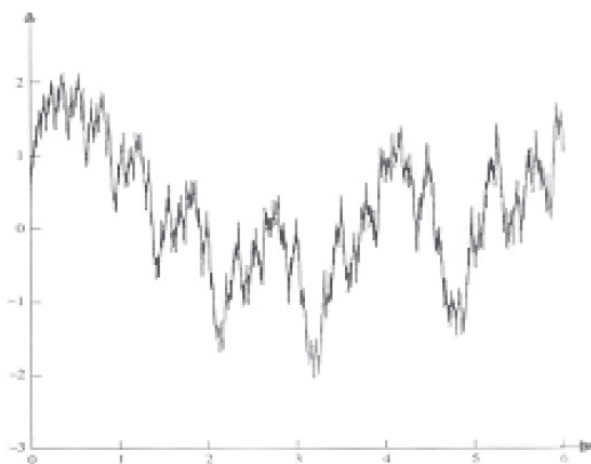
۳.۱.۲. مجموعه جولیا. شکل ۳، ساختار خیلی پیچیده‌ی مجموعه جولیا<sup>۶</sup> را که از تابع  $f(z) = z^2 + c$  برای یک ثابت مناسب  $c$  به دست می‌آمده است، را نشان می‌دهد [۱۰]. هر چند این مجموعه یک مجموعه‌ی اکید خود-متشابه مانند مجموعه‌ی کانتور و منحنی وِنگِچ نیست. ولی "شبه خود-متشابه" است، یعنی اگر قطعه‌ای کوچک دلخواه از مجموعه را بزرگ کنیم سپس با یک قسمت بزرگ از مجموعه منطبق خواهد شد.

شکل ۳: مجموعه جولیا



۴.۱.۲. مجموع نامتناهی گرافی. شکل ۴، گراف تابع  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{-k} \sin\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k t\right)$  را نشان می‌دهد [۱۰]، مجموع نامتناهی گرافی که دارای یک ساختار جالب است را نتیجه می‌دهد. بعداً روی این تابع بیشتر بحث خواهیم کرد.

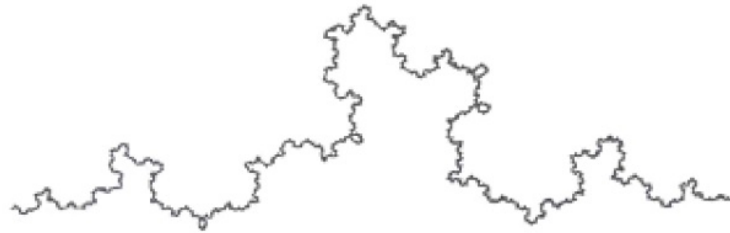
شکل ۴: مجموع نامتناهی گرافی



<sup>6</sup> Julia

۵.۱.۲. منحنی وَنکُچ تصادفی. بعضی از ساختارها می‌توانند تصادفی باشند. شکل ۵، یک “منحنی وَنکُچ تصادفی” را نشان می‌دهد [۱۰]. این منحنی تصادفی مشخصاً دارای یک ساختار جالب است. اما خود-متشابه اکید از منحنی وَنکُچ با یک “خود-متشابه آماری” جایگزین شده است.

شکل ۵: منحنی وَنکُچ تصادفی



۲.۲. تعریف فرکتال. مثال‌های بالا مجموعه‌هایی هستند که همگی به فرکتال‌ها اشاره می‌کنند. روش‌های محاسبه و هندسه‌ی کلاسیک برای مطالعه‌ی فرکتال‌ها نامناسب است و نیاز به تکنیک‌های بهتری داریم. ابزار اصلی هندسه‌ی فرکتال‌ها، بُعد است. ما آشنایی کافی با ایده‌های که یک منحنی (مسطح) ۱- بُعدی است و یک سطح، ۲- بُعدی است، داریم. اما باید توجه شود که مجموعه‌ی کانتور دارای بُعد  $\frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\dots$  و منحنی وَنکُچ دارای بُعد  $\frac{\log 4}{\log 3} = 1.262\dots$  هستند. مثلاً بُعد  $F$  در منحنی وَنکُچ سازگار به نظر می‌رسد چون “بیشتر از ۱- بُعدی” (دارای طول نامتناهی) و “کمتر از ۲- بُعدی” (دارای مساحت صفر) است. برای توضیح بیشتر در مورد فرکتال‌ها، ابتدا یک سؤال را مطرح می‌کنیم: تعریف “زندگی” چیست؟ اگر این سؤال را از چندین نفر پرسیده شود، هر یک در جواب یک خاصیت از زندگی، مانند: حرکت کردن، نفس کشیدن، وجود داشتن، تولید مثل کردن و غیره، را بیان می‌کند. در حالی که هیچ یک از این خاصیت‌ها “زندگی” را به طور کامل تعریف نمی‌کنند ولی مجموع این خاصیت‌ها یک تعریف عمومی از “زندگی” را بیان می‌کنند. در مورد تعریف فرکتال مسئله به همین شکل است. یک خاصیت خاص از فرکتال یک تعریف عمومی از آن را بیان نمی‌کند. بنابراین فرکتال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱: یک مجموعه‌ی  $F$  را فرکتال گوئیم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

- (۱)  $F$  دارای یک ساختار جالب باشد، یعنی مقیاس‌های کوچک دلخواه‌ای را شرح دهد.
- (۲)  $F$  دارای یک نامنظمی زیادی برای شرح به وسیله‌ی هندسه‌ی معمولی، کلی یا موضعی، باشد.
- (۳) اغلب  $F$  دارای شکلی خود-متشابه باشد، چه تقریبی و چه آماری.
- (۴) معمولاً “بُعد کسری<sup>۷</sup>” از  $F$  (تعریف شده در هر روشی) بزرگتر از “بُعد توپولوژیک” آن باشد. (به طور کاملتر بعداً در این موارد بحث خواهد شد).
- (۵) در بسیاری حالات  $F$  با یک روش خیلی ساده، شاید بازگشتی، تعریف شده باشد.

<sup>7</sup> Fractional Dimension

### ۳. بُعدهای کسری

تعاریف مختلفی از بُعدهای کسری وجود دارد که هر کدام گاهی مفید و زمانی مفید نیستند. چند تعریف مهم از بُعدهای کسری را در زیر بررسی کنیم [۲، ۱۰]. ولی قبل از شروع، بعضی خواص مطلوب که یک بُعد باید داشته باشد را بیان می‌کنیم.

فرض کنیم  $E, F \subseteq R^n$ .

(۱) یکنوایی<sup>۸</sup>: اگر  $E \subseteq F$  آنگاه  $\dim E \leq \dim F$ . این واضح است، چون اگر تعدادی نقطه را به یک مجموعه اضافه کنیم، نباید بعدش کاهش یابد.

(۲) پایداری<sup>۹</sup>:  $\dim(E \cup F) = \max(\dim E, \dim F)$ .

(۳) پایداری شمارا:  $\dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim F_i$ . دو خاصیت ۲ و ۳ نتیجه می‌دهد که اگر یک مجموعه

را با یک مجموعه‌ی دیگر با بُعد کمتر ترکیب کنیم، بُعد مجموعه‌ی حاصل تغییری نمی‌کند.

(۴) پایایی<sup>۱۰</sup> هندسی: اگر  $F$  یک تبدیل در  $R^n$  به طوری که یک انتقال، دوران، تشابه‌ی یا آفینی باشد، آنگاه  $\dim(f(F)) = \dim F$ .

(۵) پایایی لیپ‌شیتز<sup>۱۱</sup>: اگر  $f: F \rightarrow R^m$  یک تبدیل لیپ‌شیتز دوطرفه باشد، یعنی:

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad x, y \in F$$

که  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$  آنگاه  $\dim(f(F)) = \dim F$ .

(۶) مجموعه‌ی شمارا<sup>۱۲</sup>: اگر  $F$  متناهی یا شمارا باشد، آنگاه  $\dim F = 0$ . این خاصیت دور از انتظار نیست، چون بُعد مجموعه‌ی تک عضوی صفر است و از پایداری شمارا، مجموعه‌ی شمارا باید دارای بُعد صفر باشد.

(۷) مجموعه باز: اگر  $F$  یک مجموعه‌ی باز از  $R^n$  باشد، آنگاه  $\dim F = n$ .

(۸) خمینه‌های<sup>۱۳</sup> هموار: اگر  $F$  یک منیفلد مسطح  $m$ -بُعدی باشد، آنگاه  $\dim F = m$ .

باید توجه داشت که تمام تعاریف از بُعد در خواص بالا صدق نمی‌کنند.

اکنون به بیان چند تعریف مهم از بُعدهای کسری می‌پردازیم:

۱.۳. بُعد تشابه‌ای. برای مجموعه‌ای شامل  $N$  قطعه، مقیاس شده در همهی جهات به وسیله یک فاکتور  $r$ ، بُعد  $D$

به وسیله‌ی زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$D = -\frac{\log N}{\log r}.$$

به عنوان مثال، منحنی وِنگچ از چهار کپی از خودش مقیاس شده به وسیله‌ی یک فاکتور  $\frac{1}{3}$  است، بنابراین بُعد تشابه‌ای آن  $D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.262 \dots$  است. و همچنین مجموعه‌ی کانتور از دو کپی از خودش مقیاس شده به وسیله‌ی یک فاکتور  $\frac{1}{3}$  است، بنابراین بُعد تشابه‌ای آن  $D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 \dots$  است.

تعمیم این بُعد برای مجموعه‌های خود-متشابه دارای مقیاس‌های متفاوت برای قطعات مختلف، کار سختی نیست، برای یک مجموعه (فرکتال چندگانه<sup>۱۴</sup>) شامل  $N$  قطعه، که  $i$ امین قطعه به وسیله فاکتور  $r_i$  مقیاس شده است، بُعد  $D$  جواب یکتای معادله‌ی موران<sup>۱۵</sup> است [۱۳]:

$$\sum_{i=1}^N r_i^D = 1.$$

<sup>8</sup> Monotonicity <sup>9</sup> Stability <sup>10</sup> Invariance <sup>11</sup> Lipschitz <sup>12</sup> Countable <sup>13</sup> Manifold <sup>14</sup> Multifractal <sup>15</sup> Moran

متأسفانه، ”بُعد تشابه‌ای“ تنها برای یک کلاس کوچکی از مجموعه‌های خود-متشابه معنی‌دار است، به همین دلیل در عمل زیاد کاربرد ندارد.

**۲.۳. بُعد هاسدورف.** قبل از تعریف بُعد هاسدورف<sup>۱۶</sup>، چون اندازه‌ی هاسدورف را نیاز داریم، ابتدا اندازه‌ی هاسدورف را تعریف کرده و سپس تعدادی از خواص آن را بیان می‌کنیم [۱۰].

**۱.۲.۳.** اندازه‌ی هاسدورف. اگر  $U$  یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از فضای اقلیدسی  $n$ -بُعدی،  $R^n$ ، باشد، قطر  $U$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|U| = \text{Sup} \{ |x - y| : x, y \in U \}$$

یعنی، بزرگترین فاصله‌ی هر دو جفت از نقاط در  $U$  است. اگر  $\{U_i\}$  یک خانواده شمارا (یا متناهی) از مجموعه‌هایی از قطر حداکثر  $\delta$ ، که  $F$  را می‌پوشانند، باشد. یعنی،  $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  با  $0 \leq U_i \leq \delta$  برای هر  $i$ ، به  $\{U_i\}$  یک  $\delta$ -پوش از  $F$  گوئیم.

فرض کنیم  $F$  یک زیر مجموعه از  $R^n$  و  $s$  یک عدد نامنفی باشد. برای هر  $\delta > 0$ ، تعریف می‌کنیم:

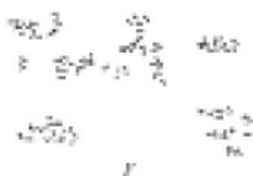
$$(۱) \quad H_{\delta}^s(F) = \text{Inf} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } F \right\}$$

بنابراین، تمام پوش‌های  $F$  از قطر حداکثر  $\delta$  را بررسی کرده و مجموع توان  $s$  از قطرهای آن را مینیمم می‌کنیم. (شکل ۶ را ببینید.) وقتی  $\delta$  کاهش یابد. کلاس پوش‌های مجاز از  $F$  در معادله ۱ کاهش می‌یابد، پس، اینفیمم  $H_{\delta}^s(F)$  افزایش می‌یابد و بنابراین به یک حد وقتی  $\delta \rightarrow 0$ ، می‌رسیم. می‌نویسیم:

$$(۲) \quad H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F)$$

این حد برای هر زیر مجموعه  $F$  از  $R^n$  موجود است، باید توجه داشت که مقدار حد می‌تواند  $0$  یا  $\infty$  باشد.  $H^s(F)$  را ”اندازه‌ی هاسدورف  $s$ -بُعدی“ از  $F$  می‌نامیم.

شکل ۶: پوش‌های  $F$  از قطر حداکثر  $\delta$  برای اندازه‌ی هاسدورف



<sup>16</sup> Hausdorff

خاصیت ۱ (مقیاس): فرض کنیم  $S$  یک تبدیل متشابه کننده با فاکتور مقیاس  $\lambda > 0$  باشد، اگر  $F \subset R^n$ ، آنگاه

$$H^s(S(F)) = \lambda^s H^s(F).$$

اثبات: اگر  $\{U_i\}$  یک  $\delta$ -پوش از  $F$  باشد، آنگاه  $\{S(U_i)\}$  یک  $\lambda\delta$ -پوش از  $S(F)$  است، بنابراین

$$\sum |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s$$

پس با اینفیمم گرفتن داریم:

$$H_{\lambda\delta}^s(S(F)) \leq \lambda^s H_{\delta}^s(F)$$

وقتی  $\delta \rightarrow 0$  نتیجه می‌دهد که  $H^s(S(F)) \leq \lambda^s H^s(F)$ .

$S$  را با  $S^{-1}$  و  $\lambda$  را با  $\lambda^{-1}$  و  $F$  را با  $S(F)$  جایگزین می‌کنیم و طرف دیگر نامساوی را ثابت می‌کنیم. بنابراین حکم ثابت است. □

یک بحث مشابه، تقریب پایه‌ای از تأثیر تبدیل‌های عمومی‌تر روی اندازه‌ی هاسدورف از مجموعه‌ها را نتیجه می‌دهد:

خاصیت ۲: فرض کنیم  $F \subset R^n$  و  $f: F \rightarrow R^m$  یک نگاشت باشد به طوری که

$$(۳) \quad |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad x, y \in F$$

برای ثابت‌های  $c > 0$  و  $\alpha > 0$ . آنگاه برای هر  $s$

$$(۴) \quad H^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} H^s(F)$$

اثبات: اگر  $\{U_i\}$  یک  $\delta$ -پوش از  $F$  باشد، آنگاه چون

$$|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$$

آن نتیجه می‌دهد که  $\{f(F \cap U_i)\}$  یک  $\varepsilon$ -پوش از  $f(F)$  است، که  $\varepsilon = c\delta^\alpha$  است. بنابراین

$$\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s$$

آنگاه

$$H_{\varepsilon}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} H_{\delta}^s(F)$$

وقتی  $\delta \rightarrow 0$  آنگاه  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، بنابراین معادله ۴ ثابت می‌شود. □

شرط ۲ را شرط هولدر از نمای  $\alpha$  می‌نامند و نتیجه می‌دهد که  $f$  پیوسته است. ویژگی مهم حالتی است که  $\alpha = 1$  است، یعنی

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

که شرط لیبشیتز نامیده می‌شود، بنابراین

$$(۵) \quad H^s(f(F)) \leq c^s H^s(F)$$

عموماً اندازه‌ی هاسدورف را به وسیله ضرب کردن آن در

$$\gamma(s) = \frac{(\Gamma(1/2))^s}{\Gamma(1 + s/2)}$$

استاندارد می‌کنند [۱]. که یک حجم  $s$ -بعدی از یک گوی به شعاع یک است.

۲.۲.۳. بُعد هاسدورف. معادله‌ی ۱ را در نظر می‌گیریم. واضح است که برای هر مجموعه‌ی داده شده  $F \subseteq R^n$  و  $\delta < 1$ ،  $H_\delta^s(F)$  غیر صعودی با  $s$  است، همچنین به وسیله‌ی معادله ۲،  $H^s(F)$  غیر صعودی است. علاوه بر این، داریم: اگر  $t > s$  و  $\{U_i\}$  یک  $\delta$ -پوش از  $F$  باشد. داریم:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

بنابراین  $H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$ . فرض کنیم  $\delta \rightarrow 0$ ، می‌بینیم که اگر  $H_\delta^s(F) < \infty$ ، آنگاه  $H^t(F) = 0$  برای  $t > s$ . بنابراین یک گراف از  $H^s(F)$  نسبت به  $s$  (شکل ۷) نشان می‌دهد که یک مقدار بحرانی از  $s$  که  $H^s(F)$  از  $\infty$  به  $0$  "می‌پرد"، وجود دارد. این مقدار بحرانی، "بُعد هاسدورف" یا "بُعد هاسدورف-بشیکفیتچ"<sup>۱۷</sup> از  $F$  نامیده و به وسیله‌ی  $\dim_H F$  نمایش داده می‌شود. که برای هر مجموعه‌ی  $F \subseteq R^n$  تعریف شده است. به بیان دیگر، داریم:

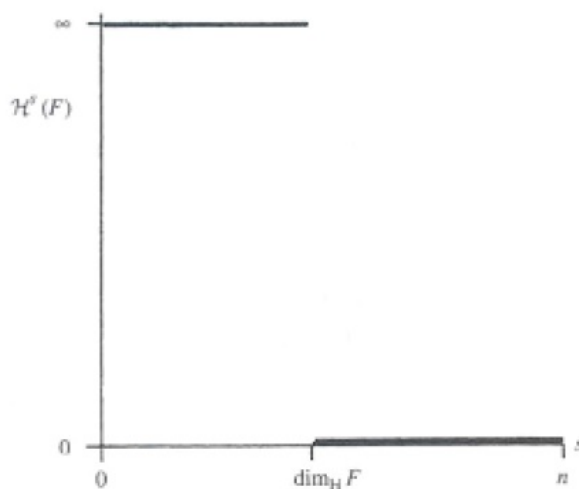
$$\dim_H F = \text{Inf} \{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \text{Sup} \{s : H^s(F) = \infty\}$$

(سوپریمم از مجموعه‌ی تهی را صفر در نظر می‌گیریم) بنابراین

$$(۶) \quad H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{if } 0 \leq s < \dim_H F \\ 0 & \text{if } s > \dim_H F \end{cases}$$

اگر  $s = \dim_H F$  باشد، آنگاه  $H^s(F)$  می‌تواند صفر یا بینهایت یا  $0 < H^s(F) < \infty$  باشد.

شکل ۷: بُعد هاسدورف



برای یک مثال ساده، فرض کنیم  $F$  یک دیسک مسطح یا شعاع یک در  $R^3$  باشد. از خواص معمولی طول، مساحت و حجم داریم:

$$H^3(F) = \frac{6}{\pi} \text{vol}(F) = 0, \quad 0 < H^2(F) = \frac{4}{\pi} \text{area}(F) = 4 < \infty, \quad H^1(F) = \text{length}(F) = \infty$$

اگر  $s > 2$ ،  $H^s(F) = 0$  و اگر  $s < 2$ ،  $H^s(F) = \infty$  با  $\dim_H F = 2$ .

<sup>17</sup> Besicovitch

بُعد هاسدورف در خواص زیر صدق می‌کند:

(۱) یکنوایی: اگر  $E \subseteq F$  آنگاه  $\dim_H E \leq \dim_H F$ . این فوراً از خاصیت اندازه که  $H^s(E) \leq H^s(F)$  برای هر  $s$ ، نتیجه می‌شود.

(۲) پایداری شمارا: اگر  $F_1, F_2, \dots$  یک دنباله (شمارا) از مجموعه‌ها است، آنگاه  $\dim_H (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim_H F_i$ . از خاصیت یکنوایی واضح است که  $\dim_H (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \dim_H F_j$  برای هر  $j$ ، بنابراین  $\dim_H (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sup_{1 \leq j \leq \infty} \dim_H F_j$ . از طرف دیگر، اگر  $s > \dim_H F$  برای  $i$ ، آنگاه  $H^s(F_i) = 0$ . بنابراین  $H^s(\bigcup F_i) = 0$  نامساوی دیگر را نتیجه می‌دهد.

(۳) مجموعه‌ی شمارا: اگر  $F$  متناهی یا شمارا باشد، آنگاه  $\dim_H F = 0$ . به این دلیل که اگر  $F_i$  یک نقطه‌ی تنها است،  $H^0(F_i) = 1$  و  $\dim_H F_i = 0$ . بنابراین به وسیله‌ی پایداری شمارا داریم:  $\dim_H (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$ .

(۴) مجموعه‌های باز: اگر  $F \subseteq R^n$  یک مجموعه‌ی باز است، آنگاه  $\dim_H F = n$ . به این دلیل که  $F$  شامل یک گوی از حجم  $n$ -بُعدی مثبت است،  $\dim_H F \geq n$ . اما چون  $F$  تشکیل شده از گوی‌های شمارای زیادی است، پایداری شمارا و یکنوایی را استفاده می‌کنیم، پس  $\dim_H F \leq n$ .

(۵) خمینه‌های هموار: اگر  $F$  یک مینفولد مسطح  $m$ -بُعدی از  $R^n$  باشد، آنگاه  $\dim_H F = m$ . بویژه منحنی‌های مسطح دارای بُعد ۱ و سطوح مسطح دارای بُعد ۲ هستند.

خاصیت زیر از بُعد هاسدورف فوراً از خاصیت ۲ برای اندازه‌ی هاسدورف نتیجه می‌شود.

خاصیت ۳: فرض کنیم  $F \subseteq R^n$  و  $f: F \rightarrow R^m$  صدق کند در شرط هولدر

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad x, y \in F$$

آنگاه  $\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$

اثبات: اگر  $s > \dim_H F$  آنگاه به وسیله خاصیت ۲ داریم:  $H^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} H^s(F) = 0$

$$\dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha} \quad s > \dim_H F \quad \square$$

نتیجه ۴:

(a) اگر  $f: F \rightarrow R^m$  یک تبدیل لیشیتز باشد، آنگاه  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$ .

(b) اگر  $f: F \rightarrow R^m$  یک تبدیل لیشیتز دو طرفه<sup>۱۸</sup> باشد، آنگاه  $\dim_H f(F) = \dim_H F$ .

اثبات: قسمت (a) از خاصیت ۳ وقتی که  $\alpha = 1$  است، نتیجه می‌شود. بکار می‌بریم قسمت (a) را برای  $f^{-1}$ :

$$f(F) \rightarrow F \quad \text{و دیگر نامساوی مورد نیاز برای (b) را نتیجه می‌گیریم.} \quad \square$$

این نتیجه، یک خاصیت پایه‌ای از بُعد هاسدورف را بیان می‌کند: "بُعد هاسدورف تحت تبدیلات لیشیتز دو طرفه پایا است." بنابراین اگر دو مجموعه دارای بُعدهای متفاوت باشند نمی‌تواند یک تبدیل لیشیتز دو طرفه از یکی به دیگری وجود داشته باشد.

در توپولوژی دو مجموعه "همانند" هستند اگر یک همومورفیسم (نگاشتی یک به یک و پیوسته با معکوس پیوسته) بین آنها وجود داشته باشد، همانند آن را در هندسه‌ی فرکتالی، دو مجموعه "همانند" هستند اگر یک نگاشت لیشیتز دو طرفه بین آنها وجود داشته باشد.

عموماً، بُعد یک مجموعه، تنها خصوصیات توپولوژی آن مجموعه را برای ما بیان می‌کند.

خاصیت ۵: یک مجموعه‌ی  $F \subseteq R^n$  با  $\dim_H F < 1$  کلاً ناهمبند است.

<sup>18</sup> Bi-Lipschitz

**اثبات:** فرض کنیم  $x$  و  $y$  نقاطی مجزا از  $F$  باشند. نگاشت  $f: R^n \rightarrow [0, \infty)$  را به صورت  $f(x) = |z - x|$  تعریف می‌کنیم. چون  $f$  فاصله‌ای را زیاد نمی‌کند، یعنی

$$|f(z) - f(w)| = ||z - x| - |w - x|| \leq |(z - x) - (w - x)| = |z - w|$$

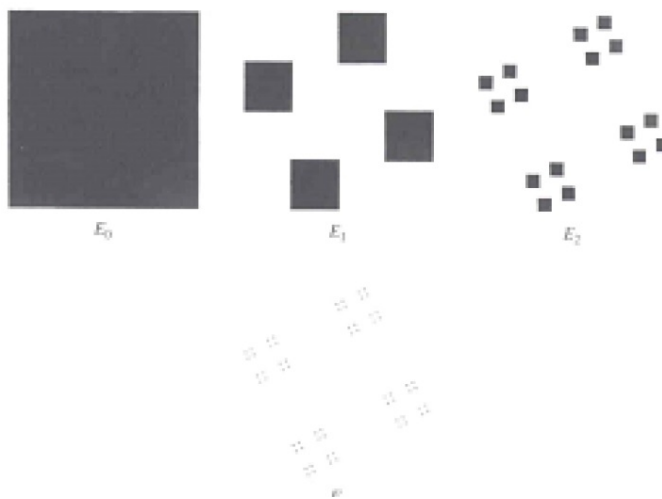
از نتیجه‌ی (a) داریم که  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$ . بنابراین  $f(F)$  یک زیر مجموعه‌ی  $R$  از  $H^1$ -اندازه یا طول صفر است و بنابراین دارای یک متمم چگال است.  $r$  را با  $r \notin f(F)$  و  $0 < r < f(y)$  انتخاب می‌کنیم، نتیجه می‌دهد که:

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}$$

بنابراین  $F$  شامل شده در دو مجموعه‌ی باز مجزا  $x$  در یک مجموعه و  $y$  در یک مجموعه‌ی دیگر است. بنابراین  $x$  و  $y$  در مؤلفه‌های همبند متفاوت از  $F$  قرار دارند و چون  $x$  و  $y$  دلخواه بودند پس  $F$  کلا ناهمبند است.  $\square$

**مثال ۱.۳.** **مثال ۶:** فرض کنیم  $F$  مجموعه‌ی غبار<sup>۱۹</sup> کانتور، ساختار بندی شده از مربع واحد در شکل ۸، باشد. (در هر مرحله از ساخت مربع‌ها به ۱۶ قسمت با یک چهارم طول هر طرف، تقسیم می‌شود که همانند نمونه چهار مربع نگه داشته می‌شود) آنگاه  $\sqrt{2} \leq H^1(F) \leq 1$ . بنابراین  $\dim_H F = 1$ .

شکل ۸: مجموعه‌ی غبار کانتور



**جواب:** واضح است که  $E_k$ ، مرحله‌ی  $k$ ام از ساخت، شامل  $4^k$  مربع از طول  $4^{-k}$  است، بنابراین قطر  $\sqrt{2} \cdot 4^{-k}$  است. مربعات  $E_k$  را به عنوان یک  $\delta$ -پوش از  $F$  که  $\delta = \sqrt{2} \cdot 4^{-k}$  است، در نظر می‌گیریم، یک تقریب برای  $\text{Inf}$  در معادله ۱ به دست می‌آوریم که  $H_\delta^1(F) \leq 4^k \cdot \sqrt{2} \cdot 4^{-k}$ . وقتی که  $k \rightarrow \infty$  بنابراین  $\delta \rightarrow 0$  و نتیجه می‌گیریم که  $H^1(F) \leq \sqrt{2}$ .

برای حد پایین، فرض کنیم  $\text{proj}$  نشان دهنده‌ی تصویر متعامد روی محور  $x$  باشد. تصویر متعامد فاصله‌ها را زیاد نمی‌کند، یعنی:  $|proj(x) - proj(y)| \leq |x - y|$  اگر  $x, y \in R^2$ . بنابراین  $proj$  یک نگاشت لب‌شیتز است. به وسیله‌ی خاصیت ساختاری  $F$ ، تصویر یا "سایه" از  $F$  روی محور  $x$ ها،  $proj F$ ، بازه واحد  $[0, 1]$  است. معادله ۵ را استفاده می‌کنیم و داریم:

<sup>19</sup> dust

$$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} = \text{length}[\mathbb{Q}, \mathbb{Z}] = H^1([\mathbb{Q}, \mathbb{Z}]) = H^1(\text{proj} F) \leq H^1(F).$$

مثال ۷: فرض کنیم  $F$  مجموعه‌ی یک سوم میانی کانتور باشد. (شکل ۱) اگر  $s = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\dots$ ، آنگاه  $\dim_H F = s$ .

جواب (به‌طور خلاصه): مجموعه‌ی کانتور  $F$  به یک قسمت چپ  $F_L = F \cap [0, \frac{1}{3}]$  و یک قسمت راست  $F_R = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$  می‌شکند. واضح است که هر دو قسمت از لحاظ هندسی با  $F$  متشابه‌اند، اما با مقیاس شده به‌وسیله‌ی یک نسبت  $\frac{1}{3}$ ، و  $F = F_L \cup F_R$  (اجتماع مجزا)، آنگاه از خواص اصلی اندازه و خاصیت ۱، برای هر  $s$  داریم:

$$H^s(F) = H^s(F_R) + H^s(F_L) = \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(F)$$

فرض کنیم که در مقدار بحرانی  $s = \dim_H F$  داشته باشیم  $0 < H^s(F) < \infty$  (این یک فرض بزرگ اما منطقی است). بنابراین داریم:

$$1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s \Rightarrow s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

۳.۳. بُعد جعبه‌ای-شمارنده. بُعد جعبه‌ای-شمارنده<sup>۲۰</sup> یا جعبه‌ای یکی از بُعدهایی است که بسیار استفاده می‌شود [۱۰]. بُعد جعبه‌ای به‌واسطه‌ی روابط آسان آن در محاسبات ریاضی و تقریب‌های تجربی، در کارهای عملی زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد. تعریف آن حداقل به دهه‌ی ۱۹۳۰ بر میگردد و بعضاً آنتروپی کولموگوروف<sup>۲۱</sup>، بُعد آنتروپی، بُعد ظرفیت، بُعد متریک، بُعد اطلاعات و چگالی لگاریتمی نامیده شده است. برای اجتناب از سردرگمی ما همواره آن را به نام بُعد جعبه‌ای-شمارنده<sup>۲۲</sup> یا جعبه‌ای خواهیم شناخت.

فرض کنیم  $F$  یک زیر مجموعه‌ی ناتهی کراندار از  $R^n$  باشد و  $N_\delta(F)$  کمترین تعداد از مجموعه‌هایی از قطر حداکثر  $\delta$  که برای پوشاندن  $F$  لازم است. بُعدهای جعبه‌ای بالایی و پایینی از  $F$ ، به ترتیب، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۷) \quad \underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$(۸) \quad \overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

که اگر مقدار آنها برابر باشد، به آن بُعد جعبه‌ای-شمارنده از  $F$  می‌گوییم. یعنی

$$(۹) \quad \dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

در تمام این بخش، فرض می‌کنیم که  $\delta > 0$  به اندازه‌ی کافی کوچک است برای اطمینان این‌که  $-\log \delta$  و مقادیر متشابه اکیداً مثبت هستند. برای اجتناب از مسائل  $\log 0$  یا  $\log \infty$  عموماً بُعد جعبه‌ای را برای مجموعه‌های ناتهی کراندار استفاده می‌کنیم.

چندین تعریف که با بُعد جعبه‌ای معادل هستند و گاهی اوقات مفید هستند، را بیان می‌کنیم. مجموعه‌ای از مکعب‌های  $\delta$ -مش از  $R^n$  را بررسی می‌کنیم. یعنی، مکعب‌هایی به شکل

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times [m_2\delta, (m_2 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

<sup>20</sup> Box-Counting Dimension <sup>21</sup> Kolmogorov <sup>22</sup> Box-Counting Dimension

که  $m_1, m_2, \dots, m_n$  اعداد صحیح مثبت هستند. فرض کنیم  $N'_\delta(F)$  تعداد مکعب‌های  $\delta$ -مش که با  $F$  اشتراک دارند، باشد. واضح است که آنها، یک خانواده از مجموعه‌های  $N'_\delta(F)$  از قطر  $\sqrt{n}\delta$  که  $F$  را می‌پوشانند، تأمین می‌کنند. بنابراین

$$N_{\sqrt{n}\delta}(F) \leq N'_\delta(F)$$

اگر  $\frac{\delta}{n} < 1$  آنگاه

$$\frac{\log N_{\sqrt{n}\delta}(F)}{-\log(\sqrt{n}\delta)} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta}$$

حد می‌گیریم وقتی که  $\delta \rightarrow 0$

$$(10) \quad \underline{\dim}_B F \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

و

$$(11) \quad \overline{\dim}_B F \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

از طرف دیگر، هر مجموعه از قطر حداکثر  $\delta$  شامل شده در  $3^n$  مش مکعب از طول  $\delta$  است. بنابراین

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F)$$

لگاریتم و حد می‌گیریم وقتی  $\delta \rightarrow 0$  و نامساوی‌های مخالف با معادلات ۱۰ و ۱۱ را به دست می‌آوریم. بنابراین برای پیدا کردن بُعدهای جعبه‌ای معادلات ۷ تا ۹ می‌توانیم  $N_\delta(F)$  را برابر قرار دهیم با تعداد مکعب‌های  $\delta$ -مش که با  $F$  اشتراک دارند.

این نوع تعریف استفاده‌ی تجربی بُعدهای جعبه‌ای را وسعت می‌بخشد. برای پیدا کردن بُعد جعبه‌ای از یک مجموعه‌ی مسطح  $F$ ، یک مش مربعات یا جعبه‌ای از طول  $\delta$  رسم می‌کنیم و تعداد  $N_\delta(F)$  که مجموعه را برای مقادیر مختلف کوچک  $\delta$  می‌پوشانند، را می‌شماریم. بُعد برابر است با نسبت لگاریتمی که  $N_\delta(F)$  افزایش پیدا می‌کند وقتی که  $\delta \rightarrow 0$ ، و می‌تواند به وسیله شیب گراف  $\log N_\delta(F)$  در مقابل  $-\log \delta$  تقریب زده شود.

این تعریف، یک تفسیر از معنی بُعد جعبه‌ای را بیان می‌کند، تعداد مکعب‌های شبکه‌ای از طول  $\delta$  که با مجموعه اشتراک دارند، یک نشانه از میزان گستردگی یا نامنظمی مجموعه است که به وسیله یک مقیاس  $\delta$  چک شده است. بُعد بازتاب این است که با  $\delta \rightarrow 0$ ، بی‌نظمی‌ها با چه سرعتی گسترش می‌یابند.

به همین روش می‌توان تعریف‌های معادلی برای بُعد جعبه‌ای بیان کرد، که تعدادی از آنها را در زیر جمع‌بندی می‌کنیم.  
**تعاریف معادل ۸:**

بُعدهای جعبه‌ای-شمارنده بالایی و پایینی از یک زیر مجموعه‌ی  $F$  در  $R^n$  داده شده به وسیله

$$(12) \quad \underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$(13) \quad \overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

و بُعد جعبه‌ای-شمارنده از  $F$  به صورت

$$(14) \quad \dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

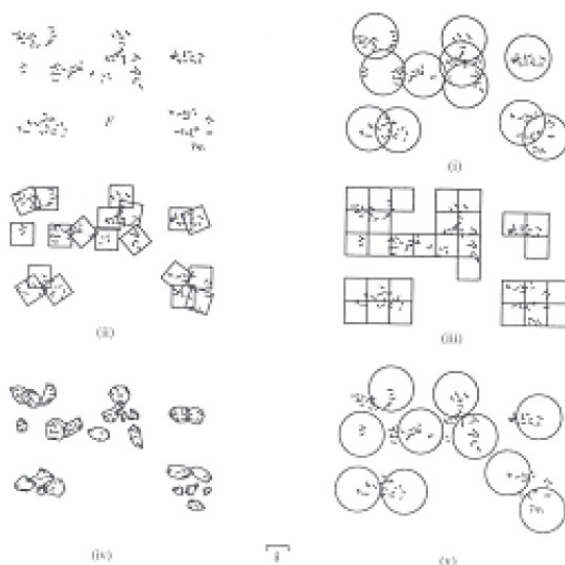
(در صورت وجود) که  $N_\delta(F)$  هر یک از مقادیر زیر است (شکل ۹):

(۱) کمترین تعداد از گوی‌های بسته از شعاع  $\delta$  که  $F$  را می‌پوشانند،

(۲) کمترین تعداد مکعب‌هایی از طول  $\delta$  که  $F$  را می‌پوشانند،

- (۳) تعداد مکعب‌های  $\delta$ -مش که با  $F$  اشتراک دارند،  
 (۴) کمترین تعداد از مجموعه‌ها به قطر حداکثر  $\delta$  که  $F$  را می‌پوشانند،  
 (۵) بیشترین تعداد از گوی‌های مجزا از شعاع  $\delta$  با مرکز در  $F$ . [۴]

شکل ۹: بُعدهای جعبه‌ای-شمارنده



اکنون در معادلات ۱۲ تا ۱۴، حد را وقتی  $\delta$  به صفر میل می‌کند در میان هر دنباله نزولی  $\delta_k$  به طوری که  $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ ، برای مقدار ثابت  $0 < c < 1$ ، بررسی می‌کنیم. به‌ویژه برای  $\delta_k = c^k$ . برای اثبات این موضوع، توجه کنید که اگر  $\delta_{k+1} \leq \delta \leq \delta_k$ ، آنگاه با  $N_\delta(F)$  کمترین تعداد از مجموعه‌ها در یک  $\delta$ -پوش از  $F$ ،

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} = \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c}$$

بنابراین

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$$

نامساوی معکوس بدیهی است. حالت حد پایینی می‌تواند به روش مشابه به‌دست می‌آید.

یک تعریف معادل از بُعد جعبه‌ای که دارای شکل متفاوتی است وجود دارد که به طور خلاصه آن را بیان می‌کنیم.

**تعریف ۹:**

(a)  $\delta$ -همسایگی  $F_\delta$  از یک زیر مجموعه‌ی  $F$  از  $R^n$  است، اگر

$$F_\delta = \{x \in R^n : |x - y| \leq \delta \quad \text{for some } y \in F\}$$

یعنی، مجموعه‌ی نقاطی از  $F$  که فاصله‌شان کمتر از  $\delta$  است

(b) اگر  $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$  یک زیر مجموعه از  $R^n$  باشد، آنگاه حجم  $n$ -بُعدی از  $A$  به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{vol}^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

خاصیت ۱۰: اگر  $F$  یک زیر مجموعه از  $R^n$  باشد، آنگاه

$$\underline{\dim}_B F = n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = n - \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

اثبات: اگر  $F$  بتواند به وسیله  $N_\delta(F)$  از گویه‌ایی به شعاع  $\delta < 1$  پوشیده شود، آنگاه  $F_\delta$  می‌تواند به وسیله گویه‌ایی متحدالمرکز به شعاع  $2\delta$  پوشانده می‌شود. بنابراین

$$\text{vol}^n(F_\delta) \leq N_\delta(F) \cdot c_n \cdot (2\delta)^n$$

که  $c_n$  حجم گوی واحد در  $R^n$  است. لگاریتم می‌گیریم:

$$\frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n \log \delta + \log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

بنابراین

$$(15) \quad \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \underline{\dim}_B F$$

از طرف دیگر، اگر  $N_\delta(F)$  گوی مجزا به شعاع  $\delta$  با مرکزهایی در  $F$  وجود داشته باشد، آنگاه به وسیله جمع حجم‌هایشان داریم:

$$N_\delta(F) \cdot c_n \cdot \delta^n \leq \text{vol}^n(F_\delta)$$

لگاریتم می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $\delta \rightarrow 0$ ، و نامساوی مخالف با معادله ۱۵ به دست می‌آید، و از تعریف معادل ۸ قسمت ۵، استفاده می‌کنیم و مسئله ثابت است. برای حد بالایی به روش مشابه می‌توان ثابت کرد. □  
 بُعد جعبه‌ای تعریف شده در خاصیت ۱۰ را گاهی اوقات ”بُعد مینکفسکی ۲۳ - بولگانند ۲۴“ نیز می‌نامند.  
 فهمیدن رابطه‌ی بین بُعد جعبه‌ای - شمارنده و بُعد هاسدورف می‌تواند مفید باشد. اگر  $F$  به وسیله‌ی  $N_\delta(F)$  مجموعه از قطر  $\delta$  پوشیده شود، آنگاه از تعریف ۱ داریم:

$$H_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s$$

اگر  $H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) < 1$  آنگاه  $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$ ، اگر  $\delta$  به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، بنابراین

$$s \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

پس

$$(16) \quad \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

برای هر  $F \subseteq R^n$ .

در حالت کلی این تساوی برقرار نیست. هر چند بُعدهای جعبه‌ای و هاسدورف برای بسیاری از مجموعه‌های ”به طور منطقی منظم“ برابرند، ولی وجود دارند مثال‌هایی که نامعادله‌ی ۱۶ به طور اکید است.  
 مثال ۱۱: فرض کنیم  $F$  مجموعه‌ی یک سوم میانی کانتور باشد، آنگاه

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \frac{\log 2}{\log 3}$$

<sup>23</sup> Minkowski <sup>24</sup> Bouligand

**جواب:** واضح است که به وسیله  $k$  بازه به طول های  $3^{-k}$  می توانیم  $E_k$  را بپوشانیم در نتیجه اگر  $3^{-k+1} < \delta \leq 3^{-k}$ ،  $N_\delta(F) < 2^k$  است. از معادله ۸ داریم:

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

از طرف دیگر، هر بازه از طول  $\delta$  با  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k-1}$  حداکثر با یکی از  $k$  بازه از طول  $3^{-k}$  استفاده شده در ساخت  $F$ ، اشتراک دارد. وجود دارد  $2^k$  بازه به طوری که حداقل  $2^k$  بازه از طول  $\delta$  برای پوشاندن  $F$  لازم است. بنابراین  $N_\delta(F) \geq 2^k$ . پس داریم:

$$\underline{\dim}_B F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$$

داریم:

$$\frac{\log 2}{\log 3} \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$\square. \underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \frac{\log 2}{\log 3}$$

بنابراین، طبق مثال ۷، حداقل برای مجموعه‌ی یک سوم میانی کانتور  $\dim_H F = \dim_B F$ .  
**مثال ۱۲:** فرض کنیم  $F$  مجموعه‌ی اعداد گویا در بازه‌ی  $[0, 1]$  باشند، بُعد جعبه‌ای و هاسدورف آن را به دست آورید.  
**جواب:** بُعد جعبه‌ای: اگر مجموعه‌ی  $F$  را به وسیله یک افراز با بازه‌هایی به طول  $\delta$  بپوشانیم، آنگاه  $N_\delta(F) = \frac{1}{\delta}$  تعداد لازم است. بنابراین

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = 1$$

**بُعد هاسدورف:** چون مجموعه‌ی  $F$  یک مجموعه شماراست، پس  $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$  به طوری که  $x_i \in [0, 1]$  برای هر  $i$ ، بنابراین طبق خواص بُعد هاسدورف داریم:

$$\square. \dim_H F = \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\} = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim \{x_i\} = \sup_{1 \leq i \leq \infty} 0 = 0$$

بنابراین بُعد جعبه‌ای از  $F$  برابر ۱ و بُعد هاسدورف  $F$  برابر صفر است. پس نامعادله ۱۶ به طور اکید برقرار است.  
**نکته:** مثال ۱۲ نشان دهنده این مطلب است که بُعد جعبه‌ای دارای خاصیت "پایداری شمارا" نیست.

### خواص و مشکلات بُعد جعبه‌ای- شمارنده

در زیر خواص مقدماتی بُعد جعبه‌ای را همانند بُعد هاسدورف بیان می‌کنیم.

(۱) یک منیفلد  $m$ -بُعدی مسطح از  $R^n$  دارای  $\dim_B F = m$  است.

(۲)  $\underline{\dim}_B F$  و  $\overline{\dim}_B F$  یکنواپند.

(۳)  $\overline{\dim}_B F$  پایایی متناهی است. یعنی  $\overline{\dim}_B (F \cup E) = \max \{ \overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B E \}$ . ایده‌ی متناظر برای  $\underline{\dim}_B F$  برقرار نیست.

(۴)  $\underline{\dim}_B$  و  $\overline{\dim}_B$  پایای لیب‌شیتز دو طرفه هستند. زیرا، اگر  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$  و  $F$  به وسیله  $N_\delta(F)$  مجموعه از قطر حداکثر  $\delta$  پوشیده شود، آنگاه  $N_\delta(F)$  این مجموعه‌ها را تحت  $f$  به شکل یک پوش از  $f(F)$  به وسیله مجموعه‌هایی از قطر حداکثر  $c\delta$ ، تصویر می‌کند. بنابراین  $\underline{\dim}_B f(F) \leq \underline{\dim}_B F$ . به طور مشابه، بُعدهای جعبه‌ای رفتارشان همانند بُعدهای هاسدورف تحت تبدیلات هولدر و لیب‌شیتز دو طرفه است.

حال، به بررسی مشکلات بُعد جعبه‌ای- شمارنده می‌پردازیم. خاصیت بُعدی از بُعدهای جعبه‌ای در ابتدا معقول به نظر می‌رسد ولی نتایج نامطلوبی در پی دارد.

**خاصیت ۱۳:** فرض کنیم  $\bar{F}$  نشان دهنده‌ی بستار  $F$  باشد (یعنی: کوچکترین زیر مجموعه‌ی بسته از  $R^n$  شامل  $F$ )، آنگاه

$$\overline{\dim}_B \bar{F} = \overline{\dim}_B F$$

$$\underline{\dim}_B \bar{F} = \underline{\dim}_B F$$

**اثبات:** فرض کنیم  $B_1, \dots, B_k$  یک خانواده متناهی از گوی‌های بسته به شعاع  $\delta$  باشد. اگر مجموعه‌ی بسته  $B_i$  شامل  $F$  باشد، آنگاه شامل  $\bar{F}$  نیز خواهد بود. بنابراین کمترین تعداد از گوی‌های بسته از شعاع  $\delta$  که  $F$  را می‌پوشانند با کمترین تعداد لازم برای پوشاندن مجموعه‌ی بزرگتر  $\bar{F}$ ، برابر است. پس مسئله ثابت است.  $\square$

یک نتیجه فوری از این خاصیت، این است که اگر  $F$  یک زیر مجموعه‌ی چگال از یک ناحیه‌ی باز از  $R^n$  باشد، آنگاه

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n$$

برای مثال، فرض کنیم  $F$  مجموعه‌ی (شمارا) از اعداد گویا بین ۰ و ۱ باشد، آنگاه  $\bar{F}$  تمام بازه‌ی  $[0, 1]$  است، بنابراین  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = 1$ ، بنابراین مجموعه‌ی شمارا می‌تواند دارای بُعد جعبه‌ای ناصفر باشد که با خواص اصلی بُعد متناقض است.

**مثال ۱۴:** نشان دهید که  $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$  یک مجموعه‌ی فشرده با  $\underline{\dim}_B F = \frac{1}{2}$  است.

**جواب:** فرض کنیم  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  و  $k$  یک عدد صحیح صادق در  $\frac{1}{k(k-1)} < \delta < \frac{1}{k(k+1)}$  باشد. اگر  $|U| \leq \delta$ ، آنگاه  $U$  می‌تواند حداکثر یکی از نقاط  $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}\}$  را بپوشاند، چون  $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} > \delta$ . بنابراین حداقل  $k$  مجموعه از قطر  $\delta$  برای پوشاندن  $F$  لازم است، بنابراین  $N_\delta(F) \geq k$  نتیجه می‌دهد

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}$$

فرض کنیم  $\delta \rightarrow 0$  بنابراین  $k \rightarrow \infty$  و نتیجه می‌دهد که  $\underline{\dim}_B F \geq \frac{1}{2}$ . از طرف دیگر، اگر  $\frac{1}{2} < \delta < 1$ ،  $k$  را در نظر می‌گیریم که  $\frac{1}{k(k+1)} < \delta < \frac{1}{k(k-1)}$ . آنگاه با حذف  $(k-1)$  نقطه از  $F$  که با  $(k-1)$  بازه دیگر می‌توانند پوشیده شوند،  $(k+1)$  بازه از طول  $\delta$ ،  $[0, \frac{1}{k}]$  را می‌پوشاند، بنابراین  $N_\delta(F) \leq 2k$  پس

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log k(k-1)}$$

در نتیجه  $\frac{1}{2} \leq \overline{\dim}_B F$ ، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2} \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \frac{1}{2}.$$

$\square$

**۴.۳. بُعدهای جعبه‌ای-شمارنده‌ی تعمیم یافته.** فرض کنیم  $F$  زیر مجموعه‌ی  $R^n$  باشد. می‌توانیم  $F$  را به تعدادی شمارا از قطعات  $F_1, F_2, \dots$  تجزیه کنیم به طوری که بزرگترین قطعه دارای کوچکترین بُعد ممکن باشد، این ایده بُعدهای جعبه‌ای-شمارنده‌ی تعمیم یافته<sup>۲۵</sup> را به صورت زیر بیان می‌کنیم [۱۰]:

$$(17) \quad \underline{\dim}_{MB} F = \text{Inf} \left\{ \text{Sup}_i \underline{\dim}_B F_i : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\}$$

<sup>25</sup> Modified Box-Counting Dimension

$$(۱۸) \quad \overline{\dim}_{MB} F = \text{Inf} \left\{ \text{Sup}_i \overline{\dim}_B F_i : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\}$$

(در هر دو حالت  $\text{Inf}$  روی همه‌ی پوش‌ها شمارای ممکن  $\{F_i\}$  از  $F$  است.) واضح است که  $\overline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_B F$  و  $\overline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_B F$ ، بنابراین داریم که:  $\overline{\dim}_{MB} F = \overline{\dim}_B F = 0$ . اگر  $F$  شمارا است. به علاوه، برای هر زیر مجموعه‌ی  $F$  از  $R^n$  داریم:

$$(۱۹) \quad 0 \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_{MB} F \leq \overline{\dim}_B F \leq n$$

به آسانی می‌توان دید که  $\underline{\dim}_{MB}$  و  $\overline{\dim}_{MB}$  همه‌ی خواص خواسته شده از یک بُعد را برآورده می‌کند. اما در عمل محاسبه‌ی  $\underline{\dim}_{MB}$  و  $\overline{\dim}_{MB}$  کاری مشکل است. اگر چه، یک رابطه‌ی مفید برای مجموعه‌های فشرده، به منظور برابر بودن بُعدهای جعبه‌ای تعمیم یافته و جعبه‌ای وجود دارد.

خاصیت ۱۵: فرض کنیم  $F \subseteq R^n$  فشرده باشد، و فرض کنیم که

$$(۲۰) \quad \overline{\dim}_B (F \cap V) = \overline{\dim}_B (F)$$

برای هر مجموعه‌ی باز  $V$  که با  $F$  اشتراک دارند، آنگاه  $\overline{\dim}_{MB} F = \overline{\dim}_B F$  (یک نتیجه‌ی مشابه برای بُعدهای جعبه‌ای-شمارنده‌ی پایینی وجود دارد).

اثبات: فرض کنیم  $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$  با هر  $F_i$  بسته. یک نوع از قضیه‌ی رسته‌ی ۲۶ بشر ۲۷ (که در کتاب‌های توپولوژی عمومی موجود است) اثبات می‌کند که وجود دارد یک اندیس  $i$  و یک مجموعه‌ی باز  $V \subseteq R^n$  به طوری که  $F \cap V \subseteq F_i$ . برای این  $i$ ، رابطه‌ی ۱۸ و خاصیت ۱۳ را استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\overline{\dim}_{MB} F = \text{Inf} \left\{ \text{Sup}_i \overline{\dim}_B F_i : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \text{ where the } f_i \text{ are closed sets} \right\} \geq \overline{\dim}_B F$$

نامساوی مخالف از معادله ۱۹ به دست می‌آید. یک اثبات مشابه برای بُعدهای پایینی نتیجه می‌شود. [۴] برای یک کاربرد، فرض کنیم  $F$  یک مجموعه‌ی فشرده خود-متشابه باشد، مانند مجموعه‌ی یک سوم میانی کانتور یا منحنی ونگنچ. اگر  $V$  هر مجموعه‌ی باز که با  $F$  اشتراک دارد، باشد آنگاه  $F \cap V$  شامل یک کپی هندسی مشابه از  $F$  است که باید دارای بُعد جعبه‌ای بالایی مساوی با  $F$  باشد. به طوری که معادله ۲۰ برقرار است. نتیجه می‌گیریم که بُعدهای جعبه‌ای و جعبه‌ای تعمیم یافته مساوی هستند.

#### ۴. توابع نامنظم هیچ‌جا مشتق‌پذیر و توابع چند فرکتالی

۱.۴. معرفی توابع نامنظم هیچ‌جا مشتق‌پذیر. واضح است که یک تابع پیوسته دلیلی ندارد که در هر نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد (مانند  $f(x) = |x|$  که در  $x = 0$  مشتق‌پذیر نیست)، اما تا یک قرن گذشته گمان میرفت که هر تابع پیوسته، حداقل در یک نقطه مشتق‌پذیر است، مثال تابع پیوسته و هیچ‌جا مشتق‌پذیر و ایرشتراس<sup>۲۸</sup>، یک مثال نقض برای این عقیده شد. و ایرشتراس ساختار بندی کرد تابع [۱۴]

$$(۲۱) \quad W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \text{Cos}(b^k t) \quad \text{or} \quad W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \text{Sin}(b^k t)$$

که  $0 < a < 1 < b$  و  $ab > 1$ . [۱۸]

وایرستراس و دیگران اثبات‌های مستقلی که این تابع برای هر یک از مقادیر  $a$  و  $b$ ، هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست، بیان کردند. ولی برای اولین بار، هاردی<sup>۲۹</sup> این مطلب را برای همه‌ی مقادیر  $a$  و  $b$  نشان داد [۱۸].  
باید توجه داشت که تابع وایرستراس هیچ‌جا مشتق از مرتبه صحیح ندارد و اخیراً کولوانکر<sup>۳۰</sup> اثبات کرده است که این تابع دارای مشتق از مرتبه‌ی کسری می‌باشد. جهت مشاهده این مطلب و آشنایی با مشتقات کسری می‌توانید به منابع [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷] رجوع کنید.  
هدف ما بررسی شکل زیر از تابع وایرستراس است:

$$(22) \quad W_\lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t) \quad \lambda > 1 \quad 1 < s < 2$$

که فرض کرده‌ایم  $b = \lambda$  و  $a = \lambda^{(s-2)}$ . توجه کنید که  $W_\lambda(0) = 0$ .  
شکل این تابع نشان می‌دهد که یک فرکتال است [۱۰]. بُعد فرکتالی و منحنی‌های مربوط به آن، اولین بار به وسیله‌ی بسیکوویچ<sup>۳۱</sup> و اورسل<sup>۳۲</sup> [۱۹] مورد بررسی قرار گرفت. بُعد جعبه‌ای این شکل تابع وایرستراس،  $s$  است [۱۰] ولی بُعد هاسدورف آن هنوز نامشخص است، اما مولدین<sup>۳۳</sup> و ویلیامز<sup>۳۴</sup> [۲۰] نشان دادند که وجود دارد یک ثابت  $c$  به طوری که

$$s - \frac{c}{\log \lambda} \leq \dim_H \text{graph}(f) \leq s.$$

شکل ۱۰، شکل‌های تابع وایرستراس را برای مقدار ثابت  $\lambda$  و مقادیر مختلف از بُعد، نشان می‌دهد. واضح است که با افزایش بُعد، نامنظمی بیشتر و بیشتر می‌شود، وقتی مقدار بُعد به ۲ نزدیک می‌شود، شکل به سمت پر کردن صفحه میل می‌کند.

تابع وایرستراس به عنوان یک مجموعه‌ی حدی از یک سیستم فعال توابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر، در جذب کننده‌ها و دفع کننده‌ها از سیستم‌های دینامیکی، ظاهر می‌شوند. نگاهت  $h: R^2 \rightarrow R^2$  داده شده به صورت زیر را بررسی می‌کنیم [۱۰]:

$$(23) \quad h(t, x) = (\lambda t, \lambda^{2-s}(x - \sin(t)))$$

که  $\lambda > 1$  و  $0 < s < 2$ . آنگاه داریم:

$$(24) \quad h^2(t, x) = h(\lambda t, \lambda^{2-s}(x - \sin(t)))$$

$$(25) \quad = (\lambda^2 t, \lambda^{2-s}(\lambda^{2-s}(x - \sin(t)) - \sin(\lambda t)))$$

$$(26) \quad = (\lambda^2 t, \lambda^{2(2-s)}(x - (\sin(t) + \lambda^{2-s}\sin(\lambda t))))$$

بنابراین، با ادامه‌ی این کار، در  $n$  امین تکرار داریم:

$$(27) \quad h^n(t, x) = \left( \lambda^n t, \lambda^{n(2-s)} \left( x - \sum_{k=1}^n \lambda^{(2-s)k} \sin(\lambda^k t) \right) \right)$$

این نشان می‌دهد که شکل تابع وایرستراس معادله ۲۲ یک دفع کننده‌ها برای  $h$  در معادله ۲۳ است.

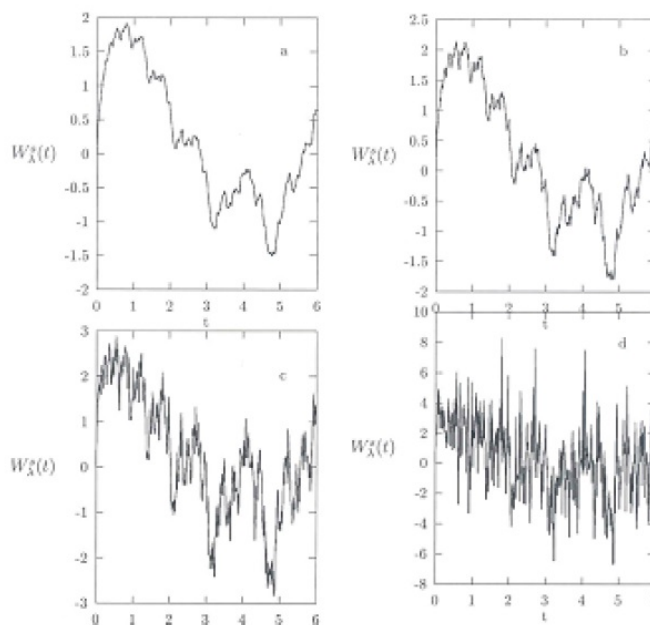
<sup>29</sup> Hardy <sup>30</sup> Kolwankar <sup>31</sup> Besicovitch <sup>32</sup> Ursell <sup>33</sup> Mauldin <sup>34</sup> Williams

۲.۴. معرفی توابع چند فرکتالی. درباره‌ی مطالعه‌ی اندازه‌های چند فرکتالی<sup>۳۵</sup> و کاربردهایشان، مطالب زیادی موجود است [۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴]. اهمیت‌شان در این حقیقت است که این اندازه‌ها، اندازه‌هایی طبیعی‌ای هستند که در تحلیل پدیده‌های فیزیکی زیادی مورد استفاده قرار میگیرند [۱۱، ۱۲].

تعریف نمای هولدر: نمای هولدر  $\alpha(y)$  از یک تابع  $f$  در  $y$ ، را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد [۱۴]: بزرگترین نمایی است به طوری که یک چند جمله‌ای  $P_n(x)$  از مرتبه‌ی  $n$  وجود دارد که برای هر همسایگی از  $y$  صدق می‌کند در

$$|f(x) - P_n(x - y)| = O(|x - y|^\alpha).$$

شکل ۱۰: تابع و ایرشتراس برای  $\lambda = 1/5$  و  $s = 1/1$  (a)  $s = 1/3$  (b)  $s = 1/6$  (c)  $s = 1/9$  (d)



از بخش قبل مشخص است که، تابع و ایرشتراس یک تابع فرکتالی است، و می‌توان ثابت کرد که در هر نقطه نمای هولدر یکسان دارد، ولی توابع زیادی وجود دارند که در هر نقطه‌ای نمای هولدر متفاوت دارند، که به این توابع، توابع چند فرکتالی می‌گوییم. این توابع می‌توانند برای مدل‌بندی پدیده‌های مختلفی در سیستم‌های فیزیکی استفاده شود. یک رفتار متناوب از یک توابع چند فرکتالی در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

شکل ۱۱ برای مقادیر  $b_1 = 0$   $b_2 = 1/2$   $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$  و  $\lambda_1 = 1/5^{-0/5}$   $\lambda_2 = 1/5^{-0/9}$  (a) و  $\lambda_1 = 1/5^{-0/5}$   $\lambda_2 = 1/5^{-0/1}$  (b) رسم شده است.

اکنون، روی مثال ویژه‌ای به عنوان یک تابع بحث می‌کنیم. این تابع، یک جواب  $F(x)$  از معادله‌ی تابعی زیر است:

$$(28) \quad F(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_i F(S_i^{-1}(x)) + g(x) \quad x \in R$$

که  $S_i(x) = \mu_i x + b_i$  از نوع  $S_i(x) = \mu_i x + b_i$  ( $|\mu_i| < 1$ ) و  $b_i$ ‌های حقیقی) هستند،  $\lambda_i$ ‌ها اعداد حقیقی و  $g$  هر تابع به اندازه‌ی کافی مسطح است (فرض است که  $g$  و مشتقاتش سریع میرا می‌شوند).

با فرض این‌که (در معادله ۲۸):

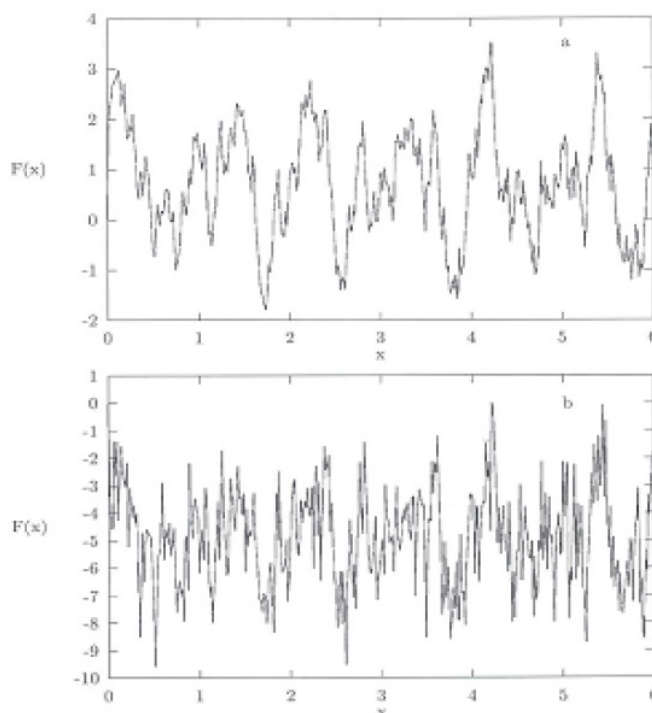
$$(0 < \alpha < \beta < 1) \quad \lambda_2 = 3^{-\beta} \quad \lambda_1 = 3^{-\alpha} \quad b_2 = \frac{2}{3} \quad b_1 = 0 \quad \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3} \quad d = 2$$

و

$$g(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

شکل  $F(x)$  با مقادیر داده شده در بالا، در شکل ۱۱ رسم شده است. این تابع به تفصیل به وسیله جافارد [۲۵] با استفاده از تبدیلات موجک‌ها، بررسی شده است، آنجا، نشان داده شده است که معادله ۲۸ با پارامترهای انتخاب شده در بالا، دارای جواب یکتا است. علاوه بر این، در هر نقطه  $F(x)$  یا دارای نمای هولدر در بازه  $[\alpha, \beta]$  است یا مانند  $g$  مسطح است.

شکل ۱۱: شکل تابع  $F(x)$  برای مقادیر مشخص شده



یک دنباله از نقاط  $S_{i_1}(\circ) S_{i_2} S_{i_1}(\circ) \dots S_{i_n} \dots S_{i_1}(\circ) \dots$  که  $i_k$  مقادیر ۱ یا ۲ را می‌گیرند، به یک نقطه در  $[0, 1]$  میل می‌کند (در حقیقت به یک نقطه از مجموعه‌ی کانتور)، و برای مقادیر  $\mu_i$  که در بالا انتخاب شده، یک تناظر یک به یک بین دنباله‌ها و حدها وجود دارد. جواب معادله‌ی تابعی ۲۸ به وسیله جافارد به صورت زیر داده شده است [۲۵]:

$$(29) \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^2 \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} g(S_{i_n}^{-1} \cdots S_{i_1}^{-1}(x)).$$

توجه کنید که با انتخاب پارامترهای بالا، مجموعه‌ی داخلی در معادله ۲۹ به یک عبارت تنها تبدیل می‌شود. جافارد [۲۵] نشان داد که نمای هولدر در  $[0, 1]$  هست:

$$h(y) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\lambda_{i_1(y)} \dots \lambda_{i_n(y)})}{\log(\mu_{i_1(y)} \dots \mu_{i_n(y)})}$$

که  $\{i_1(y), \dots, i_n(y)\}$  یک دنباله از اعداد وابسته به یک نقطه‌ی  $y$  است (یعنی  $y \rightarrow S_{i_1(y)} \dots S_{i_n(y)}$ ). واضح است که  $h_{\min} = \alpha$  و  $h_{\max} = \beta$ . تابع  $F(x)$  در نقاط مجموعه‌ی کانتر دارای  $h(x) \in [\alpha, \beta]$  و در نقاط دیگر مسطح همانند مسطحی  $g$  است.

حال، یک مثال کلاسیک از توابع چند فرکتالی را بررسی می‌کنیم:

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\pi n^2 x)$$

این تابع توسط ریمان پیشنهاد شد. او نشان داد که نظم این تابع از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر خیلی بیشتر می‌شود. هاردی<sup>۳۶</sup> و لیتل وود<sup>۳۷</sup> [۲۷] اثبات کردند که  $R(x)$  در  $x$  مشتق‌پذیر نیست، اگر  $x$  گنگ یا  $x$  نتواند به شکل  $2p + \frac{1}{q} + 1$  که  $p, q \in N$  نوشته شود، در حقیقت آنها نشان دادند که نمای هولدر در این نقاط کمتر یا مساوی  $\frac{1}{q}$  است. گرور<sup>۳۸</sup> [۲۸] مشتق‌پذیری  $R(x)$  را در نقاطی که می‌تواند به صورت  $2p + \frac{1}{q} + 1$  ( $p, q \in N$ ) نوشته شوند، ثابت کرد. جافارد اخیراً نشان داده است که بُعد  $R(x)$  هست [۲۶]:

$$d(\alpha) = \begin{cases} 4\alpha - 2 & \alpha \in [1/2, 3/4] \\ 0 & \alpha = 3/2 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

که  $d(\alpha)$  بُعد هاسدورف مجموعه‌ای که نمای هولدر  $\alpha$  است، می‌باشد.

## مراجع

- [1] B. B. Mandelbrot, *the Fractal Geometry of Nature*; Freeman, Stateplace, New York, 1977.
- [۲] م. ح. شیردره حقیقی و ا. روزی طلب، (کنث فلکتر) هندسه فرکتالی، دانشگاه ولیعصر رفسنجان، ایران، ۱۳۸۴.
- [۳] س. علیخانی و ع. نوروزی، فراکتال راوزی چیست؟، نشریه ریاضی و جامعه، ۱، شماره ۳، ۱۳۹۳، صفحه ۴۳-۳۹.
- [4] X. T. Feng, Y. Yu, G. L. Feng, Y. X. Xiao, B. Chen and Q. Jiang, Fractal behaviour of the microseismic energy associated with immediate rockbursts in deep, hard rock tunnels, *Tunn. Undergr. Sp. Tech.*, **51** (2016) 98–107.
- [5] S. T. Perisho, D. G. Kelty-Stephen, A. Hajnal, D. Houser and S. A. Kuczaj, Fractal scaling in bottlenose dolphin (*Tursiops truncatus*) echolocation: A case study, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **443** (2016) 221–230.
- [6] S. Jaffard, Multifractal functions: Recent advances and open problems, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **73** (2004) 129–153.
- [7] X. Peng, W. Qi, M. Wang, R. Su and Z. He, Backbone fractal dimension and fractal hybrid orbital of protein structure, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **18** (2013) 3373–3381.
- [8] N. Pippa, A. Dokoumetzidis, C. Demetzos and P. Macheras, On the ubiquitous presence of fractals and fractal concepts in pharmaceutical sciences: A review, *International Journal of Pharmaceutics*, **456** (2013) 340–352.
- [9] G. A. Edger, *Measure, topology and Fractal Geometry*, Springer, placeState, New York, 1990.

<sup>36</sup>Hardy <sup>37</sup> Littlewood <sup>38</sup> Gerver

- [10] K. Falconer, *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*, Second Edition, John Wiley, placeState, New York, 2003.
- [11] J. Feder, *Fractals*, Pergamon, Stateplace, New York, 1998.
- [12] T. Vicsek, *Fractal Growth phenomenon*, World Scientific, placecountry-region, Singapore, 1989.
- [13] M. L. Frame and B. B. Mandelbrot, *Fractals, Graphics and Mathematics Education*, the Mathematical Association of country-regionAmerica, country-regionplace, USA, 2002.
- [14] K. M. Kolwankar, Studies of Fractal Structures and Processes Using Methods of Fractional Calculus, <http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9811008>, 1997 .
- [15] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, Local fractional derivatives and fractal functions of several variables, [arXivpreprintphysics/9801010](http://arxiv.org/abs/physics/9801010), 1998.
- [16] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions, *Chaos*, **6** (1996) 505–513.
- [17] M. Delkhosh, Introduction of Derivatives and Integrals of Fractional order and Its Applications, *Applied Mathematics and Physics*, **1** 103–119.
- [18] G. H. Hardy, Weierstrass's non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17** (1916) 301–325.
- [19] A. S. Besicovitch and H. D. Ursell, Sets of Fractional Dimensions (V): on Dimensional Numbers of Some Continuous Curves, *J. London Math. Soc.*, **12** (1937) 18–25.
- [20] R. D. Mauldin and S. C. Williams, On the Hausdorff dimension of some graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **298** (1986) 793–803.
- [21] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi and A. Vulpiani, On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems, *J. Phys. A*, **17** (1984) 3521–3531.
- [22] P. Collet, J. Lobowitz and A. Porzio, The dimension spectrum of some dynamical systems, *J. Statist. Phys.*, **47** (1987) 609–644.
- [23] M. H. Jensen, L. P. Kadanoff and P. I. Procaccia, Scaling structure and thermodynamics of strange sets, *Phys. Rev. A* (3), **36** (1987) 1409–1420.
- [24] B. B. Mandelbrot, Multifractal measures, especially for the geophysicist, *Fractals in geophysics*, Birkhäuser, Basel, **131** (1989) 5–42.
- [25] S. Jaffard, Multifractal formalism for functions, Part 1: Results valid for all functions, *SIAM J. Math. Anal.*, **28** (1997) 944–970.
- [26] S. Jaffard, Multifractal formalism for functions, Part 2: Selfsimilar functions, *SIAM J. Math. Anal.*, **28** (1997) 971–998.
- [27] G. H. Hardy and E. Littlewood, Some problems of diophantine approximation, *Acta Math.*, **37** (1914) 155–191.
- [28] J. Gerver, More on the Differentiability of the Riemann Function, *Amer. J. Math.*, **93** (1971) 33–41.

مهدی دلخوش

خراسان رضوی، بردسکن، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بردسکن، گروه ریاضی  
[mehdidelkhosh@yahoo.com](mailto:mehdidelkhosh@yahoo.com)

مهدی دلخوش متولد مرداد ماه ۱۳۵۹ در شهر کاشمر است. وی در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه شهید باهنر کرمان و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی همان دانشگاه شد و با کسب رتبه اول در این رشته فارغ التحصیل گردید. وی از سال ۱۳۸۶ تاکنون عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد بردسکن می‌باشد.

